

УДК 517.947+533.6.011.7+534.14+534.2

ЭОЛОВЫ ТОНА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЯЧЕЙКИ СОТОВОЙ РЕШЕТКИ

А. И. Макаров

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Исследованы аэроакустические резонансные колебания (эоловы тона) при обтекании двух пластин, образующих крест, в канале квадратного сечения. На основе допускаемых групп симметрий проведена классификация возможных мод колебаний и доказано их существование. Полученная методом сшивания решений бесконечная линейная система уравнений для этих мод упрощалась и исследовалась численно. Построены графики зависимости собственной частоты от длины пластин. Исследован вид собственных функций.

1. Постановка задачи. Рассматривается канал квадратного сечения. После обезразмеривания переменных по формулам [1]

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - M^2} H}, \quad y = \frac{y'}{H}, \quad z = \frac{z'}{H}, \quad \lambda = \frac{\omega H}{c\sqrt{1 - M^2}}, \quad M = \frac{U}{c} \quad (1)$$

(H — высота канала; c — скорость звука в среде; ω — круговая частота колебаний; U — скорость потока; штрихом обозначены размерные переменные) высота и ширина канала становятся равными единице (рис. 1). Вдоль канала перпендикулярно друг другу помещены две одинаковые пластины длины b и единичной ширины. Линия пересечения пластин делит их пополам. Начало координат находится в центре пластин, B — граница канала, Γ — профили пластин, Ω — область, занятая газом, $\Omega' = \Gamma \cup B$.

В канале течет однородный поток со скоростью U . При обтекании пластин могут возникать резонансные аэроакустические колебания, вызванные образованием и срывом упорядоченных вихревых структур с кромки схода пластин. Решение линеаризованных уравнений движения газа можно представить в виде суммы вихревой и акустической мод в области, занятой газом [2]. Данное представление не имеет места только на кромке схода вихревых структур [3]. Можно считать, что неизвестная особенность на кромке схода описывается вихревой модой, акустические колебания обусловлены только вихревой модой, влияние акустических волн на источник звука необходимо учитывать только в режимах течения газа, в которых имеют место акустические резонансные явления [3]. В системе

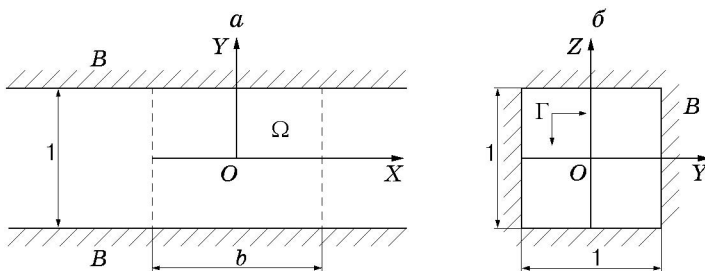


Рис. 1. Параметры канала и пластин:

a — сечение вдоль канала; b — поперечное сечение

Одномерные представления группы D_4

Преобразование	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
r^k	1	1	$(-1)^k$	$(-1)^k$
sr^k	1	-1	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

координат, связанной с пластинами, акустические и вихревые колебания являются установившимися по времени с некоторой упорядоченной вихревой структурой [3].

Невозмущенные акустические колебания в системе координат $OXYZ$ (рис. 1) описываются потенциалом $u(x, y, z)$ акустического возмущения скорости основного потока газа, который должен удовлетворять следующей системе уравнений [1, 3]:

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } B \cup \Gamma, \quad \int_{\Omega_0} (u^2 + (\nabla u)^2) d\Omega < \infty \quad \forall \Omega_0 \subset \Omega.$$

Далее задачу (2) будем называть задачей СК (задачей о собственных колебаниях). Постановка задачи обсуждается в работах [3, 4].

Сотовые решетки широко используются в аэродинамике для выпрямления потока газа. Исследуемая в работе структура моделирует элементарную ячейку сотовой решетки пластин.

Основная трудность задачи заключается в том, что дискретный спектр задачи погружен в абсолютно непрерывный спектр оператора $-\Delta$, который заполняет всю неотрицательную часть вещественной прямой.

2. Классификация возможных собственных колебаний. Симметрия задачи позволяет сузить пространство допустимых решений. В этом пространстве начало абсолютно непрерывного спектра оператора $-\Delta$ расположено правее точки 0.

Если собственные колебания являются четными по переменным y и z , то решение и его производная не терпят разрыва на плоскостях OXZ и OXY , в которых находятся пластины. Следовательно, пластины не влияют на колебания, т. е. такие колебания должны существовать в канале и при отсутствии пластин, а это невозможно, так как в этом случае четные по переменным y и z собственные колебания не реализуются.

Колебания, четные относительно одной и нечетные относительно другой пластины, описываются задачей с одной пластиной в канале, рассмотренной в работе [4].

В поперечном сечении структура допускает симметрию (рис. 1, б), которая описывается только группой диэдра D_4 и группой C_4 [5] (остальные группы, описывающие допускаемую структурой симметрию, являются лишь подгруппами групп D_4 и C_4).

Порождающими элементами группы D_4 являются поворот r на $\pi/4$ относительно оси OX и зеркальная симметрия s относительно плоскости OXZ . Характеры $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ одномерных (неприводимых) представлений группы D_4 задаются таблицей [5]. Каждый характер определяет структуру одного решения. Колебания с характерами ψ_1, ψ_3 соответствуют колебаниям, четным по переменным y, z . Как показано выше, такие колебания не могут существовать.

Группа C_4 , описывающая поворотную симметрию относительно оси OX , определяет представление собственных функций в виде волн Рэлея — Блоха для $j = 0, 1, 2, 3$: $C_4\langle u(x, y, z) \rangle = \exp(i\pi j/2)u(x, y, z)$. При $j \neq 0$ волны Рэлея — Блоха описывают бегущие волны в плоскости OYZ со сдвигом фазы в точках (x, y, z) и $(x, -z, y)$, равным $\exp(i\pi j/2)$. Случаи $j = 0, 2$ уже рассмотрены в одномерных неприводимых представлениях группы D_4 . С физической точки зрения бегущие моды $j = 1$ и $j = 3$ различаются только направлением

распространения (в плоскости OYZ против и по часовой стрелке соответственно), т. е. эти колебания должны соответствовать одинаковым частотам.

Задача обладает зеркальной симметрией относительно плоскости OYZ , поэтому пространство допустимых решений представляется как прямая сумма решений, четных и нечетных по переменной x . Далее под четными и нечетными колебаниями понимаются четные и нечетные колебания относительно переменной x .

Из сказанного выше следует, что существует три типа колебаний, отличных от колебаний около одной пластины в канале (без учета четности (нечетности) по x): 1) мода с характером ψ_2 (α -мода); 2) волна Рэлея — Блоха с $j = 1$ (β -мода); 3) мода с характером ψ_4 (γ -мода).

Заметим, что для α -мод абсолютно непрерывный спектр начинается с точки $10\pi^2$, для β -мод — с точки π^2 , для γ -мод — с точки $2\pi^2$. Под σ_0^2 далее понимается начало непрерывного спектра.

3. Вид собственных колебаний с учетом симметрии. При $x \geq b/2$ область канала будем обозначать через Ω_1 , при $x \leq -b/2$ — Ω_6 . При $-b/2 \leq x \leq b/2$ первый квадрант в плоскости OYZ обозначим через Ω_2 , второй — Ω_3 , третий — Ω_4 , четвертый — Ω_5 . Исходя из условий симметрии задачи достаточно задавать вид решения только в областях Ω_1 и Ω_2 . Обозначим эти решения соответственно через $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$.

С учетом симметрий α -, γ -моды имеют вид

$$u_1 = \sum_{n,m}^{+\infty} b_{n,m} \left[\sin(\pi(2n+1)y) \sin(\pi(2m+1)z) + (-1)^p \sin(\pi(2m+1)y) \sin(\pi(2n+1)z) \right] e^{-x\gamma(2m+1, 2n+1)}, \quad (3)$$

$$u_2 = \sum_{n,m}^{+\infty} a_{n,m} \left[\cos(2\pi ny) \cos(2\pi mz) + (-1)^p \cos(2\pi my) \cos(2\pi nz) \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{ch}(-x\gamma_0) \\ \text{sh}(-x\gamma_0) \end{array} \right\},$$

где $\gamma(m, n) = \sqrt{\pi^2 n^2 + \pi^2 m^2 - \lambda^2}$; $\gamma_0 = \gamma(2n, 2m)$; α -модам соответствует $p = 1$, и суммирование начинается с $n = 1, m = 0$ при $n > m$; γ -модам соответствует $p = 0$, и суммирование начинается с $n = 0, m = 0$ при $n \geq m$. Здесь и далее в фигурных скобках верхнее выражение соответствует четным модам, нижнее — нечетным.

С учетом симметрий β -моды имеют вид ($n > m, n + m$ — нечетное число)

$$u_1 = \sum_{n=1, m=0}^{+\infty} b_{n,m} \left[\cos(\pi n(y - 1/2)) \cos(\pi m(z - 1/2)) + (-1)^n i \cos(\pi m(y - 1/2)) \cos(\pi n(z - 1/2)) \right] e^{-x\gamma(m, n)}, \quad (4)$$

$$u_2 = \sum_{m, n=0}^{+\infty} a_{m, n} \cos(2\pi ny) \cos(2\pi mz) \left\{ \begin{array}{l} \text{ch}(-x\gamma_0) \\ \text{sh}(-x\gamma_0) \end{array} \right\},$$

где i — мнимая единица.

Для α -, β -, γ -мод задачу СК назовем задачей СКС (задачей СК с симметрией). Выберем цилиндрическую систему координат $\{(\rho, \varphi, z): \rho \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq 1\}$ вдоль кромки одной из пластин.

Лемма 1. В задаче СК условие конечности энергии в окрестности кромки равносильно условиям $u(\rho, \varphi, z) \simeq d(z) + \rho f(z) \cos \varphi$ в середине кромки пластины, $u(\rho, \varphi, z) \simeq d(z) + \sqrt{\rho} \cos(\varphi/2) f(z)$ при $\rho \rightarrow 0, d(z) \in W_2^1(\mathbb{R}), f(z) \in W_2^1(\mathbb{R})$ в остальных точках кромки.

В лемме 1 формулируются условия на вид решения задачи СК, эквивалентные условию на ребре [6].

С помощью непосредственной замены в (3), (4) декартовых координат на цилиндрические доказывается

Лемма 2. α - и γ -моды имеют конечную энергию в окрестности кромки. Для β -моды условие конечности энергии в окрестности кромки равносильно следующим соотношениям ($\forall k_1 \in \mathbb{Z}_+$):

$$\sum_{k_1 \geq n} b_{2k_1+1,n} (-1)^n e^{-b\gamma(2k_1+1,2n)/2} - i \sum_{n > k_1} b_{2n,2k_1+1} (-1)^n e^{-b\gamma(2k_1+1,2n)/2} = 0. \quad (5)$$

4. Существование собственных колебаний. Пусть помимо граничных условий задачи СКС при $R \geq b/2$ выполнено условие Дирихле $u(\pm R, y, z) = 0$ (DR) либо условие Неймана $u_x(\pm R, y, z) = 0$ (NR), причем при $R > b/2$ в области Ω решение равно нулю. Задачи СКС с такими условиями обозначим через СКС(DR) и СКС(NR) соответственно, а собственные числа — через λ_{DR} и λ_{NR} . Из принципа “вилки Дирихле — Неймана” следует, что для всех чисел R верны неравенства [7]

$$\lambda_{NR}^k \leq \lambda_*^k \leq \lambda_{DR}^k, \quad (6)$$

где индекс k обозначает порядковый номер собственного значения.

Замечание 1. Если для некоторых значений $R \geq b/2$ выполнены строгие неравенства $\lambda_{DR} < \sigma_0$ и $0 < \lambda_{NR}$, то из (6) следует существование собственных значений задачи СКС [7].

Замечание 2. Если $R > b/2$, то в силу связности области и условий симметрии решение не может быть константой, следовательно, $0 < \lambda_{NR}^1$.

Пусть $\Omega_R = \Omega \cap \{|x| < R\}$. Из теории вариационных методов [7] известно, что

$$(\lambda_{DR})^2 \leq \frac{\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d\Omega_R}{\int_{\Omega_R} |u|^2 d\Omega_R} = \mu^2(R) < \sigma_0^2, \quad (7)$$

где $|u|$ — модуль решения задачи СКС, если решение является комплекснозначной функцией.

Функция $\mu^2(R)$ имеет следующее асимптотическое разложение по R : $\sigma_0^2 + A/R + O(1/R^2)$. Необходимо подобрать такую функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую условию DR, чтобы выполнялось неравенство $\mu^2(R) < \sigma_0^2$, т. е. чтобы для этой функции переменная A была отрицательной.

Решения задач СКС(DR) и СКС(NR) достаточно гладкие, терпят разрыв только на профилях и допускают представление в виде $u = u_0 + ku_1$, где k — произвольное вещественное число; u_0 — обобщенная собственная функция оператора $-\Delta$ в области Ω_R с условием DR, соответствующая началу непрерывного спектра; u_1 — функция, разрывная на Γ , непрерывная в областях Ω_j ($j = 2, \dots, 5$) и равная нулю в областях Ω_1, Ω_6 . Из такого представления для функции u следует, что $A = A(k) = A_1 k^2 + A_2 k$, и если $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, то всегда существует такое k , что $A(k) < 0$. Таким образом, доказательство теоремы существования колебаний сводится к нахождению функций u_1 с требуемыми свойствами для каждого типа колебаний. Далее приведены соответствующие функции.

α -мода колебаний. Непрерывная составляющая имеет вид

$$u_0 = (\sin(3\pi y) \sin(\pi z) - \sin(\pi y) \sin(3\pi z)) \cos(\pi x/(2R)),$$

разрывная составляющая — $u_1 = k(y - z) \cos(\pi x/b)$ в Ω_2 . Из асимптотического разложения (7) следует $A_1 = (48b^2 + \pi^2 - 10\pi^2 b^2)/(24b)$, $A_2 = 1792b/(9\pi^2)$.

β-мода колебаний. Непрерывная составляющая имеет вид

$$u_0 = (\sin(\pi y) + i \sin(\pi z)) \cos(\pi x / (2R)),$$

разрывная составляющая — $u_1 = k \cos(\pi x / b)$ в Ω_2 . Из асимптотического разложения (7) следует $A_1 = -\pi^2(b^2 - 1) / (2b)$, $A_2 = -8b$.

γ-мода колебаний. Непрерывная составляющая имеет вид

$$u_0 = \sin(\pi z) \sin(\pi y) \cos(\pi x / (2R)),$$

разрывная составляющая — $u_1 = k \cos(\pi x / b)$ в Ω_2 . Из асимптотического разложения (7) следует $A_1 = 2\pi^2(1 - 2b^2) / b$, $A_2 = -128b / \pi$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Собственные колебания типа α-, β-, γ-мод около элементарной ячейки сотовой решетки пластин в канале квадратного сечения существуют всегда.*

Аналогично [3] на основе неравенства (6) при $R = b/2$ и представлений решений (3), (4) доказываются следующие теоремы:

Теорема 2. *Частоты колебаний для α-мод принадлежат интервалу $(2\pi, \sqrt{10}\pi)$.*

Теорема 3. *Количество K мод колебаний, расположенных ниже σ_0 , удовлетворяет следующим неравенствам (берутся только целочисленные решения):*

- для α-мод $\max(1, \sqrt{6}b - 1) \leq K < \sqrt{6}b + 1$;
- для β-мод $\max(1, \sqrt{2}b - 1) \leq K < \sqrt{2}b + 1$;
- для γ-мод $\max(1, b - 1) \leq K < b + 1$.

Следует отметить, что для всех b каждое неравенство в теореме имеет не более двух целочисленных решений.

5. Численные исследования собственных колебаний. Для того чтобы функция

$$u(x, y, z) = \begin{cases} u_1(x, y, z) & \text{в } \Omega_1, \\ u_2(x, y, z) & \text{в } \Omega_2 \end{cases}$$

была решением задачи СКС, на границе областей Ω_1 и Ω_2 должны быть выполнены условия непрерывности решения и его нормальной производной (метод сшивания) [8]

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{на } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2. \quad (8)$$

Условия (8) означают, что функция $u(x, y, z)$, заданная в областях $\Omega_1, \dots, \Omega_6$, является слабым решением, которое в силу теории эллиптических уравнений является сильным решением задачи СКС.

После умножения соотношений (8) на $\cos(2\pi n_1 y) \cos(2\pi m_1 z)$ и интегрирования по переменным y, z от 0 до 1/2 получаются два соотношения. Подставляя одно из соотношений в другое, после упрощения получаем уравнение

$$\int_0^{1/2} \int_0^{1/2} \left(\begin{cases} \text{th}(-x\gamma_1) \\ \text{cth}(-x\gamma_1) \end{cases} u_1 - \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \cos(2\pi m_1 z) \cos(2\pi n_1 y) dy dz = 0,$$

где $\gamma_1 = \gamma(2m_1, 2n_1)$; $x = b/2$. Вид функции $u_1(x, y, z)$ и выбор переменных m_1, n_1 зависят от того, какой из трех случаев рассматривается.

Для α-, γ-мод получается следующая система:

$$\sum_{n,m}^{+\infty} b_{n,m} e^{-b\gamma/2} ((\gamma_1 + \gamma) e^{b\gamma_1/2} + (-1)^l (\gamma - \gamma_1) e^{-b\gamma_1/2}) \left(\frac{\pi(2n + 1)}{(\pi(2n + 1))^2 - (2\pi n_1)^2} \right) \times$$

$$\times \frac{\pi(2m+1)}{(\pi(2m+1))^2 - (2\pi m_1)^2} + (-1)^p \frac{\pi(2n+1)}{(\pi(2m+1))^2 - (2\pi n_1)^2} \frac{\pi(2m+1)}{(\pi(2n+1))^2 - (2\pi m_1)^2} = 0, \quad (9)$$

где суммирование начинается с $n = 1, m = 0$ при $n > m, p = 1$ для α -мод и с $n = 0, m = 0$ при $n \geq m, p = 0$ для γ -мод. Переменные n_1, m_1 изменяются в тех же пределах, что и переменные $n, m; \gamma = \gamma(2n+1, 2m+1)$.

Для β -мод получается следующая система ($n > m, n+m$ — нечетное число):

$$\sum_{n=1, m=0}^{+\infty} b_{n,m} e^{-b\gamma(n,m)/2} \left((\gamma_1 + \gamma) e^{b\gamma_1/2} + (-1)^l (\gamma - \gamma_1) e^{-b\gamma_1/2} \right) \times \\ \times \left(g(n, n_1)g(m, m_1) + (-1)^m i g(m, n_1)g(n, m_1) \right), \quad (10)$$

где $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}_+^2; g(n, n_1) = \int_0^{1/2} \cos(\pi n(y - 1/2)) \cos(2\pi n_1 y) dy$.

В системах (9), (10) число l выбирается четным (нечетным) для четных (нечетных) колебаний соответственно. Суммирование проводится по индексам m и n , т. е. суммы в уравнениях являются двойными. Эти суммы редуцировались двумя методами. В первом методе использовались квадратные частичные суммы, во втором — треугольные частичные суммы на основе канторовской нумерации пар натуральных чисел [9]. Канторовская нумерация пар чисел представляет собой биективную функцию $C: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Для решения задачи (2) нужно использовать модификацию этого отображения, так как в рассматриваемых модах множество индексов коэффициентов является не множеством \mathbb{Z}_+^2 , а его подмножеством.

Согласно лемме 2 для α -, γ -мод не требуется дополнительных соотношений для выполнения условия конечности энергии в окрестности кромки, для β -мод система (10) должна решаться вместе с соотношениями (5).

Численное исследование систем уравнений (9), (10) показало, что основной вклад в величину собственного значения дает первое слагаемое в сумме, соответствующей наименьшим значениям переменных n_1, m_1 . В обеих системах уравнений они равны. Первое слагаемое является простейшей аппроксимацией дисперсионного соотношения.

Первое слагаемое для α -, β -, γ -мод в случае четной моды имеет вид

$$\operatorname{tg}(\mu(\lambda)b/2) = \sqrt{\sigma_0^2 - \lambda^2}/\mu(\lambda), \quad (11)$$

в случае нечетной —

$$\operatorname{tg}(\mu(\lambda)b/2) = -\mu(\lambda)/\sqrt{\sigma_0^2 - \lambda^2}, \quad (12)$$

где $\mu(\lambda) = \sqrt{4\pi^2 - \lambda^2}$ для α -мод, $\mu(\lambda) = \lambda$ для β -, γ -мод; σ_0 — начало непрерывного спектра. Из этих формул для α -, β -, γ -мод следуют утверждения 1, 2.

Утверждение 1. Для четных (или нечетных) колебаний одной моды, соответствующей частоте λ , длины b_1 и b_2 пластин связаны соотношением $|b_1 - b_2| = 2\pi l/\mu(\lambda)$, где $l \in \mathbb{N}$.

Утверждение 2. Пусть длина b_1 соответствует четным колебаниям при частоте λ для одной моды, b_2 — нечетным колебаниям при той же частоте для той же моды, тогда справедливо соотношение $|b_1 - b_2| = \pi(2l+1)/\mu(\lambda)$, где $l \in \mathbb{N}$.

С использованием первого метода редукции построены графики зависимости частоты собственных колебаний от длины пластин для α -, β -, γ -мод с 15, 30, 15 членами разложения соответственно (рис. 2). Для обозначения четных мод на рис. 2 использован нижний индекс 0, нечетных — 1.

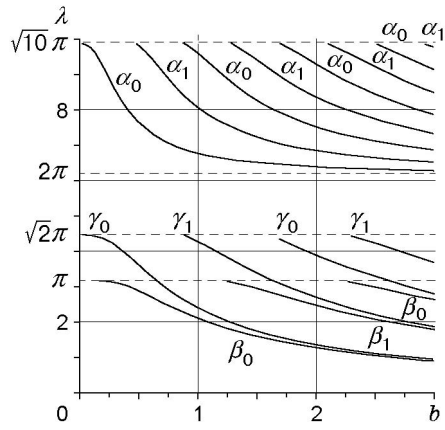


Рис. 2. Зависимости частоты собственных колебаний от длины пластин для α -, β -, γ -мод

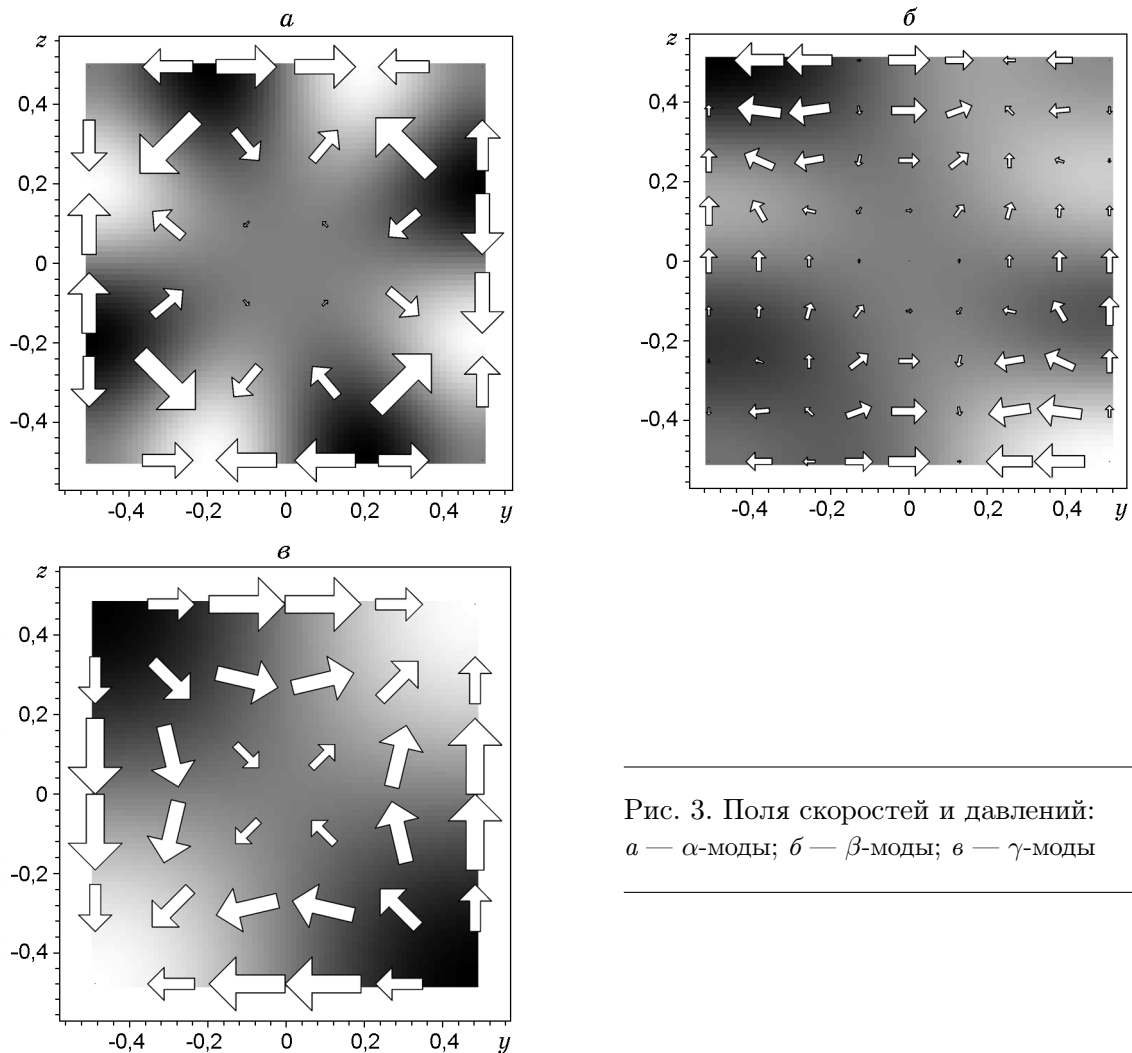


Рис. 3. Поля скоростей и давлений: *a* — α -моды; *б* — β -моды; *в* — γ -моды

Для достаточно больших длин пластин собственные значения, вычисленные по формулам (11), (12), отличаются от собственных значений соответствующих мод, представленных на рис. 2, менее чем на 0,1. Утверждения 1, 2 доказываются на основе (11), (12) — первых аппроксимаций дисперсионного соотношения. Данные, приведенные на рис. 2, позволяют предположить, что утверждения 1, 2 справедливы и в общем случае.

В случае α -, γ -мод при близком числе членов разложения в (9) для обоих методов редукации собственные значения различаются в 3–4-м знаке после запятой, с увеличением числа членов разложения количество совпадающих цифр увеличивается. Из численных экспериментов следует, что в случае α -, γ -мод второй метод редукации сходится быстрее и требует меньше времени для вычислений. В случае β -мод оба метода сходятся медленнее и количество совпадающих знаков после запятой меньше, чем в случае α -, γ -мод. В первом методе в случае α -, γ -мод для получения собственных значений с точностью до двух знаков после запятой достаточно взять 21 член ряда (9), для β -мод — 28 членов ряда (10).

На рис. 3 представлены поля скоростей и давлений для α -, β -, γ -мод в поперечном сечении канала для функции $u_1(x, y, z)$ при $x = 2$, $b = 2$, $c = 330$ м/с, $M = 0$, $H = 1$ м, $t = 0$, $\lambda = 6,44$; 1,31; 1,36 для α -, β -, γ -моды соответственно.

Заключение. Показано, что существует три типа собственных колебаний около элементарной ячейки сотовой решетки, отличающихся от типов колебаний около одной пластины в канале. Доказано, что эти колебания существуют всегда. Построены графики зависимости частот колебаний от длины пластин. Получены оценки количества мод для каждого типа колебаний. Выведены приближенные соотношения, связывающие длины пластин, соответствующие одной частоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. Голдстейн М. Е. Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
3. Сухинин С. В. Эоловы тона решетки пластин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 2. С. 171–186.
4. Сухинин С. В. Собственные колебания около пластины в канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 78–90.
5. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970. С. 37–40.
6. Хёнл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982. Т. 1, 4.
8. Миттра Р., Ли С. В. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
9. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.

*Поступила в редакцию 23/XI 2001 г.,
в окончательном варианте — 4/I 2002 г.*