

УДК 531.224.5

О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В. И. Ванько

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
105005 Москва, Россия
E-mail: vvanko@mail.ru

Анализируются различные подходы к определению несущей способности стержней и оболочек как при упругопластическом деформировании, так и при деформировании в условиях ползучести.

Ключевые слова: несущая способность, стержни и оболочки, критическая нагрузка, критическое время выпучивания.

DOI: 10.15372/PMTF20160503

Введение. Одной из основных задач механики твердого тела, имеющей большое прикладное значение, является задача определения несущей способности стержневых и оболочечных конструкций. Существуют различные определения несущей способности и различные подходы к формулировке задачи ее определения, что обусловлено многообразием геометрических форм оболочечных конструкций, способов их нагружения, условий эксплуатации. Несущая способность оболочечных конструкций существенно зависит от свойств материалов, из которых они изготовлены, начальных несовершенств формы и скорости нагружения. В данной работе анализируются различные подходы к определению несущей способности.

Критическая нагрузка упругопластических стержней, находящихся под действием продольной сжимающей силы. Работы Ф. Энгессера и Ф. Ясинского [1–3] способствовали формированию понятий касательно- и приведенно-модульной критических сил [1–3]. В [1–3] рассматривался продольный изгиб упругопластических стержней из материала с линейным упрочнением. В работе [4] Т. Карман обобщил эти понятия на случай стержней из материалов с любой $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммой и построил зависимости критическая нагрузка $\sigma_{кр}$ — гибкость стержня λ с использованием касательного и приведенного модулей. Анализируя данные экспериментов по сжатию стальных стержней, Т. Карман заметил, что экспериментальные точки на диаграмме $\sigma_{кр}-\lambda$ располагаются ближе к кривой $\sigma-\lambda$, полученной с использованием касательного модуля, что противоречит предположению Ф. Энгессера и Ф. Ясинского, согласно которому при изгибе стержня в его поперечном сечении происходит разгрузка [2, 3]. Этот парадокс был разъяснен в работах Ф. Шэнли [5] и Ю. Н. Работнова [6].

Рассмотрим продольный изгиб шарнирно опертого упругопластического стержня под действием возрастающей или постоянной (при ползучести) силы. В работе [7] введено понятие корректности квазистатической постановки задачи о несущей способности: положительному приращению силы или времени соответствует положительное приращение

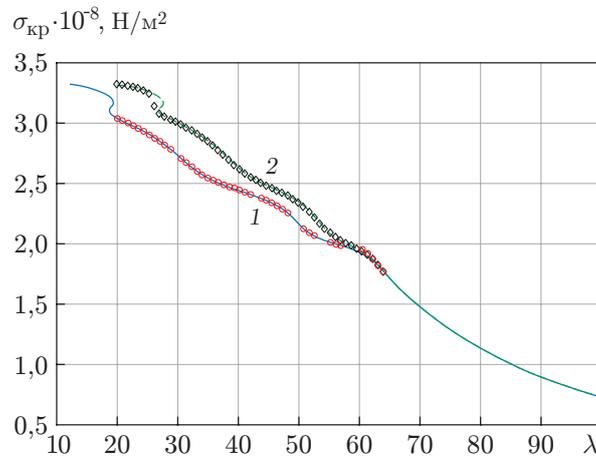


Рис. 1. Зависимость критических напряжений от гибкости стержня и величины начального прогиба:

линии — теоретические зависимости (1 — зависимость, полученная с использованием касательного модуля, 2 — зависимость, полученная с использованием приведенного модуля), точки — расчетные зависимости (1 — $w_0 = 0,000\ 01$, 2 — $w_0 = 0,1$)

прогиба. Получено достаточное условие корректности: при любых законах одномерного деформирования и любых законах ползучести стержень “несет” нагрузку до тех пор, пока безразмерная жесткость срединного сечения не станет меньше безразмерной приложенной силы (сила, напряжения и деформации отнесены к соответствующим эйлеровым величинам). В [7] предложен алгоритм вычисления критической нагрузки стержня, имеющего начальное отклонение от прямолинейной формы, при действии сжимающей силы. В численном алгоритме используется $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграмма материала, из которого изготовлен стержень. При численном решении системы уравнений равновесия определяется величина силы, при превышении которой квазистатическая постановка задачи становится некорректной.

На рис. 1 представлены расчетные диаграммы $\sigma_{кр}-\lambda$ для упругопластического стержня с прямоугольным поперечным сечением при различных значениях амплитуды начального прогиба w_0 ($w_0(x) = w_0 \sin(\pi x/L)$ — начальный прогиб стержня, отнесенный к половине высоты прямоугольного сечения). Материал стержня — дюралюминий марки Д16Т. В расчетах использовалась экспериментальная диаграмма сжатия $\sigma-\varepsilon$ [8]. При малом начальном прогибе $w_0 = 0,000\ 01$ расчетные точки лежат на теоретической кривой $\sigma_{кр}-\lambda$, полученной с использованием касательного модуля. При этом изгиб стержня вплоть до исчерпания несущей способности происходит без разгрузки в точках срединного сечения. При $w_0 = 0,1$ расчетные точки лежат на теоретической кривой $\sigma_{кр}-\lambda$, полученной с использованием приведенного модуля, и при изгибе происходит разгрузка в поперечном сечении стержня, что приводит к увеличению несущей способности.

На рис. 2, 3 приведены зависимости критических напряжений от гибкости стержня при различных значениях скорости нагружения (под скоростью нагружения понимается величина приращения безразмерной продольной силы Δp , получаемая при использовании метода последовательных нагружений). При $\Delta p = 10^{-3}$ (“быстрое” нагружение) расчетные точки лежат на теоретической кривой $\sigma_{кр}-\lambda$, полученной с использованием касательного модуля, при $\Delta p = 10^{-5}$ (“медленное” нагружение) — на кривой, полученной с использованием приведенного модуля.

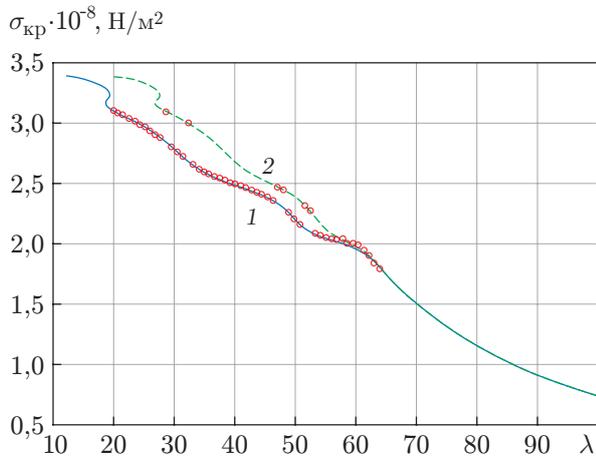


Рис. 2

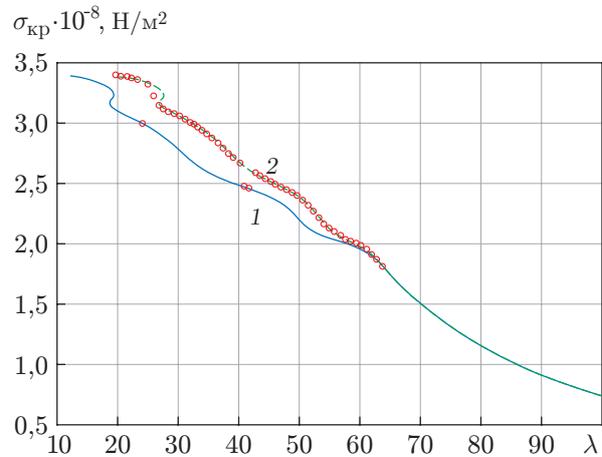


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость критических напряжений от гибкости стержня и скорости нагружения при “быстром” нагружении:

линии — теоретические зависимости (1 — зависимость, полученная с использованием касательного модуля, 2 — зависимость, полученная с использованием приведенного модуля), точки — $\Delta p = 10^{-3}$

Рис. 3. Зависимость критических напряжений от гибкости стержня и скорости нагружения при “медленном” нагружении:

линии — теоретические зависимости (1 — зависимость, полученная с использованием касательного модуля, 2 — зависимость, полученная с использованием приведенного модуля), точки — $\Delta p = 10^{-5}$

Подтверждается гипотеза Хоффа — Веубеке, согласно которой при выпучивании упругопластического стержня в условиях ползучести под действием постоянной силы жесткость срединного сечения с течением времени непрерывно уменьшается и в момент времени $t = t^*$ (t^* — критическое время) становится равной приложенной силе, т. е. при $t = t^*$ продольная сила становится критической по Эйлеру [9, 10]. В этом случае скорость прогиба равна бесконечности при конечном прогибе.

Критическое время выпучивания оболочек бесконечной и конечной длины в условиях ползучести. Одним из основных свойств материалов, эксплуатируемых при высоких температурах, является ползучесть. При определении несущей способности конструкций при ползучести вводится понятие критического времени — момента времени, в который либо скорость прогиба обращается в бесконечность, либо прогиб достигает некоторого критического значения.

При решении задачи определения несущей способности оболочки, срединная линия поперечного сечения которой представляет собой овал, при действии внешнего гидростатического давления используется кинематическая схема, описанная в работе [11]. Срединная линия поперечного сечения бесконечно длинной цилиндрической оболочки аппроксимируется сопряжением двух окружностей радиусом R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) (рис. 4). Предполагается, что $|OA| \approx |OB|$. В силу симметрии рассматривается только 1/4 поперечного сечения. Задача решается с учетом больших перемещений. Предполагается, что в точке сопряжения окружностей C , соответствующей значению угла $\psi \approx \pi/4$, изгибающий момент в процессе деформирования равен нулю.

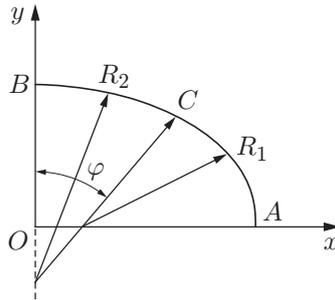


Рис. 4. Срединная линия поперечного сечения оболочки овальной формы

Процесс выпучивания оболочки включает два этапа. На первом этапе под действием равномерного давления радиус большей окружности неограниченно увеличивается. В конце первого этапа участок BC большей окружности (см. рис. 4) превращается в прямую. На втором этапе горизонтальный участок BC продавливается и длина отрезка BO стремится к нулю. Дальнейшее движение происходит таким образом, что $b(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t^*$. Момент времени t^* будем называть критическим временем (временем сплющивания).

Рассмотрим цилиндрическую оболочку конечной длины $-L \leq z \leq L$, толщиной $2h$, поперечное сечение которой представляет собой овал с полудиаметрами a_0 и b_0 ($a_0 > b_0$). Ось Oz направлена вдоль оси оболочки. Предполагается, что при сплющивании оболочки под действием равномерного внешнего давления существуют две плоскости симметрии: yOz и xOz . Пусть до начала процесса сплющивания в торцевом сечении оболочки $z = -L$ точкам B, C и A срединного сечения соответствуют точки B', C', A' , в торцевом сечении $z = L$ — точки B'', C'', A'' . Таким образом, образующая $B''B'$ принадлежит плоскости yOz , образующая $A''A'$ — плоскости xOz . Предполагается, что в случае шарнирного опирания торцов оболочки участки образующих $B''B'$ и $A''A'$ при деформировании представляют собой полуволны синусоиды, а в случае жесткой заделки торцов оболочки — косинусоиды. При сплющивании участок оболочки $B'B''C'C''$ продавливается, а участок $C'C''A'A''$ выпучивается [12]. В отличие от оболочки бесконечной длины в оболочке конечной длины появляются растягивающие усилия в осевом направлении, которые интегрально учитываются при составлении уравнений равновесия участка оболочки в окрестности срединного поперечного сечения $z = 0$. При решении задачи принимаются основные положения полубезмоментной теории оболочек [13]: изгибающими моментами в плоскостях yOz и xOz пренебрегается, а учитываются только моменты в поперечных сечениях.

Решение задачи об определении несущей способности оболочки сводится к решению системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно первых производных \dot{R}_1 и \dot{R}_2 по времени (или по параметру нагружения)

$$\dot{R}_1 = f_1(R_1, R_2, k, \delta, \gamma), \quad \dot{R}_2 = f_2(R_1, R_2, k, \delta, \gamma) \quad (1)$$

при соответствующих начальных условиях. В (1) δ, γ — длина и толщина оболочки, отнесенные к характерной длине $\pi R_0/2$; значение коэффициента k зависит от способа закрепления торцов оболочки ($k = 0,5$ при жесткой заделке и $k = 0,25$ при шарнирном опирании).

Безразмерное время окончания первого этапа τ^* (момент появления горизонтального участка в срединном сечении) зависит от длины оболочки δ : при $25 \leq \delta < \infty$ $\tau^* = 108$, при $10 \leq \delta < 25$ $\tau^* = 154$, при $\delta = 5$ $\tau^* = 1080$. Материал является линейно-вязким, $\gamma = 0,01$.

В случае линейно-упругого материала при малых перемещениях критическим будем называть такое значение внешнего давления $p = p^*$, при котором перемещения точки B стремятся к бесконечности (особенность решения системы (1) в случае ее линеаризации).

В работе [12] для упругой оболочки конечной длины получена формула критического давления

$$p^* = \frac{2}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^3 \left(\sqrt{2} + 1 + 4k \left(\frac{\pi R}{2L} \right)^2 \right) \quad (2)$$

(ν — коэффициент Пуассона).

В [14] при изучении равновесия кольца круговой формы под действием гидростатического давления выведена формула критического по Эйлера значения давления для случая, когда на окружности образуются две полуволны синусоиды. При замене изгибной жесткости кольца на цилиндрическую жесткость оболочки толщиной $2h$ получаем выражение для критического давления для бесконечно длинной оболочки:

$$p_{\text{Э}} = 2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R} \right)^3.$$

При $L \rightarrow \infty$ из формулы (2) следует

$$p^* = 2 \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h}{R} \right)^3 \frac{\sqrt{2} + 1}{3},$$

т. е. $p^* = 0,806p_{\text{Э}}$. Этот результат представляется естественным, поскольку в используемом подходе при давлении $p > 0$ непосредственно после приложения нагрузки начинается процесс деформирования и сечение оказывается более податливым, чем в случае эйлеровой постановки задачи. С использованием формулы (2) можно вычислить критические давления при различных типах закрепления торцов оболочки: в случае шарнирного опирания $p_{\text{кр}} = 0,84p_{\text{Э}}$, в случае жесткой заделки $p_{\text{кр}} = 0,88p_{\text{Э}}$.

В работе [15] приведены результаты решения системы (1) и получена зависимость $R_2 = R_2(p)$ ($dR_2/dp \rightarrow \infty$ при $p = 0,8$).

Из результатов проведенного выше анализа постановок и численного решения задач о несущей способности стержней и оболочек следует, что критическая нагрузка и критическое время существенно зависят от свойств материала, из которых они изготовлены, начальных несовершенств формы и скорости нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Engesser F.** Über Knickfestigkeit gerader Stäbe // Z. Archit. Ing. Verein Hannover. 1889. Bd 35. S. 455.
2. **Jasinski F.** Zu den Knickfagen // Schweiz. Bauzeitung. 1895. Bd 26, h. 24.
3. **Engesser F.** Über Knickfragen // Schweiz. Bauzeitung. 1895. Bd 26, h. 24.
4. **Kármán Th. von.** Untersuchungen über Knickfestigkeit // Collected works Th. von Kármán. 1902–1913. L.: Butterworths Sci. Publ., 1956. V. 1.
5. **Shanley F.** Inelastic column theory // J. Aeronaut. Sci. 1947. V. 14, N 5. P. 261–267.
6. **Работнов Ю. Н.** О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сб. 1952. № 11. С. 123–126.
7. **Ванько В. И., Перелыгина Е. С.** Продольный изгиб упругопластического стержня: обсуждение классических результатов // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Естеств. науки. 2012. Спецвыпуск. Ч. 2. С. 9–15.
8. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1961.

9. **Hoff N. J.** Creep buckling // Aeronaut. Quart. 1956. V. 7, N 2. P. 1–20.
10. **Veubeke F. de.** Creep buckling // Temperature effects in aircraft structures. N. Y.: Pergamon Press, 1958. Chap. 13.
11. **Ванько В. И., Шестериков С. А.** Сплющивание кольца в условиях ползучести // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 5. С. 127–130.
12. **Ванько В. И.** Краевой эффект в задаче о сплющивании цилиндрической оболочки внешним давлением // Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики: Сб. науч. тр. Киев: Ин-т математики НАНУ, 1997. С. 40–43.
13. **Власов В. З.** Строительная механика тонкостенных пространственных систем. М.: Стройиздат, 1947.
14. **Тимошенко С. П.** Устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
15. **Ванько В. И.** Очерки об устойчивости элементов конструкций. М.: Моск. гос. техн. ун-т им. Н. Э. Баумана, 2015.

Поступила в редакцию 27/IX 2016 г.
