

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАВНОМЕРНО ЗАВИХРЕННЫХ ПОТОКОВ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучается задача о распаде произвольного разрыва (задача Римана) для системы уравнений, описывающей в длинноволновом приближении вихревые плоскопараллельные течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Рассмотрен класс частных решений, соответствующих течениям с кусочно-постоянной завихренностью. В этом классе при определенных ограничениях на начальные данные задачи доказано существование автомодельных решений, описывающих распространение сильных и слабых разрывов и простых волн, возникающих в результате нелинейного взаимодействия заданных вихревых потоков. Предложен алгоритм для определения типа возникающих волновых конфигураций по начальным данным, обобщающий известные подходы теории одномерных движений газа на случай существенно двумерных течений.

**1. Постановка задачи.** Система интегродифференциальных уравнений, описывающая в приближении теории длинных волн течения завихренной жидкости со свободной границей, изучалась в [1–4]. Основное внимание уделялось построению точных решений — стационарных течений, простых волн и др. В [5, 6] показано, что при соответствующих обобщениях понятий характеристики и гиперболичности системы возникают новые возможности для теоретического анализа волновых движений, основанные на обобщении методов теории нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений. При этом интегродифференциальные модели существенно отличаются от дифференциальных тем, что спектры скоростей распространения характеристик уже не обязательно являются чисто дискретными, но могут содержать непрерывные части (отрезки). В связи с этим обстоятельством аналогии с изученными случаями ограничены и многие элементы математического аппарата должны создаваться вновь. В [7, 8] предложена и исследована система соотношений на сильных разрывах, обобщающая классическую модель гидравлического прыжка теории мелкой воды, доказано существование и проанализированы основные свойства простых волн, отвечающих изолированным значениям характеристического спектра.

Возникает вопрос, какие типы волн связаны с движениями общего характера. Очевидно, что волны, отвечающие только дискретной части характеристического спектра системы уравнений движения, не позволят сконструировать течение, возникающее при произвольном разрыве начальных данных. Ответ на этот вопрос может быть получен при исследовании постановки задачи о распаде произвольного разрыва для интегродифференциальной системы.

В данной работе указанная постановка анализируется в рамках класса точных решений общей системы, описывающих течения жидкости с кусочно-постоянной завихренностью. Выбор этого класса объясняется, во-первых, стремлением упростить задачу, а во-вторых, свойствами сохранения завихренности при пересечении фронтов сильных разрывов и зон простых волн [7, 8].

Система уравнений, описывающая распространение длинных волн в слое жидкости

$0 \leq y \leq h(x, t)$  (уравнение  $y = h(x, t)$  задает свободную границу), имеет вид [1, 5]

$$u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \quad u_x + v_y = 0, \quad h_t + \left( \int_0^h u dy \right)_x = 0, \quad v(x, 0, t) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x, y$  — декартовы координаты на плоскости;  $t$  — время;  $u, v$  — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат;  $g$  — ускорение свободного падения. Последнее соотношение (1.1) задает граничное условие непротекания на дне.

Как показано в [5, 6], систему (1.1), преобразованную к эйлерово-лагранжевым координатам, можно рассматривать как интегриродифференциальную гиперболическую систему уравнений, имеющую дискретный и непрерывный спектры характеристических скоростей. Для дальнейшего удобно формулировать условия на характеристиках в терминах эйлеровых переменных. Соответствующие формулы получаются простыми преобразованиями формул, приведенных в [5, 6]. Характеристические кривые  $x = x(t)$  системы уравнений (1.1) определяются дифференциальными уравнениями  $dx/dt = k_i(x, t)$ , где  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — корни характеристического уравнения

$$F(k) = g \int_0^h \frac{dy}{(u - k)^2} - i = 0. \quad (1.2)$$

Эти характеристики отвечают дискретной части спектра характеристических скоростей. Вдоль характеристик сохраняются инварианты Римана

$$r_i = k_i - g \int_0^h \frac{dy}{u - k_i}, \quad r_{it} + k_i r_{ix} = 0. \quad (1.3)$$

Непрерывный спектр характеристических скоростей системы (1.1) заполняют интервалы изменения функции  $u$  при фиксированных  $x, t$ . Для того чтобы найти характеристику, отвечающую непрерывному спектру, нужно определить функцию  $y(x, \lambda, t)$  как решение задачи

$$y_t(x, \lambda, t) + u(x, y(x, \lambda, t), t) y_x(x, y(x, \lambda, t), t) = v(x, y(x, \lambda, t), t), \quad y(x, \lambda, 0) = y_0(x, \lambda),$$

а затем проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение  $dx/dt = k_{(\lambda)}(x, t)$ , где  $k_{(\lambda)}(x, t) = u(x, y(x, \lambda, t), t)$  ( $\lambda$  — параметр, «нумерующий» характеристики). Если  $y_0(x, \lambda)$  выбрана так, что при варьировании параметра  $\lambda$  функция  $y(x, \lambda, t)$  принимает все значения от 0 до  $h(x, t)$ , то для каждой пары значений  $x, t$  определен непрерывный набор характеристических скоростей. Вдоль каждой из характеристик непрерывного спектра сохраняются два инварианта Римана [5]. Если ввести обозначение  $\omega = u_y$  (в модели длинных волн эта величина определяет завихренность), то  $\omega(x, y(x, \lambda, t), t)$  сохраняется вдоль характеристики  $dx/dt = k_{(\lambda)}(x, t)$  ( $\lambda$  фиксировано).

Система уравнений (1.1) допускает частные решения вида  $u = u(y), v = 0, h = \text{const}$ , соответствующие стационарным сдвиговым течениям в слое с горизонтальной свободной границей. Естественным обобщением постановки задачи Римана в случае уравнений (1.1) будет задача Коши

$$(u, h) \Big|_{t=0} = \begin{cases} (u_1(y), h_1), & (x > 0, \quad 0 < y < h_1), \\ (u_2(y), h_2), & (x < 0, \quad 0 < y < h_2), \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $u_i(y)$  — заданные функции;  $h_i$  — заданные постоянные (функция  $v$  однозначно определяется по известным  $u, h$  в силу (1.1)). Решение задачи (1.4) описывает нестационарные

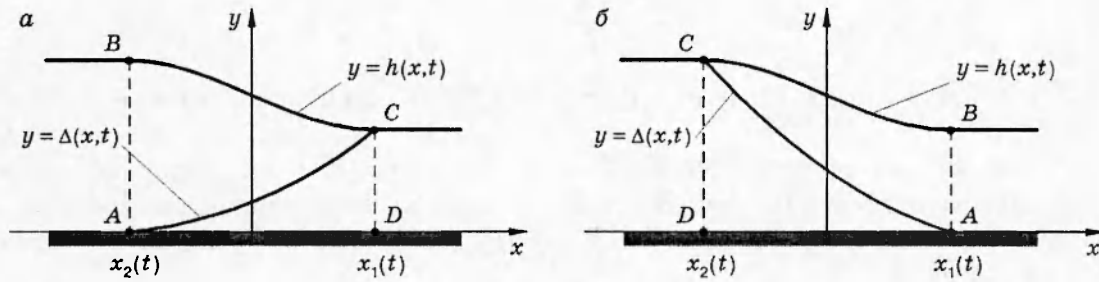


Рис. 1

волновые процессы, возникающие при взаимодействии заданных стационарных сдвиговых потоков. Постановка (1.4) моделирует разрыв начальных данных, который мог возникнуть в результате нелинейной эволюции при  $t < 0$  гладкого решения системы уравнений (1.1). В настоящей работе будут рассмотрены специальные начальные данные:  $u_1(y) = \omega_1 y + u_{01}$ ,  $u_2(y) = \omega_2 y + u_{02}$  ( $\omega_i$  и  $u_{0i}$  — постоянные), соответствующие взаимодействию потоков с постоянными завихренностями. В силу инвариантности уравнений и граничных условий относительно равномерного растяжения переменных  $x$  и  $t$  решение задачи (1.4) будем искать в классе автомодельных решений:  $u = U(x/t, y)$ ,  $h = H(x/t)$ ,  $v = t^{-1}V(x/t, y)$ .

Для дальнейшего понадобятся некоторые свойства системы уравнений, описывающей двухслойное течение с постоянной завихренностью в каждом из слоев. Пусть слой жидкости  $0 \leq y \leq h(x, t)$  разделен границей  $y = \Delta(x, t)$  на два подслоя (рис. 1). При  $0 \leq y \leq \Delta(x, t)$  горизонтальная компонента скорости жидкости имеет вид  $u = \Omega_0 y + u_0(x, t)$ , а при  $\Delta(x, t) \leq y \leq h(x, t)$  — следующий вид:  $u = \Omega(y - h) + u_1(x, t)$  ( $\Omega_0$  и  $\Omega$  — заданные постоянные). На границе  $y = \Delta(x, t)$  вектор скорости непрерывен. Введем  $u_2(x, t) = \Omega_0 \Delta + u_0(x, t) = \Omega(\Delta - h) + u_1(x, t)$  — значение горизонтальной компоненты скорости на границе  $y = \Delta(x, t)$ . Из уравнений (1.1) для искомого вектора  $\mathbf{U} = (u_0, u_1, u_2)^T$  ( $(\dots)^T$  — транспонирование) получаем систему уравнений

$$\mathbf{U}_t + A\mathbf{U}_x = 0, \quad A = \begin{pmatrix} u_0 - g\Omega_0^{-1} & g\Omega^{-1} & g\Omega_0^{-1} - g\Omega^{-1} \\ -g\Omega_0^{-1} & u_1 + g\Omega^{-1} & g\Omega_0^{-1} - g\Omega^{-1} \\ -g\Omega_0^{-1} & g\Omega^{-1} & u_2 + g\Omega_0^{-1} - g\Omega^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Вертикальная компонента скорости в нижнем и верхнем слоях соответственно задается равенствами  $v = -yu_{0x}$ ,  $v = (\Delta - y)(u_{2x} - \Omega\Delta_x) - \Delta u_{0x}$ , где  $\Delta = \Omega_0^{-1}(u_2 - u_1)$ ,  $h = \Delta + \Omega^{-1}(u_1 - u_2)$ .

Характеристическое уравнение для системы (1.5) можно получить согласно общему алгоритму вычисления характеристик, но проще использовать (1.2):

$$F(k) = \frac{g}{\Omega_0} \frac{u_2 - u_0}{(u_0 - k)(u_2 - k)} + \frac{g}{\Omega} \frac{u_1 - u_2}{(u_1 - k)(u_2 - k)} - 1 = 0. \quad (1.6)$$

В общем случае показано [5], что характеристическое уравнение (1.2) имеет только два корня  $k_1(u_0, u_1, u_2)$ ,  $k_2(u_0, u_1, u_2)$  вне интервала изменения  $u$ ;  $k_1 < u_j$ ,  $k_2 > u_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ). Так как решение уравнения (1.6) сводится к отысканию корней полинома третьей степени относительно  $k$ , то уравнение (1.6) имеет третий действительный корень  $k_3(u_0, u_1, u_2)$ , который попадает на интервал изменения скорости  $u$  в верхнем либо нижнем слое.

Система уравнений (1.5) допускает запись в инвариантах Римана:

$$r_{it} + k_i r_{ix} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$r_i = r_i(u_0, u_1, u_2) = k_i - \frac{g}{\Omega_0} \ln \left| \frac{u_2 - k_i}{u_0 - k_i} \right| - \frac{g}{\Omega} \ln \left| \frac{u_1 - k_i}{u_2 - k_i} \right|.$$

Эти формулы получаются из общих формул (1.3), определяющих инварианты Римана системы (1.1).

Семейство характеристик гиперболической системы называется сильно нелинейным семейством [9], если  $\nabla k_i \cdot \mathbf{R}_i \neq 0$ . Здесь  $\mathbf{R}_i$  — правый собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $k_i$ ;  $\nabla = (\partial/\partial u_0, \partial/\partial u_1, \partial/\partial u_2)$ . Легко проверить, что для матрицы  $A$  из (1.5)

$$\mathbf{R}_i = ((u_0 - k_i)^{-1}, (u_1 - k_i)^{-1}, (u_2 - k_i)^{-1})^T.$$

Вычисляя  $\nabla k_i$  с использованием уравнения (1.6), получаем

$$\begin{aligned} \nabla k_i \cdot \mathbf{R}_i &= K_i^{-1} L_i, \\ L_i &= \frac{g}{\Omega_0} \left( \frac{1}{(u_0 - k_i)^3} - \frac{1}{(u_2 - k_i)^3} \right) - \frac{g}{\Omega} \left( \frac{1}{(u_1 - k_i)^3} - \frac{1}{(u_2 - k_i)^3} \right), \\ K_i &= \frac{g}{\Omega_0} \left( \frac{1}{(u_0 - k_i)^2} - \frac{1}{(u_2 - k_i)^2} \right) - \frac{g}{\Omega} \left( \frac{1}{(u_1 - k_i)^2} - \frac{1}{(u_2 - k_i)^2} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из этой формулы вытекает, что  $\nabla k_1 \cdot \mathbf{R}_1 > 0$ ,  $\nabla k_2 \cdot \mathbf{R}_2 < 0$  (использованы неравенства  $\Omega_0^{-1}(u_2 - u_0) > 0$ ,  $\Omega^{-1}(u_1 - u_2) > 0$ ). Следовательно, характеристические семейства, соответствующие характеристическим корням  $k_1$  и  $k_2$ , удовлетворяют условиям сильной нелинейности. Характеристическое семейство, соответствующее корню  $k_3$  характеристического уравнения, в общем случае не является сильно нелинейным, но если  $\alpha = \Omega_0/\Omega$  удовлетворяет неравенствам

$$2^{-1} < \alpha < 2, \quad (1.8)$$

то в этом (и только в этом) случае характеристики  $dx/dt = k_3(x, t)$  тоже образуют сильно нелинейное семейство. Покажем это. Величина  $K_3 \neq 0$ , так как  $K_3 = F_k(k_3)$ , а функции  $F(k)$ ,  $F_k(k_3)$  допускают представление

$$\begin{aligned} F(k) &= (k - k_1)(k - k_2)(k - k_3)[(u_0 - k)(u_1 - k)(u_2 - k)]^{-1}, \\ F_k(k_3) &= (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)[(u_0 - k_3)(u_1 - k_3)(u_2 - k_3)]^{-1} \neq 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Последнее неравенство вытекает из того факта, что система уравнений (1.5) не имеет кратных характеристических корней. Функцию  $L_3$  из (1.7) можно представить в виде

$$L_3 = (g/\Omega_0)^{-2} \Psi, \quad \Psi = z_0^3 - \alpha z_1^3 + (\alpha - 1)z_2^3, \quad z_i = g(\Omega_0(u_i - k_3))^{-1}.$$

Переменные  $z_j$  связаны характеристическим уравнением  $\chi = z_0 - \alpha z_1 + (\alpha - 1)z_2 - 1 = 0$ . Задание величин  $\Omega$  и  $\Omega_0$  определяет взаимное расположение точек  $u = u_i$ ,  $k = k_3$  на действительной оси. Возможны следующие варианты:

$$\begin{aligned} 1^0. & \quad \Omega_0 > \Omega > 0, \quad u_0 < k_3 < u_2 < u_1, \\ 2^0. & \quad \Omega > \Omega_0 > 0, \quad u_0 < u_2 < k_3 < u_1, \\ 3^0. & \quad \Omega_0 < \Omega < 0, \quad u_1 < u_2 < k_3 < u_0, \\ 4^0. & \quad \Omega < \Omega_0 < 0, \quad u_1 < k_3 < u_2 < u_0, \\ 5^0. & \quad \Omega_0 > 0 > \Omega, \quad u_0 < k_3 < u_1 < u_2, \quad u_1 < k_3 < u_0 < u_2, \\ 6^0. & \quad \Omega > 0 > \Omega_0, \quad u_2 < u_0 < k_3 < u_1, \quad u_2 < u_1 < k_3 < u_0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Каждой области изменения параметров  $u_i, k_3$  ( $1^0-6^0$ ) соответствует определенная область изменения переменных  $z_j$ . Так, например, в случае  $1^0$   $z_0 < 0, z_2 > z_1 > 0$ ; в случае  $2^0$   $z_1 > 0, 0 > z_0 > z_2$  и т. д. Функция  $\Psi$  исследуется на условный экстремум в каждой из областей (с условием  $\chi = 0$ ), затем рассматривается ее поведение на границах. В итоге устанавливается, что  $\Psi$  может быть знакоопределенной только в случаях  $1^0-4^0$  при параметре  $\alpha$ , принадлежащем области (1.8). Далее считаем, что параметры задачи удовлетворяют условию (1.8). Простые волны уравнений (1.5) (решения вида  $U = U(\beta(x, t))$ ,  $\beta(x, t)$  — некоторая функция двух переменных) определяются уравнениями

$$(A - kI)U_\beta = 0, \quad \beta_t + k\beta_x = 0,$$

где  $k$  удовлетворяет характеристическому уравнению (1.6). Если выбрать в качестве  $\beta(x, t)$  функцию  $k(x, t)$ , то из первых уравнений находятся  $u_j(k)$  ( $j = 0, 1, 2$ ), а последнее уравнение служит для определения  $k(x, t)$ . В автомодельной простой волне  $k(x, t) = x/t$ . С использованием инвариантов Римана первая подсистема легко интегрируется. Каждому корню характеристического уравнения  $k_i$  соответствует решение типа простой волны, в котором  $r_j(u_0, u_1, u_2) = \text{const}$  ( $j \neq i$ ). Для вертикальной компоненты скорости в простой волне имеем формулы

$$v = -k_x y u_0'(k), \quad v = k_x ((\Delta(k) - y)(u_2'(k) - \Omega \Delta'(k)) - \Delta(k) u_0'(k))$$

для нижнего и верхнего слоя соответственно.

**2. Волна взаимодействия потоков.** Рассмотрим вспомогательную задачу построения решения типа простой волны, описывающего взаимодействие двух завихренных потоков. Пусть в областях  $x < x_1(t)$ ,  $x > x_2(t)$  (рис. 1) течение жидкости стационарно, а завихренность постоянна ( $u_y = \omega_1 = \text{const}$  справа,  $u_y = \omega_2 = \text{const}$  слева). При  $x \in [x_1(t), x_2(t)]$  контактная поверхность  $AC$   $y = \Delta(x, t)$  отделяет расположенную справа область с постоянной завихренностью  $\omega_1$  от примыкающей слева области с постоянной завихренностью  $\omega_2$ . На поверхности  $AC$  выполняются условия непрерывности вектора скорости  $(u, v)$  и дифференциальное уравнение

$$\Delta_t + u(x, \Delta, t)\Delta_x = v(x, \Delta, t).$$

На сечениях  $x = x_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) выполняются условия непрерывного примыкания к стационарным течениям. Далее докажем, что в случае, когда  $\alpha = \omega_1/\omega_2$  удовлетворяет неравенствам (1.8), существует простая волна — точное решение системы уравнений (1.1), удовлетворяющее на границах области  $ABCD$  перечисленным условиям. На рис. 1 изображены две возможные картины течения. Выясним условия, которым должны удовлетворять граничные данные на  $AB$  и  $CD$ .

Очевидно, что скорость движения точки  $A$  в горизонтальном направлении совпадает с горизонтальной компонентой скорости жидкости на дне ( $x_2'(t) = u_A$  в случае  $a$ , представленном на рис. 1,  $a$ , и  $x_1'(t) = u_A$  в случае  $b$  (рис. 1,  $b$ )). Аналогично скорость движения точки  $C$  по горизонтали совпадает с  $u_C$  ( $x_1'(t) = u_C$  в случае  $a$ ,  $x_2'(t) = u_C$  в случае  $b$ ). В области  $ABCD$  течение имеет двухслойный характер, и для описания его эволюции нужно решать уравнения (1.5) (при  $\Omega_0 = \omega_1, \Omega = \omega_2$  в случае  $a$  либо  $\Omega_0 = \omega_2, \Omega = \omega_1$  в случае  $b$ ). При подходе к точке  $A$  значение  $\Delta \rightarrow 0$  и, как следует из характеристического уравнения (1.6), характеристическая скорость  $k_3$  стремится к  $u_A$ . Аналогично при подходе к границе  $CD$  функция  $h - \Delta \rightarrow 0$  и  $k_3 \rightarrow u_C$ . Следовательно, границы  $x = x_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) области  $ABCD$  движутся с характеристической скоростью  $k_3$ . Тогда для описания течения в области взаимодействия следует использовать простую волну, отвечающую характеристикам  $dx/dt = k_3(x, t)$ .

В области простой волны инварианты Римана  $r_1$  и  $r_2$  тождественно постоянны и меняется только инвариант  $r_3$ . Получаем необходимое условие существования простой волны взаимодействия потоков:

$$r_1^{(l)} = r_1^{(r)}; \quad r_2^{(l)} = r_2^{(r)}, \quad (2.1)$$

где  $r_1^{(l)}, r_2^{(l)}$  — значения инвариантов Римана для левого стационарного потока;  $r_1^{(r)}, r_2^{(r)}$  — аналогичные значения для правого стационарного потока. В однослойном потоке с постоянной завихренностью  $\Omega$  инварианты Римана имеют вид

$$r_i = k_i - \frac{g}{\Omega} \ln \left| \frac{u_1 - k_i}{u_0 - k_i} \right|, \quad (2.2)$$

где  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ) — корни характеристического уравнения

$$\frac{g}{\Omega} \frac{u_1 - u_0}{(u_1 - k)(u_0 - k)} - 1 = 0. \quad (2.3)$$

Отметим, что инварианты Римана  $r_1, r_2$  системы уравнений двухслойного течения при  $\Delta \rightarrow 0$  (или  $h - \Delta \rightarrow 0$ ) непрерывно переходят в  $r_1, r_2$ , отвечающие системе уравнений однослойного течения. Из формул (2.2), (2.3) вытекает, что  $r_1 + r_2 = k_1 + k_2 = u_1 + u_0$ , а тогда  $u_1^{(r)} - u_0^{(l)} = u_1^{(l)} - u_0^{(r)}$  в силу (2.1). Следовательно, при выполнении равенств (2.1) справедливо одно из двух неравенств  $u_1^{(r)} > u_0^{(l)}$ ,  $u_0^{(r)} > u_1^{(l)}$  (рис. 1, а и 1, б соответственно). С учетом сказанного решение типа простой волны  $u_0 = u_0(k), u_1 = u_1(k), u_2 = u_2(k)$  определяется в области  $ABCD$  соотношениями

$$r_1(u_0, u_1, u_2) = r_1^{(r)} = r_1^{(l)}, \quad k = k_3(u_0, u_1, u_2), \quad r_2(u_0, u_1, u_2) = r_2^{(r)} = r_2^{(l)}. \quad (2.4)$$

При этом  $k = k_3$  изменяется от  $u_0^{(l)}$  до  $u_1^{(r)}$  в случае а либо от  $u_0^{(r)}$  до  $u_1^{(l)}$  в случае б (рис. 1). Для того чтобы выяснить качественное поведение параметров течения, выпишем дифференциальные уравнения простой волны

$$(u_0 - k)u_0' + gh' = 0, \quad (u_1 - k)u_1' + gh' = 0, \quad (u_2 - k)u_2' + gh' = 0, \quad gh' = -K_3(k)(L_3(k))^{-1}. \quad (2.5)$$

Проанализируем случай, когда  $u_1^{(r)} > u_0^{(l)}$  (рис. 1, а) (случай, когда  $u_0^{(r)} > u_1^{(l)}$ , рассматривается аналогично). Отметим, что тогда  $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ . Действительно, если  $\omega_1 < 0, \omega_2 < 0$ , то  $u_1^{(r)} < u_0^{(l)}, u_1^{(l)} < u_0^{(r)}$  и, следовательно,  $u_1^{(r)} - u_0^{(l)} < u_0^{(r)} - u_1^{(l)}$ . Если учесть, что  $u_1^{(r)} - u_0^{(l)} = -(u_0^{(r)} - u_1^{(l)})$ , то становится очевидным, что при  $\omega_1 < 0, \omega_2 < 0$  реализуется случай б. Пусть  $\omega_1 > \omega_2 > 0$ , тогда в силу (1.9), (1.10)  $K_3(k) = F_k(k) > 0$  (в (1.10) следует положить  $\Omega_0 = \omega_1, \Omega = \omega, k_3 = k$ ). В рассматриваемой ситуации  $1 < \alpha < 2$ , функция  $L_3(k)$  положительна в области параметров (1.10) (вариант 1<sup>u</sup>) и  $h'(k) < 0, u_0'(k) < 0, u_1'(k) > 0, u_2'(k) > 0$  в области течения. При приближении к правой границе области определения простой волны  $k \rightarrow u_1^{(r)}$ , при этом  $u_1 - k \rightarrow 0, u_2 - k \rightarrow 0$ . Характеристическое уравнение (1.6) задает интеграл системы уравнений (2.5). Из (1.6) вытекает, что

$$\lim_{u_1 - k \rightarrow 0} \frac{u_2 - k}{u_1 - k} = (\alpha - 1)\alpha^{-1} \quad (2.6)$$

и функция  $h'(k)$  допускает асимптотическое представление

$$gh' = -(u_2 - k)\alpha(2\alpha - 1)^{-1} + o(u_2 - k). \quad (2.7)$$

Аналогично при  $k \rightarrow u_0^{(l)}, u_0 - k \rightarrow 0, u_2 - k \rightarrow 0$

$$\lim_{u_0 - k \rightarrow 0} \frac{u_2 - k}{u_0 - k} = 1 - \alpha, \quad gh' = -(u_2 - k)(2 - \alpha)^{-1} + o(u_2 - k). \quad (2.8)$$



Отсюда следует, что производные  $u'_i(k)$  имеют конечные пределы при  $k \rightarrow u_1^{(r)}$  и  $k \rightarrow u_0^{(l)}$ :

$$\begin{aligned} u'_0(u_1^{(r)}) &= 0, & u'_1(u_1^{(r)}) &= (\alpha - 1)(2\alpha - 1)^{-1}, & u'_2(u_1^{(r)}) &= \alpha(2\alpha - 1)^{-1}, \\ u'_0(u_0^{(l)}) &= (1 - \alpha)(2 - \alpha)^{-1}, & u'_1(u_0^{(l)}) &= 0, & u'_2(u_0^{(l)}) &= (2 - \alpha)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В рассматриваемой простой волне толщина нижнего жидкого слоя  $\Delta(k)$  монотонно возрастает с ростом  $k$ , так как  $\Delta'(k) = \omega_1^{-1}(u'_2 - u'_0) > 0$ . При  $k = u_0^{(l)}$   $\Delta = 0$ , а при  $k = u_1^{(r)}$   $\Delta = h$ .

Асимптотики (2.6)–(2.8) однозначно определяют интегральную кривую системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5) в окрестности одной из граничных точек ( $k = u_1^{(r)}$  или  $k = u_0^{(l)}$ ). Эта интегральная кривая продолжается вплоть до второй граничной точки. Возможность продолжения вытекает из того, что при  $k \in (u_0^{(l)}, u_1^{(r)})$  функция  $K_3(k)(L_3(k))^{-1}$  особенностей не имеет ( $k \neq u_i$  в силу характеристического уравнения). В итоге установлено, что система уравнений (2.4) (интегралов дифференциальных уравнений (2.5)) однозначно определяет функции  $u_i(k)$  ( $i = 0, 1, 2$ ). В рассматриваемой автомобильной задаче соотношения  $u_i = u_i(k)$ ,  $k = x/t$  задают простую волну взаимодействия потоков.

**3. Траектории частиц в волне взаимодействия потоков.** Частицы жидкости в рассматриваемом нестационарном течении движутся по траекториям  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ :

$$x'(t) = u(x(t), y(t), t), \quad y'(t) = v(x(t), y(t), t). \quad (3.1)$$

Для простых волн  $u = u(k, y)$ ,  $v = k_x V(k, y)$ ,  $k_t + k k_x = 0$ . Определим в плоскости переменных  $k, y$  кривые, которые соответствуют траекториям (3.1). Продифференцировав  $k(x, t)$  вдоль траектории (3.1), получаем дифференциальные уравнения в плоскости  $k, y$ :

$$\bar{k}'(t) = k_t + u k_x = k_x(x(t), t)(u(\bar{k}, y) - \bar{k}), \quad y'(t) = k_x(x(t), t)V(\bar{k}, y). \quad (3.2)$$

Замена переменных  $s = \int_{t_0}^t k_x(x(\tau), \tau) d\tau$  приводит систему уравнений (3.2) к автономному виду ( $k(s) = \bar{k}(t(s))$ ):

$$k'(s) = u(k, y) - k, \quad y'(s) = V(k, y). \quad (3.3)$$

В случае центрированной простой волны  $k = x/t$ ,  $s = \ln(t/t_0)$ . В общем случае, если известно какое-то решение системы уравнений (3.3)  $k = k_0(s)$ ,  $y = y_0(s)$ , то для определения траектории  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение для  $s(t)$ :

$$s'(t) = k_x(x_0(s, t), t),$$

где зависимость  $x = x_0(s, t)$  определяется из уравнения  $k(x, t) = k_0(s)$ . После интегрирования становятся известными функции  $x(t) = x_0(s(t), t)$ ,  $y(t) = y_0(s(t))$ , задающие движение частицы жидкости вдоль траектории.

Проанализируем качественную картину интегральных кривых системы уравнений (3.3) в простой волне взаимодействия потоков для случая  $a$  (рис. 1) ( $1 < \alpha < 2$ ). В области  $ACD$   $u(k, y) = u_0(k) + \omega_1 y$ ,  $V(k, y) = -y u'_0(k)$ .

Особыми точками ( $u(k, y) - k = 0$ ,  $V(k, y) = 0$ ) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) будут точки  $A$  и  $C$ . В точке  $A$   $y = 0$ ,  $u_0(k) = k$ , в точке  $C$   $u_1(k) = u_0(k) + \omega_1 h(k) = k$ ,  $u'_0(k) = 0$  согласно (2.9). Для  $u_0^{(l)} < k < u_1^{(r)}$  характеристический корень  $k_3 = k$  удовлетворяет неравенствам  $u_0 < k < u_2$ , а  $V(k, y)$  обращается в нуль

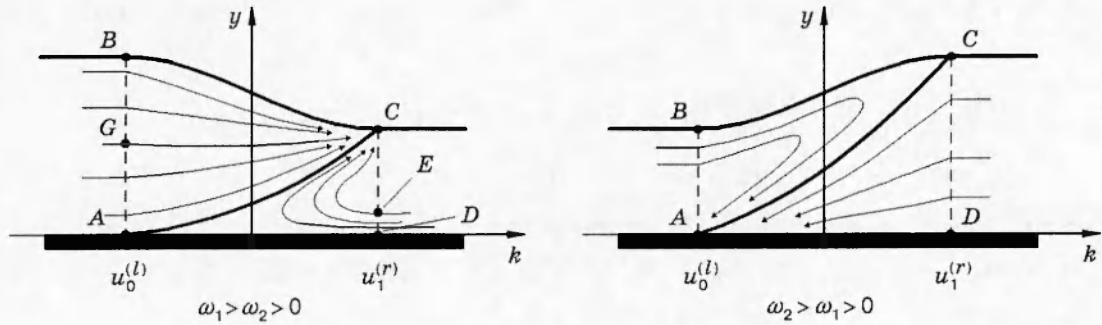


Рис. 2

только при  $y = 0$  ( $u'_0(k) < 0$ ). Поэтому других особых точек в области  $ACD$  нет. Выделим линейную часть системы (3.3) в окрестности точки  $A$ , оставляя первые члены разложения Тейлора функций  $u(k, y) - k, V(k, y)$ :

$$\frac{dk}{ds} = (u'_0(k_A) - 1)(k - k_A) + \omega_1 y = -(2 - \alpha)^{-1}(k - k_A) + \omega_1 y,$$

$$\frac{dy}{ds} = -y u'_0(k_A) = y(\alpha - 1)(2 - \alpha)^{-1}$$

(использованы соотношения (2.9)). Собственные числа матрицы коэффициентов правой части действительны и имеют разные знаки  $\lambda_1 = -(2 - \alpha)^{-1}, \lambda_2 = (\alpha - 1)(2 - \alpha)^{-1}$ . Поэтому особая точка  $A$  является седлом. Аналогичное выделение линейной части в окрестности точки  $C$  приводит к системе

$$\frac{dk}{ds} = (u'_0(k_C) - 1)(k - k_C) + \omega_1(y - h_C) = -(k - k_C) + \omega_1(y - h_C),$$

$$\frac{dy}{ds} = -h_C u''_0(k_C)(k - k_C) = \omega_1^{-1}(\alpha - 1)\alpha(2\alpha - 1)^{-2}(k - k_C).$$

При вычислении  $u''_0(k_A)$  используется следствие уравнений (2.5)  $(u_0(k) - k)u'_0(k) = (u_2(k) - k)u'_2(k)$ . После дифференцирования этого равенства по  $k$  с учетом соотношений  $u_2(k_C) = k_C, u'_0(k_C) = 0, u_0(k_C) - k_C = u_0(k_C) - u_1(k_C) = -\omega_1 h_C$  находим  $u''_0(k_C) = (\alpha - 1)\alpha(2\alpha - 1)^{-2}(\omega_1 h_C)^{-1}$ . Собственные числа матрицы коэффициентов линейной части  $\lambda_{1,2} = 2^{-1}(-1 \pm (2\alpha - 1)^{-1})$  имеют одинаковые знаки, поэтому точка  $C$  является узлом.

Интегральная кривая уравнений (3.3) входит в область  $ACD$  в точке  $E$  отрезка  $CD$ ; вдоль кривой  $y$  монотонно возрастает,  $k$  убывает вплоть до точки поворота, где достигается равенство  $u = k$ . Затем  $k$  начинает возрастать и интегральная кривая идет в узел  $C$ . Картина интегральных кривых в области  $ACD$  изображена на рис. 2.

В области  $BSCA$  особыми точками являются точки  $A$  и  $C$ , а вектор скорости  $(u, V)$  имеет вид

$$u(k, y) = u_1(k) + \omega_2(y - h), \quad V(k, y) = (y - \Delta)(\omega_2 h'(k) - u'_1(k)) - \Delta u'_0(k)$$

( $\Delta(k) = \omega_1^{-1}(u_2(k) - u_0(k))$ ). В точке  $A$   $y = \Delta = 0, u_2(k_A) = k_A$ ; в точке  $C$   $y = \Delta = h_C, u'_0(k_C) = 0$ . Выделим линейную часть системы (3.3) в окрестности точки  $A$ :

$$\frac{dk}{ds} = -(k - k_A) + \omega_2 y, \quad \frac{dy}{ds} = \omega_1^{-1}\alpha(\alpha - 1)(2 - \alpha)^{-2}(k - k_A).$$



Собственные числа матрицы коэффициентов  $\lambda_{1,2} = -2^{-1} \pm 2^{-1} \alpha (2 - \alpha)^{-1}$  действительны и имеют разные знаки, поэтому точка  $A$  является седлом. Выделение линейной части в окрестности точки  $C$  приводит к системе уравнений:

$$\frac{dk}{ds} = -\alpha(2\alpha - 1)^{-1}(k - k_C) + \omega_2(y - h_C), \quad \frac{dy}{ds} = (1 - \alpha)(2\alpha - 1)^{-1}(y - h_C).$$

В точке  $C$  собственные числа  $\lambda_1 = \alpha(2\alpha - 1)^{-1}$ ,  $\lambda_2 = (\alpha - 1)(2\alpha - 1)^{-1}$  имеют одинаковые знаки, поэтому точка  $C$  является узлом. Вдоль интегральной кривой, входящей в область  $ABC$  в точке  $G$  отрезка  $AB$ ,  $k$  монотонно возрастает, и кривая входит в узел  $C$ . Картина интегральных кривых в области  $ABC$  показана на рис. 2. Отметим, что интегральные кривые системы уравнений (3.3) не являются траекториями частиц, как следует из предыдущего. С помощью этих кривых можно понять, как происходит перемещение частиц относительно простой волны (скорость в горизонтальном направлении движения точки по кривой совпадает с  $u - k$ ). Каждая прямая  $k = k_0 = \text{const}$ ,  $0 \leq y \leq h$  в зоне простой волны перемещается в физическом пространстве со скоростью  $k_0$ ,  $x = k_0 t$ . На рис. 2 показаны картины интегральных кривых для различных значений завихренностей. Видно, что течение в области взаимодействия потоков имеет существенно двумерный характер. Вдоль линии контакта двух завихренных потоков формируется струйное течение, направленное к свободной поверхности либо ко дну в зависимости от соотношения завихренностей.

**4. Решение задачи о распаде произвольного разрыва.** Определим конфигурацию волн, которые распространяются по заданному стационарному фону в направлениях  $x > 0$  и  $x < 0$ . Состояния за этими волнами будут связаны простой волной взаимодействия потоков. Поэтому конфигурация волн определяется условием (2.1), обеспечивающим существование простой волны взаимодействия потоков. В области однослойных течений уравнения движения можно записать в виде законов сохранения массы и импульса:

$$h_t + (u_c h)_x = 0, \quad (h u_c)_t + (h u_c^2)_x + \left( g \frac{h^2}{2} + \frac{\omega_i^2}{12} h^3 \right)_x = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

Здесь  $h$  — глубина слоя жидкости;  $u_c = 2^{-1}(u_0 + u_1)$ ;  $u_1, u_0$  — горизонтальные компоненты вектора скорости на свободной поверхности и на дне;  $\omega_i$  — постоянные завихренности. Уравнения (4.1) являются следствием уравнений (1.1) в классе течений с постоянной завихренностью и совпадают с уравнениями газовой динамики, если отождествить  $h$  с плотностью газа, а давление  $P$  определить формулой  $P = 2^{-1} g h^2 + (12)^{-1} \omega_i^2 h^3$ .

Исходная постановка задачи о распаде произвольного разрыва (1.4) определяет данные Коши для уравнений (4.1)

$$(u_c, h) \Big|_{t=0} = \begin{cases} u_{c1}, h_1, & x < 0, \\ u_{c2}, h_2, & x > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

( $u_{ci}, h_i$  — заданные постоянные). Следует отметить, что соотношения на гидравлических прыжках и простых волнах, вытекающие из уравнений (1.1) [7, 8], для рассматриваемого класса течений в точности совпадают с соотношениями на газодинамических ударных и простых волнах. Уравнение состояния «газа» удовлетворяет условиям монотонности и выпуклости [10], поэтому решение задачи (4.1), (4.2) можно построить как комбинацию волны, обращенной вправо (простой волны или гидравлического прыжка), и волны, обращенной влево. Отличие от газодинамической задачи состоит в том, что состояния за прошедшими волнами удовлетворяют условиям совпадения инвариантов Римана  $r_1, r_2$  (2.1) вместо условий совпадения скоростей и давлений. В силу соотношений на сильном разрыве

$$[h(u_c - D)] = 0, \quad [h u_c(u_c - D) + P] = 0 \quad (4.3)$$

( $D$  — скорость фронта разрыва,  $[f]$  — символ скачка функций  $f$ ) параметры течения  $u_c, P$  за фронтом волны связаны с параметрами течения  $u_{c0}, P_0$  перед фронтом уравнением

$$u_c - u_{c0} = \pm \sqrt{(P - P_0)(h_0^{-1} - h^{-1})} \quad (4.4)$$

(для волны, обращенной вправо,  $D > u_c$  и в (4.4) выбирается знак  $+$ ; для волны, обращенной влево,  $D < u_c$  и выбирается знак  $-$ ). Для дальнейшего удобно преобразовать уравнение (4.4) к соотношению между инвариантами Римана за фронтом волны  $r_1, r_2$  (формула (2.2)) и  $r_{10}, r_{20}$  — между инвариантами Римана перед фронтом. При этом используются равенства

$$u_c = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad h = \frac{u_1 - u_0}{\omega_i}, \quad \frac{r_1 - r_2}{2} = a - \frac{g}{\omega_i} \ln \frac{u_1 - u_0 - 2a}{u_1 - u_0 + 2a},$$

$$a = \sqrt{4^{-1}(u_1 - u_0)^2 + g\omega_i^{-1}(u_1 - u_0)},$$

вытекающие из определения инвариантов Римана  $r_i$  (2.2). В итоге уравнение (4.4) преобразуется к виду

$$\frac{r_1 + r_2 - r_{10} - r_{20}}{2} = \pm f\left(\frac{r_1 - r_0}{2}, \frac{r_{10} - r_{20}}{2}\right), \quad (4.5)$$

где  $f(z, z_0)$  монотонно возрастает по  $z$ ,  $f \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $f(z_0, z_0) = 0$ . В плоскости переменных  $(r_1 + r_2)/2$ ,  $(r_1 - r_2)/2$  уравнением (4.5) задается кривая — диаграмма возможных ударных переходов из начального состояния  $r_{10}, r_{20}$ . Диаграммы переходов, осуществляемых при прохождении по заданному состоянию  $r_{10}, r_{20}$  простых волн разрыва, определены соотношениями

$$r_2 = r_{20}, \quad r_1 = r_{10}. \quad (4.6)$$

Первое соотношение описывает переходы с помощью простых волн, обращенных вправо (линии уровня простой волны движутся с характеристической скоростью  $k_1$ ), второе — переходы, обращенные влево (зона простой волны перемещается с характеристической скоростью  $k_2$ ). Следуя алгоритму решения газодинамической задачи о распаде произвольного разрыва через начальную точку  $r_{10} = r_1(u_{c1}, h_1)$ ,  $r_{20} = r_2(u_{c1}, h_1)$ , проводим диаграмму переходов, обращенных вправо. Эта кривая при  $r_1 - r_2 \geq r_{10} - r_{20}$  задается уравнением (4.5), где выбирается знак  $+$ , а при  $0 \leq r_1 - r_2 \leq r_{10} - r_{20}$  — первым уравнением (4.6). Аналогично через точку  $r_{10} = r_1(u_{c2}, h_2)$ ,  $r_{20} = r_2(u_{c2}, h_2)$  проводится диаграмма переходов, обращенных влево. При  $r_1 - r_2 \geq r_{10} - r_{20}$  кривая задается уравнением (4.5) (выбирается знак  $-$ ), а при  $r_1 - r_2 \leq r_{10} - r_{20}$  — вторым уравнением (4.6). Точке пересечения кривых отвечают искомые состояния за фронтами прошедших волн. На рис. 3 изображены диаграммы переходов из правого и левого состояний 1, 2 в состояние 3 для одного из возможных случаев распада разрыва. Как следует из диаграммы, решение задачи содержит центрированную волну, распространяющуюся по фону 2, и гидравлический прыжок, распространяющийся по состоянию 1. Для состояний  $r$  и  $l$  (рис. 4) за фронтами волн выполнены условия (2.1) существования центрированной волны взаимодействия потоков, и построение указанной волны в области  $u_0^{(l)} < x/t < u_1^{(r)}$  завершает решение исходной задачи о распаде произвольного разрыва. При изменении положений точек 1, 2 могут возникать другие конфигурации волн. В случае, когда кривые не пересекаются ( $u_{c02} < u_{c01}$ ), в результате распада разрыва возникнут две центрированные волны, за которыми русло становится сухим ( $h = 0$ ). Здесь видна аналогия с газовой динамикой (истечение в вакуум). На рис. 4 изображена картина характеристик и фронтов сильных разрывов в плоскости  $x, t$ , соответствующая конфигурации волн на рис. 3.

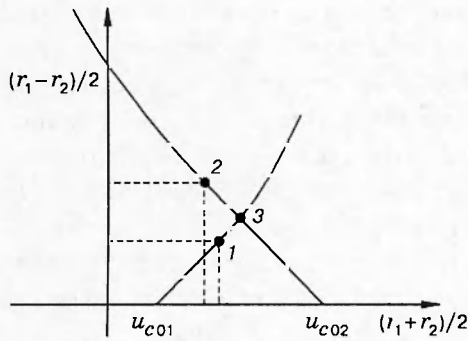


Рис. 3

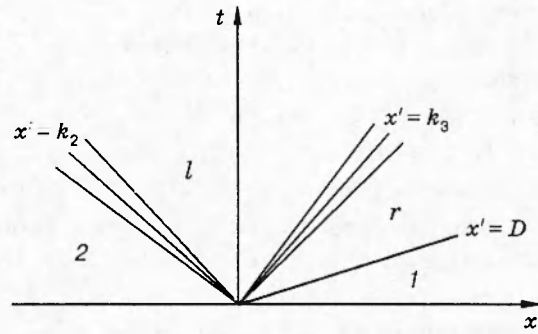


Рис. 4

Отметим, что аналогия с газодинамической задачей здесь не полная. Условия на сильном разрыве (4.3) гарантируют, что средняя скорость  $u_c^{(r)} = 2^{-1}(u_1^{(r)} + u_2^{(r)}) < D$ , но максимальная скорость за фронтом (в рассматриваемом случае, когда  $\omega_i > 0$ , она достигается на свободной поверхности)  $u_1^{(r)}$  не обязательно удовлетворяет этому неравенству. Равенство  $u_1^{(r)} = D$  с использованием следствия соотношений (4.3)

$$(u_c^{(r)} - D)^2 = h_1/h^{(r)}(P^{(r)} - P_1)(h^{(r)} - h_1)^{-1}$$

(величины с индексом  $r$  отвечают состоянию за фронтом,  $h_1$  — глубина перед фронтом) можно преобразовать к уравнению

$$C(\xi + 1)(\xi - 1)^{-1}(3\xi^2 + 2\xi + 1)^{-1} = Fr^2, \quad \xi = h^{(r)}h_1^{-1}. \tag{4.7}$$

Здесь  $Fr$  — число Фруда, характеризующее сдвиг скорости перед скачком ( $Fr^2 = (u_1 - u_0)^2(g h_1)^{-1}$ ). Функция в левой части соотношения (4.7) монотонно убывает при возрастании  $\xi > 1$ , а при  $\xi \rightarrow 1$  стремится к бесконечности. Следовательно, для заданного  $Fr$  существует единственный корень  $\xi_k(Fr)$  уравнения (4.7). При  $Fr \rightarrow \infty$   $\xi_k(Fr) \rightarrow 1$ , а при  $Fr \rightarrow 0$   $\xi_k(Fr) \rightarrow \infty$ . Если величина  $\xi$ , характеризующая амплитуду скачка, удовлетворяет неравенству  $1 < \xi < \xi_k(Fr)$ , то  $u_1^{(r)} < D$  и зона взаимодействия потоков движется со скоростью, меньшей скорости фронта разрыва. Тогда картина, изображенная на рис. 4, возможна. При  $\xi = \xi_k(Fr)$  зона взаимодействия потоков догоняет фронт разрыва. Дальнейшее увеличение амплитуды скачка должно сопровождаться перестройкой конфигурации волн. Этот случай в данной работе не рассматривается. Поэтому при возникновении конфигураций с гидравлическими прыжками результаты будут относиться к случаю, когда завихренности малы ( $Fr^2$  — мало), а состояния 1 и 2 близки. Тогда  $\xi_k(Fr)$  велико и для малых амплитуд разрывов равенство (4.7) не достигается. В случае конфигураций с центрированными волнами таких ограничений не возникает. Проведенный анализ показывает, что для небольших амплитуд начального разрыва и малых завихренностей решение задачи о распаде произвольного разрыва содержит по одной волне, обращенной влево и вправо, и центрированную волну взаимодействия потоков. Дополнительного исследования требует случай произвольных амплитуд и случай, когда нарушаются неравенства (1.8). В этих случаях можно ожидать появления дополнительных особенностей в области взаимодействия потоков.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В простой волне взаимодействия потоков скорость течения на определенной глубине совпадает со скоростью распространения волны. Это течение можно называть простой волной с критическим слоем [2]. Чем выделена точка  $u = k_3$  среди других значений скорости, образующих непрерывный характеристический спектр системы уравнений

(1.1)? Оказывается, что в указанной точке выполняется характеристическое уравнение (1.2). Но так как при  $k = u$  интеграл в (1.2) расходится, характеристическое уравнение выполняется в смысле главного значения. Для проверки этого факта нужно рассмотреть аналитическое продолжение  $F(z)$  характеристической функции ( $z$  — комплексная переменная). После интегрирования по частям в (1.2) подынтегральная функция будет иметь особенность первого порядка. Это позволяет вычислить предельные значения  $F^\pm(z)$  при  $z \rightarrow u = k_3$ . В результате возникает характеристическое уравнение (1.6) при  $k = k_3$ , эквивалентное соотношению  $F^\pm(k_3) = 0$ . Проведенный анализ дает основание предполагать, что при решении общей задачи о распаде разрыва для уравнений вихревых течений, когда завихренность не является кусочно-постоянной функцией, возникнут аналогичные конфигурации волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00859) и интеграционного проекта СО РАН № 43 «Исследование внутренних и поверхностных гравитационных волн в жидкости».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D. J. Some properties of long waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–69.
2. Varley E., Blythe P. A. Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.
3. Freeman N. C. Simple waves on shear flows: similarity solutions // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, N 2. P. 257–264.
4. Blythe P. A., Kazakia Y., Varley E. The interaction of large amplitude shallow-water waves with an ambient flow // Ibid. P. 241–256.
5. Тешуков В. М. О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
6. Тешуков В. М. Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
7. Тешуков В. М. Гидравлический прыжок на сдвиговом течении идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 11–20.
8. Тешуков В. М. Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 48–57.
9. Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
10. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 7/II 1997 г.