

УДК 539.371

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОРНОЙ ПОРОДЫ С ЛИНЕЙНЫМ СТРУКТУРНЫМ ПАРАМЕТРОМ

А. Ф. Ревуженко, О. А. Микенина

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, 630091 Новосибирск, Россия

E-mails: revuzhenko@yandex.ru, olgarev@yandex.ru

Сформулирована замкнутая математическая модель, учитывающая упругопластические деформации и способность среды накапливать энергию внутренних самоуравновешенных напряжений. Выполнение постулата о диффеоморфизме (предположения о гладкости поля перемещений) не требуется, вследствие чего деформации зависят от напряжений и вторых производных напряжений по координатам. В построенной модели имеется линейный структурный параметр, получены соотношения, в которых учитываются локальные изгибы элементарных объемов среды.

Ключевые слова: горная порода, упругость, пластичность, самоуравновешенные напряжения, структурный параметр.

DOI: 10.15372/PMTF20180217

1. Модель со структурным параметром. Модели со структурными параметрами широко используются в различных разделах механики деформируемого твердого тела: динамике кристаллических решеток [1], механике наноматериалов [2, 3] и зернистых сред [4, 5], механике структурно-неоднородных материалов [6, 7] и т. д. В ряде теорий структурный параметр явно не вводится, но выявляется в результате анализа размерностей постоянных материала (моментные, микрополярные и другие теории упругости). В [8] показано, что необходимость введения структурного параметра может возникнуть даже на начальном этапе построения континуальной теории деформирования. Действительно, на первом шаге дискретная среда заменяется сплошной. На втором шаге предполагается, что функции, описывающие поведение среды, являются непрерывно дифференцируемыми (т. е. принимается постулат о диффеоморфизме [9]). Определенные комбинации частных производных смещений по координатам принимаются в качестве меры деформации. В данной работе теория деформирования строится на этой основе. Классический аппарат математического анализа и математической физики предназначен для работы с гладкими функциями. По-видимому, в основном этим обусловлено принятие постулата о диффеоморфизме. Отказ от данного постулата приводит к появлению в теории структурного параметра, причем даже для линейно-упругой среды, в которой моментные напряжения отсутствуют. Рассмотрим случай плоской деформации. Сначала рассмотрим поведение элементарного объема среды, ограниченного координатными линиями.

Элементарные объемы среды и их взаимодействие можно представить в виде схемы (рис. 1). Элементарные объемы будем называть также частицами, или структурными

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-17-10121).

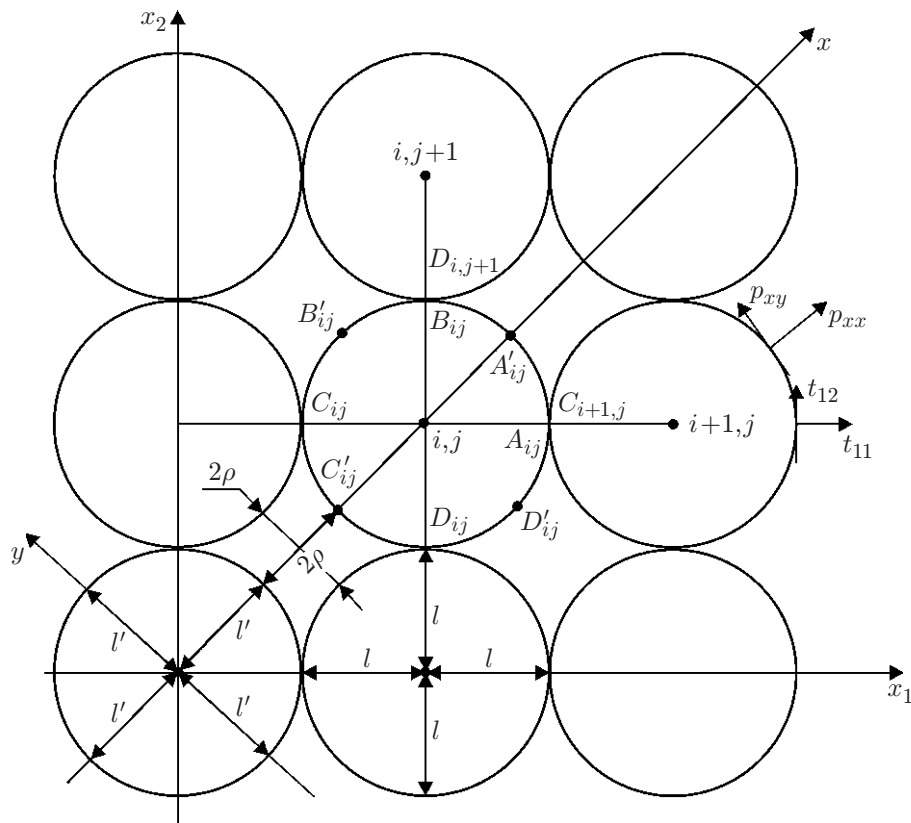


Рис. 1. Схема взаимодействия элементарных объемов

элементами. Взаимодействие элементарных объемов можно свести к взаимодействию частиц в точках контакта. Для получения классической модели упругого тела необходимо предположить линейность определяющих уравнений для частиц и отсутствие моментов и проскальзываний на контактах, а также отсутствие поровой среды. Однако это не все необходимые требования, что нетрудно показать при вычислении количества необходимых определяющих уравнений. Кинематика элементарного объема характеризуется четырьмя векторами смещений в точках его контактов с соседними элементами или с внешними телами, если они находятся на границе деформируемого тела.

Если N — число контактов, то число скалярных кинематических переменных равно $2N$. В этих переменных содержится информация о смещении и повороте элемента среды как жесткого целого. Следовательно, определяющие уравнения должны содержать $2N - 3$ кинематические переменные.

Напряженное состояние элементарного объема характеризуется N векторами сил, действующих на указанных контактах (локальные моменты исключаются). В статике результирующий момент и сила равны нулю. Следовательно, число независимых силовых переменных также равно $2N - 3$. Таким образом, определяющих уравнений должно быть $2N - 3$. В рассматриваемом случае (см. рис. 1) $N = 4$, поэтому определяющих уравнений должно быть пять. В классической плоской теории упругости таких уравнений только три (закон Гука). Постулат о диффеоморфизме равносильен двум уравнениям. Иными словами, для получения классической теории упругости к указанным выше условиям необходимо добавить еще одно условие: в элементарном объеме поле смещений должно быть линейным по координатам, следовательно, деформация — аффинной. Если данное условие не ставить, то необходимо сформулировать пять определяющих уравнений. В этом случае

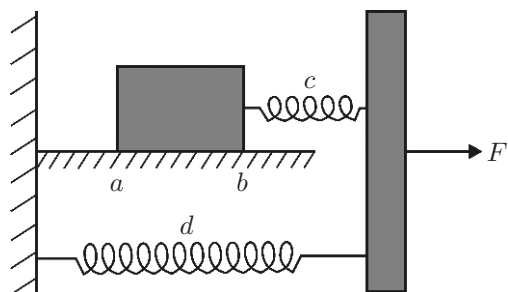


Рис. 2

Рис. 2. Модель контактного взаимодействия частиц

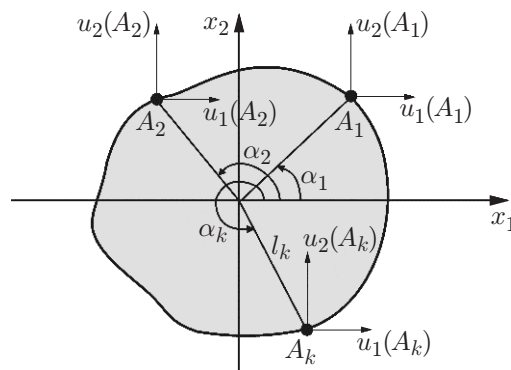


Рис. 3

Рис. 3. Схема деформирования частицы

к трем уравнениям, описывающим закон Гука, необходимо добавить еще два независимых уравнения. Такой вариант упругой среды рассмотрен в [8].

В настоящей работе вариант упругой среды [8] обобщается на случай, когда учитываются пластические деформации и внутренние самоуравновешенные напряжения. Последние имеют особое значение для массива горных пород, так как могут быть источником энергии катастрофических проявлений горного давления.

Будем полагать, что пластические деформации вызваны проскальзыванием структурных элементов среды в точках контакта, а способность среды запасать энергию самоуравновешенных напряжений обусловлена свойствами материала, заполняющего поровое пространство (см. рис. 1), в качестве которого могут использоваться различные флюиды, газ, упругая среда и т. д. В данной работе рассматривается упругая среда. Этому случаю соответствует модель, показанная на рис. 2. На участке ab происходит взаимодействие частиц. Данный контакт может быть частично пластическим, обладать свойствами вязкого или сухого трения, а также дилатансионными свойствами. Упругому элементу c соответствует упругость частиц, элементу d — упругость поровой среды. Упругие элементы c и d включены параллельно. Если элемент c растянут, а элемент d сжат, то система может находиться в состоянии равновесия при отсутствии внешних напряжений F . В этом случае усилия на элемент d полностью компенсируются напряжениями на контакте ab . Если данный контакт находится в метастабильном состоянии, то наличие слабых возмущений системы может привести к неконтролируемому высвобождению энергии упругих элементов c и d . Затем система вновь переходит в стабильное состояние. Выведем уравнения деформирования рассматриваемой среды.

2. Конечно-разностная модель. Сначала рассмотрим модель упругопластического тела с одним структурным параметром (элемент d на рис. 2 отсутствует).

Процедура построения модели излагается в форме алгоритма, который можно использовать, например, при модификации метода дискретных элементов.

Рассмотрим уравнения, описывающие упругое поведение частиц (элемент c на рис. 2). В исходной модели каждая частица имеет четыре контакта с соседними частицами или с границей (вследствие двумерности задачи). Представляет интерес более общий случай, когда число контактов равно N (рис. 3). Пронумеруем частицы с помощью индексов i, j , точки контакта обозначим $A_{k,ij}$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Деформированное состояние \tilde{u} частицы (i, j) определяется N векторами смещений с компонентами

$$\tilde{u} = u_1(A_{1,ij}), u_2(A_{1,ij}), \dots, u_1(A_{N,ij}), u_2(A_{N,ij}). \quad (2.1)$$

Далее по возможности индексы i, j будем опускать. Существует только одно абсолютное требование к выбору меры деформации в определяющих уравнениях: она не должна зависеть от переноса и поворота частицы как жесткого целого. В работе [10] рассматривались различные меры деформаций, которые в пределе переходят в классические. Однако подобные меры могут использоваться и в более общем случае (рассматриваемом в данной работе), когда деформирование элементарных объемов не сводится к аффинному.

Допустим, что в состояние \tilde{u} (см. (2.1)) частица перешла следующим образом: из недеформированного исходного состояния она смещается на некоторый вектор $\{U_1, U_2\}$ и поворачивается на угол $\Omega \ll 1$. Затем каждая точка A_k получает смещение $\{u_1^0(A_k), u_2^0(A_k)\}$. В результате частица переходит в состояние \tilde{u} (см. (2.1)). Если ввести дополнительные условия, то в качестве мер деформации можно использовать компоненты смещений u_1^0, u_2^0 . Имеют место следующие соотношения:

$$u_1^0(A_k) = u_1(A_k) - U_1 + \Omega l_k \sin \alpha_k, \quad u_2^0(A_k) = u_2(A_k) - U_2 - \Omega l_k \cos \alpha_k. \quad (2.2)$$

Положим

$$\omega^0(A_k) = -u_1^0(A_k) \frac{\sin \alpha_k}{l_k} + u_2^0(A_k) \frac{\cos \alpha_k}{l_k}. \quad (2.3)$$

Введем следующие обозначения для средних величин функций $f(A_i)$, определенных в точках A_k :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(A_k) = \langle f(A_k) \rangle = \langle f \rangle.$$

Для того чтобы выделить из состояния \tilde{u} (2.1) жесткий поворот и смещение, примем следующие три условия:

$$\langle u_1^0 \rangle = 0, \quad \langle u_2^0 \rangle = 0, \quad \langle \omega^0 \rangle = 0. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2), (2.3) в (2.4), затем полученное соотношение — в (2.2), выразим $u_1^0(A_i), u_2^0(A_i)$ через компоненты (2.1). Любые независимые $2K - 3$ комбинации этих компонент дают $2K - 3$ меры деформаций элементарного объема. Данные меры определяются на первом шаге алгоритма построения модели среды со структурой. На втором шаге записывается выражение для удельной работы Π :

$$\Pi = \sum_{k=1}^N \mathbf{t}(A_k) \mathbf{u}(A_k), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{t}(A_k)$ — напряжение, равное вектору усилия, действующего на элементарный объем в точке A_k , отнесенному к длине $2l$.

Выразим $2K$ переменных (2.1) через три переменные U_1, U_2, Ω и $2K - 3$ переменные, имеющие смысл мер деформаций. Подставим полученные выражения в (2.5). В результате получаем линейную по указанным кинематическим переменным форму выражения для работы Π . Коэффициентами в данной форме являются определенные комбинации напряжений. Эти комбинации, за исключением тех, которые являются коэффициентами при U_1, U_2, Ω , следует использовать при выводе определяющих уравнений.

На третьем шаге алгоритма выводятся определяющие уравнения. Для упругих тел можно задать потенциал Π как функцию силовых или кинематических переменных. Задание потенциала равносильно заданию уравнений деформирования частицы. Ниже рассматривается вариант потенциала, рассмотренный в [8] и наиболее близкий к классическому потенциалу линейно-упругого тела.

В [8] предполагалось, что в точках контакта элементарных объемов напряжения и смещения непрерывны. Отмена последнего условия позволяет учесть пластичность, внутреннее трение и дилатансию. Таким образом, в точках контактов определены не один, а два вектора перемещений. Уравнения, учитывающие пластическую деформацию, связывают напряжения с разрывами смещений, т. е. моделируют работу элемента ab , приведенного на рис. 2. Вернемся к случаю, когда $K = 4$ (см. рис. 1).

Пусть

$$r_{1s} = \frac{u_s(C_{i+1,j}) - u_s(A_{ij})}{2l}, \quad s = 1, 2.$$

Точки $C_{i+1,j}$ и A_{ij} совпадают, но принадлежат разным частицам. Любую из этих точек можно рассматривать в качестве аргумента функции r_{1s} . Аналогично получаем

$$r_{2s} = \frac{u_s(D_{i,j+1}) - u_s(B_{ij})}{2l}.$$

На четвертом шаге построения модели записываются уравнения, связывающие разрывы смещений и напряжения. Например, в точке контакта A_{ij} действуют напряжения с компонентами t_{11}, t_{12} . В методе дискретных элементов разрывом именно этих компонент обусловлен разрыв смещений. Ниже рассматривается более общий случай, когда допускается также зависимость разрыва смещений от компонент t_{22}, t_{21} .

Аналогичное обобщение выполним для точек контакта B_{ij} . Таким образом, имеем четыре группы уравнений:

$$r_{ms} = r_{ms}(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{21}), \quad m = 1, 2, \quad s = 1, 2. \quad (2.6)$$

При решении задач, в которых допускается разгрузка, необходимо перейти к уравнениям в приращениях и учесть критерий разгрузки.

На следующем шаге записываются уравнения равновесия (ограничимся статическим случаем). В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} t_{11}(A_{ij}) - t_{11}(C_{ij}) + t_{21}(B_{ij}) - t_{21}(D_{ij}) &= 0, \\ t_{12}(A_{ij}) - t_{12}(C_{ij}) + t_{22}(B_{ij}) - t_{22}(D_{ij}) &= 0, \\ t_{12}(A_{ij}) + t_{12}(C_{ij}) - t_{21}(B_{ij}) - t_{21}(D_{ij}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{2l} [u_1(A_{ij}) - u_1(C_{ij})] &= \frac{t_{11}(A_{ij}) + t_{11}(C_{ij})}{2} - v \frac{t_{22}(B_{ij}) + t_{22}(D_{ij})}{2}, \\ \frac{E}{2l} [u_2(B_{ij}) - u_2(D_{ij})] &= \frac{t_{22}(B_{ij}) + t_{22}(D_{ij})}{2} - v \frac{t_{11}(A_{ij}) + t_{11}(C_{ij})}{2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{E}{2(1+v)} \frac{1}{2l} [u_2(A_{ij}) - u_2(C_{ij}) + u_1(B_{ij}) - u_1(D_{ij})] = \frac{1}{4} [t_{12}(A_{ij}) + t_{12}(C_{ij}) + t_{21}(B_{ij}) + t_{21}(D_{ij})];$$

$$\begin{aligned} \frac{u_1(A_{ij}) + u_1(C_{ij})}{2} - \frac{u_1(B_{ij}) + u_1(D_{ij})}{2} &= \frac{\eta}{l} [t_{11}(A_{ij}) - t_{11}(C_{ij}) - t_{21}(B_{ij}) + t_{21}(D_{ij})], \\ \frac{u_2(A_{ij}) + u_2(C_{ij})}{2} - \frac{u_2(B_{ij}) + u_2(D_{ij})}{2} &= \frac{\eta}{l} [t_{12}(A_{ij}) - t_{12}(C_{ij}) - t_{22}(B_{ij}) + t_{22}(D_{ij})]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.7) представляют собой уравнения равновесия, (2.8) — закон Гука, (2.9) — уравнения для локальных изгибов элементарных объемов. Все указанные уравнения записаны для фиксированной упругой частицы (i, j) .

Уравнения, описывающие взаимодействие частиц, включают условия непрерывности напряжений на контактах

$$t_{1s}(C_{i+1,j}) = t_{1s}(A_{ij}), \quad t_{2s}(D_{i,j+1}) = t_{2s}(B_{ij}) \quad (2.10)$$

и определяющие уравнения на контактах (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{u_s(C_{i+1,j}) - u_s(A_{ij})}{2l} &= r_{1s}(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{21}(A_{ij})), \\ \frac{u_s(D_{i,j+1}) - u_s(B_{ij})}{2l} &= r_{2s}(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{21}(B_{ij})). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, упругопластическая модель (элементы ab, c на рис. 2) сводится к замкнутой системе уравнений (2.7)–(2.11), являющейся конечно-разностной. Для численного решения краевых задач достаточно использовать эту систему. Однако для поиска точных решений и проведения аналитических исследований необходимо перейти к континуальным уравнениям.

3. Континуальные уравнения. На первый взгляд континуальная система является переопределенной, так как в конечно-разностной системе имеется четыре компоненты напряжений $t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{21}$ и только две компоненты вектора смещений u_1, u_2 . В то же время конечно-разностная система не является переопределенной. Определим число степеней свободы в алгебраической системе. Пусть деформируемая область имеет прямоугольную форму и содержит $n \times m$ элементов. Тогда общее число контактов на границах с внешними нагружающими телами равно $2(n + m)$. В каждой точке контакта определены векторы напряжения и смещения. Следовательно, число степеней свободы равно $8(n + m)$. Общее число контактов внутри области составляет $2nm - n - m$. В каждой точке контакта с учетом (2.10) определены две компоненты напряжения. Число степеней свободы равно $2(2nm - n - m)$. Вектор смещения в точке контакта разрывен, поэтому соответствующее число степеней свободы равно $4(2nm - n - m)$. Общее число степеней свободы составляет $12nm + 2(n + m)$.

Для каждой частицы имеют место $8nm$ уравнений: три уравнения равновесия и пять определяющих уравнений. Кроме того, имеется два уравнения на внутренних точках контакта (см. (2.6)). Таким образом, имеем $2(2nm - n - m)$ уравнений. На каждом граничном контакте должно быть задано два условия (либо на смещения, либо на напряжения, либо на их комбинации). Следовательно, имеется $4(n + m)$ граничных условий. Общее число уравнений и граничных условий равно $12nm + 2(n + m)$. Таким образом, число уравнений и граничных условий равно числу степеней свободы, т. е. система замкнута.

Перейдем к континуальной модели. Пусть некоторая функция f определена внутри частиц, на их границах, а значит, и в точках контакта частиц. Предположим, что существуют пределы

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(A_{ij}) - f(C_{ij})}{2l}, \quad \frac{\delta f}{\delta x_2} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(B_{ij}) - f(D_{ij})}{2l}.$$

Данными пределами характеризуются приращения функции при изменении аргумента строго внутри фиксированной частицы (i, j) . Взаимодействие соседних частиц определяется следующими пределами:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(C_{i+1,j}) - f(C_{ij})}{2l}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(D_{i,j+1}) - f(D_{ij})}{2l}. \quad (3.1)$$

Пределы (3.1) можно рассматривать как производные функции f по x_1 и x_2 . Более того, необходимо принять, что приращение функции f вдоль любого направления \mathbf{n} , в случае если точки, между которыми вычисляется приращение, не находятся внутри одной частицы, определяется величиной $\nabla f \cdot \mathbf{n}$. Из очевидного равенства

$$\frac{f(C_{i+1,j}) - f(C_{ij})}{2l} = \frac{f(A_{ij}) - f(C_{ij})}{2l} + \frac{f(C_{i+1,j}) - f(A_{ij})}{2l}$$

следует, что при $l \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\delta f}{\delta x_1} + r, \tag{3.2}$$

где r — предел скачка функции f , отнесенный к $2l$. (Предполагается, что он существует.) Аналогичное равенство выполняется для производной по x_2 . Если функция f в точке контакта непрерывна, то $r = 0$. Поэтому для компонент напряжений из (3.2) получаем

$$\frac{\delta t_{11}}{\delta x_1} = \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1}, \quad \frac{\delta t_{22}}{\delta x_2} = \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2}, \quad \frac{\delta t_{12}}{\delta x_1} = \frac{\partial t_{12}}{\partial x_1}, \quad \frac{\delta t_{21}}{\delta x_2} = \frac{\partial t_{21}}{\partial x_2}.$$

Кроме того, из третьего уравнения (2.7) следует, что при $l \rightarrow 0$ $t_{12} = t_{21}$.

Если перемещение в точке C_{ij} известно, то согласно (3.2) можно выполнить переход к точке $C_{i+1,j}$. Аналогично можно выполнить переход от точки D_{ij} к $D_{i,j+1}$. Однако выполнить переход от точки C_{ij} к точке $D_{i,j+1}$ невозможно, так как деформации самих частиц аффинными не являются. Это означает, что в континуальной модели должно быть не одно, а два гладких поля перемещений. Первое поле соответствует смещениям в точках типа A_{ij} , C_{ij} (для него сохраним прежнее обозначение (u_1, u_2)), а второе поле — смещениям в точках типа B_{ij} , D_{ij} (обозначим его через (w_1, w_2)). Для указанных перемещений соотношения типа (3.2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\delta u_1}{\delta x_1} + r_{11}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\delta u_2}{\delta x_1} + r_{12}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \frac{\delta w_1}{\delta x_2} + r_{21}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{\delta w_2}{\delta x_2} + r_{22}.$$

Перейдем от конечно-разностной системы (2.7)–(2.11) к системе континуальных уравнений

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} = 0; \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E} [t_{11} - \nu t_{22}] + r_{11}(t_{11}, t_{22}, t_{12}), \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{1}{E} [t_{22} - \nu t_{11}] + r_{22},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \frac{t_{12}}{\mu} + r_{12} + r_{21}, \tag{3.4}$$

$$u_1 - w_1 = 2\eta \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} \right), \quad u_2 - w_2 = 2\eta \left(\frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} \right).$$

Система замкнута относительно поля напряжений (t_{11}, t_{22}, t_{12}) и двух полей перемещений (u_1, u_2) , (w_1, w_2) . Последние два уравнения в (3.4) являются конечными относительно смещений. Их можно исключить. Какие неизвестные следует оставить? Наиболее простым является вариант, когда исключаются неизвестные u_2 и w_1 . Тогда первые два уравнения (3.4) не меняются, а последние три сводятся к одному уравнению вида

$$\frac{\partial w_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{t_{12}}{\mu} - 4\eta \Delta t_{12} + r_{12} + r_{21},$$

где Δ — оператор Лапласа.

Если ввести средние для частицы смещения:

$$U_1 = \frac{u_1 + w_1}{2}, \quad U_2 = \frac{u_2 + w_2}{2}, \quad (3.5)$$

то система (3.4) принимает симметричный вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{E} [t_{11} - \nu t_{22}] - \eta \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} \right) + r_{11}(t_{11}, t_{22}, t_{12}), \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{E} [t_{22} - \nu t_{11}] + \eta \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} \right) + r_{22}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} &= \frac{t_{12}}{\mu} + \eta \left[-\Delta t_{12} + \frac{\partial^2 (t_{11} + t_{22})}{\partial x_1 \partial x_2} \right] + r_{12} + r_{21}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При записи системы (3.6) соотношения (3.3) не использовались. Заметим также, что если разрывы смещений отсутствуют, т. е. $r_{11} = r_{22} = r_{12} = r_{21} = 0$, то уравнения переходят в уравнения для линейно-упругого тела с одним структурным параметром [8].

4. Модель среды, способной накапливать энергию внутренних самоуравновешенных напряжений. Введем в модель элемент d (см. рис. 2). Пусть поровая среда заполнена связующим, которое полагается линейно-упругим. В этом случае частица имеет восемь контактов: четыре с соседними частицами и четыре с поровой средой. Для данного случая $K = 8$ и поведение элементарного объема должно описываться $2K - 3 = 13$ определяющими уравнениями. Данная модель является громоздкой. Целесообразно сначала рассмотреть ее упрощенный вариант, в котором учитывается способность среды аккумулировать и высвобождать энергию. Будем полагать, что деформирование поровой среды определяется только полем средних смещений (3.5). Это поле является гладким, поэтому изгибными деформациями пор следует пренебречь. Будем пренебрегать также дополнительными деформациями частиц, которые возникают в результате их взаимодействия с поровой средой. Деформирование поровой среды целесообразно рассматривать в системе координат Oxy , повернутой на угол $\pi/4$ относительно исходной системы координат Ox_1x_2 (см. рис. 2). Компонентам смещений и напряжений в этих координатах соответствуют индексы x, y . Если $m = \rho/(l' + \rho)$ — параметр просветности (см. рис. 1), то для компонент деформаций поровой среды имеем

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{m} \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{m} \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right). \quad (4.1)$$

Для компонент напряжений внутри поры примем обозначения

$$p_{xx} = \frac{G_{xx}}{2\rho}, \quad p_{yy} = \frac{G_{yy}}{2\rho}, \quad p_{xy} = p_{yx} = \frac{G_{xy}}{2\rho} = \frac{G_{yx}}{2\rho},$$

где

$$G_{xx} \mathbf{e}_x + G_{xy} \mathbf{e}_y = \mathbf{G}(A'_{ij}), \quad G_{yx} \mathbf{e}_x + G_{yy} \mathbf{e}_y = \mathbf{G}(B'_{ij}),$$

\mathbf{G} — сила, действующая на частицу (i, j) со стороны поровой среды; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — единичные орты.

Для поровой среды примем закон Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_{\Pi}} (p_{xx} - \nu_{\Pi} p_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_{\Pi}} (p_{yy} - \nu_{\Pi} p_{xx}), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu_{\Pi}} p_{xy}, \\ \mu_{\Pi} &= \frac{E_{\Pi}}{2(1 + \nu_{\Pi})}, \quad E_{\Pi} = \text{const}, \quad \nu_{\Pi} = \text{const}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где E_{Π} — модуль Юнга для поровой среды.

Запишем уравнение равновесия для частицы (i, j)

$$[\mathbf{T}(A_{ij}) + \mathbf{T}(C_{ij})] + [\mathbf{T}(B_{ij}) + \mathbf{T}(D_{ij})] + \\ + [\mathbf{G}(A'_{ij}) + \mathbf{G}(C'_{ij})] + [\mathbf{G}(B'_{ij}) + \mathbf{G}(D'_{ij})] + (2l)^2 \mathbf{X} = 0, \quad (4.3)$$

где $4l^2 \mathbf{X}$ — объемная сила.

Разделим обе части равенства (4.3) на $(2l)^2$ и перейдем к пределу $l \rightarrow 0$. Объединяя уравнения равновесия и (4.2), (4.1), получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [t_{11} + 2mp_{11}] + \frac{\partial}{\partial x_2} [t_{12} + 2mp_{12}] + X_1 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} [t_{12} + 2mp_{12}] + \frac{\partial}{\partial x_2} [t_{22} + 2mp_{22}] + X_2 = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{m}{E_{\Pi}} [p_{11} - \nu_{\Pi} p_{22}], \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{m}{E_{\Pi}} [p_{22} - \nu_{\Pi} p_{11}], \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = m \frac{p_{12}}{\mu_{\Pi}}.$$

При выводе системы уравнений (4.4) учитывалось, что при $l \rightarrow 0$

$$\frac{T_{11}(A_{ij}) - T_{11}(C_{ij})}{(2l)^2} = \frac{t_{11}(A_{ij}) - t_{11}(C_{ij})}{2l} \rightarrow \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1}, \\ \frac{G_{xx}(A'_{ij}) - G_{xx}(C'_{ij})}{(2l)^2} = \frac{2\rho(2l' + 2\rho)}{(2l)^2} \frac{p_{xx}(A'_{ij}) - p_{xx}(C'_{ij})}{2l' + 2\rho} \rightarrow 2m \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}, \quad \dots$$

Кроме того, был выполнен переход к системе координат Ox_1x_2 .

Уравнения (4.4) совместно с (3.6) образуют замкнутую систему восьми уравнений относительно следующих восьми неизвестных: $U_1, U_2, t_{11}, t_{22}, t_{12}, p_{11}, p_{22}, p_{12}$. Данная система удовлетворяет условиям согласованности: в различных предельных случаях она переходит в классические уравнения упругости, уравнения упругой [8] или упругопластической среды с линейным структурным параметром и др. Нелинейному случаю соответствует система, в которой указанные выше искомые переменные заменяются на их приращения. При этом параметры среды заменяются на функционалы, определенные на функциях, зависящих от истории ее деформирования. Кроме того, параметры среды зависят от состояния (активного нагружения или разгрузки), в котором находится тело.

Рассмотрим случай, когда частицы являются абсолютно жесткими, а деформации тела определяются только разрывами смещений в точках контакта частиц (включая наложение частиц). Этот случай лежит в основе метода дискретных элементов [11]. Как отмечалось выше, в данном методе предполагается, что разрыв смещений в точке контакта определяется только напряжениями, действующими в той же точке контакта, например:

$$r_{11} = r_{11}(t_{11}), \quad r_{12} = r_{12}(t_{12}), \quad r_{21} = r_{21}(t_{21}), \quad r_{22} = r_{22}(t_{22}). \quad (4.5)$$

Метод дискретных элементов не допускает перехода к модели линейно-упругого тела, однако эта модель используется в большинстве геомеханических расчетов. Поэтому метод дискретных элементов должен быть модифицирован таким образом, чтобы он допускал переход к модели линейно-упругого тела. Например, вместо (4.5) можно принять

$$r_{11} = \frac{1}{E_k} (t_{11} - \nu_k t_{22}), \quad r_{22} = \frac{1}{E_k} (t_{22} - \nu_k t_{11}), \quad r_{21} = r_{12} = \frac{1}{2\mu_k} t_{12}, \quad \mu_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)},$$

где $E_k = \text{const}$; $\nu_k = \text{const}$.

Заключение. Таким образом, построенная в работе модель учитывает микроструктуру среды, ее упругопластические свойства, а также способность запасать энергию внутренних самоуравновешенных напряжений. Кроме того, от данной модели можно перейти к моделям, которые можно использовать в различных модификациях метода дискретных элементов. Наибольший интерес представляют модификации, допускающие переход к континуальным моделям линейно-упругих тел, а также к моделям с одним структурным параметром.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ерофеев В. И., Павлов И. С.** Параметрическая идентификация кристаллов, имеющих кубическую решетку, с отрицательными коэффициентами Пуассона // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 6. С. 94–101.
2. **Седики М., Ягутян А.** Исследование на основе уравнений теории упругости динамической неустойчивости колебаний углеродных нанотрубок, расположенных вблизи графитовых листов // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 1. С. 105–117.
3. **Павлов И. С., Лазарев В. А.** Нелинейные упругие волны в двумерной нанокристаллической среде // Вестн. науч.-технол. развития. 2008. № 4. С. 45–53.
4. **Павлов И. С.** Упругие волны в двумерной зернистой среде // Пробл. прочности и пластичности. 2005. Вып. 67. С. 119–131.
5. **Павлов И. С., Потапов А. И.** Двумерная модель зернистой среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 110–121.
6. **Смолин И. Ю.** Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // Мат. моделирование систем и процессов. 2006. № 14. С. 189–205.
7. **Лурье С. А., Соляев Ю. О.** Метод идентификации параметров градиентных моделей неоднородных структур с использованием дискретно-атомистического моделирования // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2014. № 3. С. 8–112.
8. **Ревуженко А. Ф.** Об одном варианте линейной теории упругости со структурным параметром // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 5. С. 45–52.
9. **Трусов П. В.** Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого твердого тела (в порядке обсуждения) // Мат. моделирование систем и процессов. 2009. № 17. С. 85–95.
10. **Ревуженко А. Ф.** Нелокальные меры конечных деформаций // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 6. С. 98–105.
11. **Rapaport D. C.** The art of molecular dynamics simulation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.

Поступила в редакцию 1/VI 2017 г.