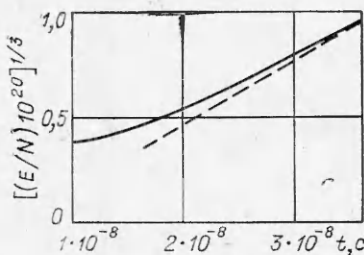
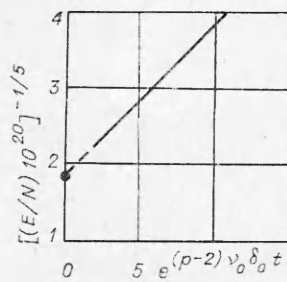


Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

секает ось ординат в точке, определяемой выражением (22). Как видно из фиг. 3, численное решение также выходит на прямую, точка пересечения (•) которой с осью ординат совпадает с теоретическим решением (○).

Таким образом, исследовано однородное развитие ганновской неустойчивости в газовой плазме для условий, когда ее развитие лимитируется установлением электронной функции распределения. Найдены приближенные автомодельные решения, к которым стремится полное решение, полученное численно. Когда частота неупругих соударений не зависит от энергии электронов ( $p + q = 0$ ), находится точное автомодельное решение, к которому также стремится полное решение, полученное численно.

Авторы выражают благодарность Н. Л. Александрову за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 13 IV 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лопанцева Г. ., Паль А. Ф. и др. Неустойчивость несамостоятельного разряда в смесях аргона с молекулярными газами.— Физика плазмы, 1979, т. 5, № 6.
2. Владимиров В. В., Волков А. Ф., Мейлихов Е. З. Плазма полупроводников. М.: Атомиздат, 1979.
3. Александров Н. Л., Напартович А. П., Старостин А. Н. Уравнения переноса в неравновесной слабоионизированной плазме.— Физика плазмы, 1980, т. 6, № 5.
4. Напартович А. П., Старостин А. Н. Механизмы неустойчивости тлеющего разряда повышенного давления.— В кн.: Химия плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1979.
5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Rockwood S. D. Elastic and inelastic cross sections for electron Hg scattering from Hg transport data.— Phys. Rev. A, 1973, vol. 8, N 5.

УДК 533,951

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИОНИЗУЮЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. А. Кудряшов  
(Москва)

Рассматривается распространение ионизирующей ударной волны из точечного источника в однородное магнитное поле. Получено приближенное решение уравнения, которое описывает поверхность ударной волны. Распространение ионизирующей ударной волны в магнитном поле встречается в ряде областей физики: в астрофизике [1, 2], при лазерном термоядерном синтезе [3], при проведении активных экспериментов в космосе [4, 5] и т. д. В [6] получено автомодельное решение для поверхности фронта ударной волны, распространяющейся из точечного источника в атмосфере. Влияние неоднородности атмосферы при движении ударной волны учтено в [7, 8]. Без учета влияния магнитного поля задача о распространении ионизирующей ударной волны в газе не отличается от рассмотренных в [6—9].

В данной работе учитывается влияние однородного магнитного поля на распространение сильной ударной волны из точечного источника.

Известно [10], что полная ионизация воздуха происходит при числах Маха, равных 14—20, т. е. при  $p_2/p_1 \simeq 200-500$  ( $p_1$  — давление нейтрального газа перед фронтом ударной волны,  $p_2$  — давление газа за фронтом). На высоте  $\sim 3 \cdot 10^5$  м давление невозмущенного воздуха  $p_1 \sim 10^{-5}$  Н/м<sup>2</sup>, поэтому ионизация в воздухе происходит при  $p_2 \sim 10^{-3}$  Н/м<sup>2</sup>. Максимальное «магнитное» давление на ионизованный газ из-за магнитного поля Земли  $H_0 = 0,5 \text{ Э} \sim 10^{-3}$  Н/м<sup>2</sup>. Из приведенных оценок следует, что на высоте  $\sim 3 \cdot 10^5$  м необходимо учитывать влияние магнитного поля на распространение ионизирующей ударной волны. Поскольку длина свободного пробега заряженных частиц  $\sim 10$  м, ларморовский радиус ионов  $\sim 10$  м, то приближение гидродинамики для радиуса фронта ударной волны  $\sim 10^3$  м и выше выполняется. Высота стандартной атмосферы на высоте  $\sim 3 \cdot 10^5$  м равна  $\sim 1,5 \cdot 10^4$  м [10], поэтому для радиуса фронта ударной волны  $\sim 10^3$  м влиянием неоднородности атмосферы можно пренебречь.

Возмущение магнитного поля сильной сферической ударной волной рассматривалось в [11]. В [12] показано, что магнитное поле сравнительно медленно проникает за фронт ударной волны. Для плазмы с бесконечно большой проводимостью магнитное поле за фронтом пренебрежимо мало [13, 14].

Учитывая сказанное, условия Ренкина — Гюгонио, связывающие параметры газа по обеим сторонам разрыва, запишем в виде [15, 16]

$$(1) \quad D^2 = \rho_2 \rho_1^{-1} (p_2 - p_1 - H^2/8\pi) (\rho_2 - \rho_1)^{-1};$$

$$(2) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 0,5 (\rho_1 - \rho_2) \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} (p_2 + p_1 + H^2/8\pi) = 0,$$

где  $D$  — скорость ударной волны;  $p_1$  и  $p_2$  — гидродинамические давления;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — удельные плотности;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — удельные внутренние энергии газа перед и за фронтом ударной волны. В (1), (2) пренебрегается энергией, идущей на ионизацию в газе.

Используя для плазмы уравнение состояния идеального газа и пренебрегая гидродинамическим давлением перед фронтом ударной волны, находим связь  $\rho_2$  и  $\rho_1$ :

$$(3) \quad \rho_2 = \rho_1 [1 + 2(\gamma - 1)^{-1} (1 + H^2/(8\pi p_2))^{-1}].$$

Выражение для скорости ударной волны в магнитном поле запишется в виде

$$(4) \quad D^2 = 0,5 p_2 (\gamma - 1) \rho_1^{-1} [1 - H^4/(8\pi p_2)^2] [1 + 2(\gamma - 1)^{-1} \times \\ \times (1 + H^2/(8\pi p_2))^{-1}].$$

В частном случае при  $H = 0$  из (4) получаем значение для скорости сильной ударной волны в газе [5, 10]  $D^2 = 0,5 p_2 (1 + \gamma) \rho_1^{-1}$ .

В случае, когда отношение «магнитного» давления поля к гидродинамическому на фронте мало ( $\beta \gg 1$ ,  $\beta = 8\pi p_2 H^{-2}$ ), выражение (4) упрощается:

$$(5) \quad D^2 \simeq 0,5 p_2 (1 + \gamma) \rho_1^{-1} - H^2 (8\pi \rho_1)^{-1}.$$

Следуя [7, 17], будем считать, что вся масса ионизованного газа движется вместе с фронтом ударной волны. Обозначим уравнение поверхности фронта ударной волны  $f(r, \theta, t) = 0$ . Тогда зависимость для скорости ударной волны имеет вид

$$(6) \quad D = - \frac{\partial f}{\partial t} |\nabla f|^{-1}.$$

Давление газа  $p_2$  представим формулой [7]

$$(7) \quad p_2 = \lambda E_0 (\gamma - 1) / V(t),$$

где  $E_0$  — полная энергия, выделенная в точечном источнике;  $V(t)$  — объем ионизованного газа, занятый волной;  $\lambda = \lambda(\gamma)$  — коэффициент, кото-

рый характеризует отношение плотности энергии около фронта ударной волны к средней плотности по объему [7]. Здесь, как и в [7], используется допущение о постоянстве  $\lambda$  по всей поверхности.

Рассмотрим случай малого «магнитного» давления, тогда уравнение (6) для поверхности ударной волны с учетом (5) запишется в виде

$$(8) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = (\nabla f)^2 [0,5p_2(1 + \gamma)\rho_1^{-1} - H^2(8\pi\rho_1)^{-1}].$$

Кроме того, предположим [8], что уравнение фронта ударной волны разрешимо в сферической системе координат относительно радиуса фронта  $r = r(\theta, t)$ . Уравнение (8) с учетом (7) имеет вид

$$(9) \quad 2m\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = (1 - \alpha h^2)\left[1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right],$$

где  $m(t) = \rho_1 V(t)(\gamma^2 - 1)^{-1}(\lambda E_0)^{-1}$ ;  $h^2 = \tilde{H}^2 \tilde{H}_0^{-2}$ ;  $\alpha(t) = H_0^2 m (4\pi\rho_1)^{-1}$ ;  $H_0$  — напряженность магнитного поля на бесконечности. При  $\beta \gg 1$  имеем  $\alpha \ll 1$ .

Начальным условием для уравнения (9) является уравнение поверхности, ограничивающей объем волны в начальный момент времени.

Магнитное поле вне объема, по которому прошла ударная волна, определяется из уравнений магнитостатики с граничными условиями на движущейся поверхности раздела ионизованного газа и магнитного поля [11, 12] и постоянной напряженностью магнитного поля на бесконечности. Поскольку отношение давления магнитного поля к гидродинамическому мало ( $\alpha \ll 1$ ), решение уравнения (9) будем искать в виде разложения по степеням малого параметра

$$r(\theta, t) = r_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k r_k(\theta, t).$$

Уравнения для вычисления  $r_0(t)$ ,  $r_1(\theta, t)$  и т. д. определяются из (9)

$$(10) \quad \partial r_0 / \partial t = (2m)^{-1/2};$$

$$(11) \quad \partial r_1 / \partial t = -0,5h^2(2m)^{-1/2}.$$

Нулевое приближение при  $\alpha h^2 = 0$  не зависит от угла

$$r_0(t) = At^{2/5}, \quad A = 0,93(E_0\rho_1^{-1})^{1/5}$$

и совпадает с решением автомодельной задачи о распространении ударной волны в атмосфере [6].

Подставив решение уравнений магнитостатики для напряженности магнитного поля [15, 18]  $h = (1 + 0,5r_0^3 r^{-3}) \sin \theta$  при  $r = r_0(t)$  в (11), определим

$$r_1(\theta, t) = -(9/8)At^{2/5} \sin^2 \theta.$$

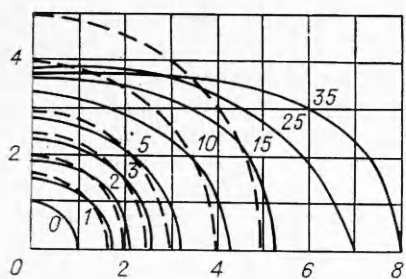
С точностью до второго приближения решение уравнения (9) для поверхности ионизирующей ударной волны, распространяющейся в однородном осесимметричном магнитном поле, имеет вид

$$(12) \quad r(\theta, t) = At^{2/5} [1 - (3/8)H_0^2 A^3 t^{6/5} (\lambda E_0)^{-1} (\gamma^2 - 1)^{-1} \sin^2 \theta].$$

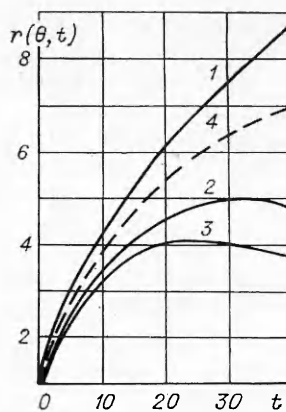
Из (12) видно, что в фиксированный момент времени поверхность фронта ударной волны во втором приближении является эллипсоидом.

В случае, когда отношение «магнитного» давления к гидродинамическому не мало, уравнение (6) в сферической системе координат с учетом выражения (4) для  $D^2$  решалось численно методом конечных разностей.

С этой целью дифференциальные операторы в (6) заменялись разностными. Для производной по углу  $r^{-1}\partial r/\partial \theta$  использовались центрально-симметричные разности, так что точность расчетов по координате имеет порядок  $O(h_\theta^2)$  ( $h_\theta$  — шаг по углу), по времени  $O(\tau)$  ( $\tau$  — шаг по времени).



Ф и г. 1



Ф и г. 2

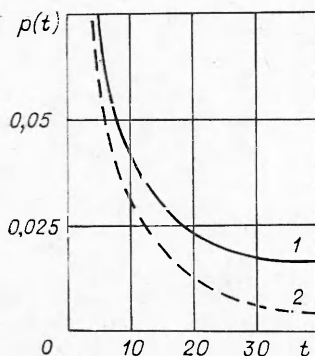
Численное решение задачи проводилось при следующих параметрах: радиус фронта ударной волны в начальный момент времени принимался равным  $r(t = 0) = 1$ ; отношение «магнитного» давления к гидродинамическому в начальный момент  $\beta = H_0^2 V (\gamma - 1) (8\pi \lambda E_0)^{-1} = 10^{-1}$ ; начальная плотность энергии  $C = (\gamma - 1)(\lambda E_0)^{1/2} (2\rho_1 V)^{-1/2} = 1$ . Заметим, что указанные значения условных параметров не ограничивают общности решения.

Расчеты проводились для угла  $\theta$ , который изменялся в интервале от 0 до  $\pi/2$  с шагом  $h_\theta = \pi/360$ . Точность вычислений при проведении расчетов контролировалась изменением шагов по углу и времени. Под влиянием магнитного поля происходит деформация фронта ударной волны, поэтому при численном решении учитывалось изменение угла по нормали к поверхности по сравнению со сферически-симметричным случаем на  $\varphi = \arctg(r^{-1}\partial r/\partial\theta)$ .

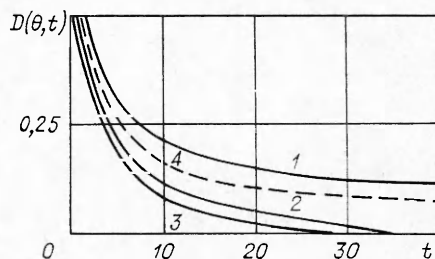
На фиг. 1—4 представлены некоторые результаты численного решения задачи о распространении ударной волны из точечного источника в однородном магнитном поле.

На фиг. 1 показаны зависимости  $r(\theta, t)$  для различных моментов времени. Штриховые кривые соответствуют распространению ионизирующей ударной волны в моменты времени: 1, 2, 3, 5, 10, 15 без магнитного поля. Сплошные кривые описывают поверхность фронта ударной волны при  $t = 0, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 25, 35$  с учетом влияния магнитного поля; видно, что при  $t \approx 25$  происходит остановка фронта в направлении, перпендикулярном напряженности невозмущенного магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ).

Зависимость  $r(\theta, t)$  от времени при  $\theta = 0$  (кривая 1),  $\theta = \pi/4$  (кривая 2),  $\theta = \pi/2$  (кривая 3) представлена на фиг. 2. Для сравнения на фиг. 2 дается зависимость  $r(t)$  (кривая 4) при распространении сферически-симметричной ударной волны [6]. В направлении  $\theta = 0$  при фиксированном  $t$  ионизирующая ударная волна проходит большее расстояние, чем в сфери-



Ф и г. 3



Ф и г. 4

чески-симметричном случае. Это объясняется тем, что из-за деформации поверхности фронта ударной волны пондеромоторными силами объем ионизованного газа в фиксированный момент времени меньше, чем в сферически-симметричном случае, и давление газа на фронте больше.

На фиг. 3 изображены зависимости от времени давления газа на фронте ионизирующей ударной волны с учетом (кривая 1) и без учета (кривая 2) влияния магнитного поля.

Фиг. 4 иллюстрирует зависимость от времени скорости фронта ударной волны для различных углов:  $\theta = 0$  (кривая 1),  $\theta = \pi/4$  (кривая 2),  $\theta = \pi/2$  (кривая 3). Кривая 4 соответствует сферически-симметричному случаю. В некоторые моменты времени ( $t = 25$  при  $\theta = \pi/2$ ,  $t = 35$  при  $\theta = \pi/4$  и т. д.) скорость фронта волны становится равной нулю. В предположении справедливости условий на разрыве расчеты проводились и для случая, когда «магнитное» давление превышает давление ионизованного газа на фронте. Из-за больших пондеромоторных сил, даже при  $p_2 \gg p_1$ , скорость фронта волны в направлении, перпендикулярном магнитному полю, может быть отрицательной. На поздней стадии распространения волны (при  $p_2 \sim p_1$ ), по-видимому, имеют место пульсации «диска» ионизованного газа.

Из фиг. 4 видно, что скорость фронта ионизирующей ударной волны для  $\theta = 0$  при учете магнитного поля проходит выше, чем в сферически-симметричном случае.

Из решения (12) не представляется возможным определить момент остановки фронта в направлении  $\theta = \pi/2$ . Из соображений о размерности, однако, следует, что соответствующий момент времени определяется выражением  $t_0 = kE_0^{1/3} \rho_1^{1/3} H_0^{-5/3}$ . Численные расчеты показали, что  $k \simeq 40$ .

В заключение остановимся на соответствии рассматриваемой модели реальному физическому процессу. В действительности давление газа на фронте ударной волны зависит от угла, что приводит к уменьшению влияния магнитного поля на характеристики ионизирующей волны.

Автор благодарит С. З. Дунина, Л. П. Горбачева, Е. Е. Ловецкого и В. С. Фетисова за полезные обсуждения работы, а также А. П. Чеплакова за помощь при проведении расчетов.

Поступила 15 III 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горбацкий В. Г. Космическая газодинамика. М.: Наука, 1977.
2. Баранов В. Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977.
3. Физика высоких плотностей энергии. М.: Мир, 1974.
4. Goldate S. A. The phenomenology of the mass motion of a high altitude nuclear explosion. — J. Geophys. Research, 1965, vol. 70, N 13.
5. Бахрах С. М., Губков Е. В. и др. Разлет плазменного облака в однородном магнитном поле. — ПМТФ, 1974, № 4.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
7. Компанец А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. — ДАН СССР, 1960, т. 130, вып. 5.
8. Андрианкин Э. И., Коган А. М. и др. Распространение сильного взрыва в неоднородной атмосфере. — ПМТФ, 1962, № 6.
9. Чу К., Гросс Р. Ударные волны в физике плазмы. — В кн.: Физика высокотемпературной плазмы. М.: Мир, 1972.
10. Зельдович Я. В., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
11. Коробейников В. П. О взаимодействии ударных волн в идеально проводящем газе со слабыми магнитными полями. — ПМТФ, 1964, № 4.
12. Горбачев Л. П., Савченко Ю. Н. О возмущении слабого магнитного поля сильной сферической ударной волной с учетом конечной проводимости газа. — Магнит. гидродинамика, 1970, № 4.
13. Райзер Ю. П. О торможении и превращениях энергии плазмы, расширяющейся в пустом пространстве, в котором имеется магнитное поле. — ПМТФ, 1963, № 6.
14. Головизнин В. М., Коршия Т. К., Любимов Б. Я., Фаворский А. П. Численное исследование разлета плазмы в магнитном поле. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1978, № 61.

15. Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957.  
 16. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. М.: Атомиздат, 1968.  
 17. Черный Г. Г. Адиабатические движения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности. — Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 3.  
 18. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.

{УДК 533.924

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИЭЛЕКТРОДНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГАЗОВ

*Н. Н. Баранов, М. С. Бенилов, Г. Г. Бочкарев,  
 В. И. Ковбасюк, Г. А. Любимов*  
 (Москва)

Гидродинамическая задача об определении электрических характеристик приэлектродной области в химически равновесной слабоионизованной плазме была сформулирована в [1] и неоднократно рассматривалась впоследствии. Данная работа посвящена численному решению указанной задачи. Заметим, что, помимо самостоятельного интереса, такое решение представляет интерес также для оценки степени точности различных приближенных подходов.

Рассматриваемая задача является краевой задачей для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; для условий, представляющих практический интерес, эта система содержит два малых параметра при старших производных, а в случае относительно низкой температуры электрода — еще и третий малый параметр в показателе экспоненты. При непосредственном численном решении задач такого типа возникают определенные трудности, поэтому в работах [2—4], посвященных численному решению этой задачи, делались те или иные упрощающие предположения. Так, в [2, 3] приэлектродный слой подразделяется на слой объемного заряда и квазинейтральную область, решение задачи ищется отдельно в каждой области с последующей сшивкой. При этом в слое объемного заряда не учитываются ионизация нейтральных атомов и рекомбинация заряженных частиц, что не позволяет правильно описывать поведение вольт-амперных характеристик приэлектродной области плазмы молекулярных газов при больших значениях плотности тока на электрод [5]. В [4] не учитывались некоторые существенные члены системы определяющих уравнений, в [2—4] задача решалась методом стрельбы.

В данной работе для получения непосредственного численного решения рассматриваемой задачи развит эффективный итерационный алгоритм, основанный на методе прогонки. Приведены результаты расчетов для случая плазмы продуктов сгорания с присадкой калия и широкого диапазона значений температуры электрода, дано подробное сравнение с результатами расчетов по аналитическим формулам [5], полученным методом сращиваемых асимптотических разложений, а также с экспериментальными данными.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим многокомпонентную слабоионизованную плазму молекулярных газов, содержащую нейтральные компоненты, положительные однозарядные ионы атомов одного из нейтральных компонентов (легкоионизирующейся присадки) и электроны. Плазма граничит с плоским идеально каталитическим и неэмиттирующим электродом. Ионизация атомов присадки может происходить при столкновениях как с электронами, так и с молекулами одного из нейтральных компонентов; в качестве третьего тела в ион-электронной рекомбинации могут участвовать электроны или молекулы указанного нейтрального компонента. Предполагается, что давление плазмы и молярные концентрации нейтральных компонентов постоянны, конвективный перенос заряженных частиц не учитывается. Температура плазмы считается заданной функцией координаты  $y$  (ось  $y$  направлена по нормали от электрода).

В безразмерных переменных имеем следующую нелинейную краевую задачу [1, 5]:

$$(1.1) \quad I_i = -a(z_i' - \theta^{-1}z_i E);$$

$$(1.2) \quad I_e = -a(z_e' + \theta^{-1}z_e E);$$

$$(1.3) \quad \chi I_i' = \frac{2b}{1+\beta} (1 + cz_e)(r - z_i z_e);$$