

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Решается задача об излучении сдвиговых волн тонким цилиндрическим стержнем, жестко впаиваемым в упругое полупространство перпендикулярно свободной поверхности. В отличие от стационарной постановки, на основе которой обычно проводится исследование подобного рода задач [1], рассмотрена начально-краевая задача, позволяющая определить вклад нестационарности. Кроме того, анализ нестационарных решений полезен в некоторых вопросах инженерной практики, в том числе в задачах горного дела и строительства, например при оценке работы свайных фундаментов, мощных виброизлучателей, взаимодействующих с грунтом посредством анкерных связей.

1. Постановка задачи. Упругий стержень длины l и единичного радиуса ($R_0 = 1$, $l \gg 1$) впаиван в упругое полупространство $\{1 < r < \infty, z > 0\}$ так, что его ось совпадает с осью z (рис. 1). К торцу стержня $\{z = 0, r \leq 1\}$ в нулевой момент времени приложена нормальная гармоническая нагрузка $Q(t) = H_0(t)\sin\omega t$ ($H_0(t)$ — функция Хевисайда) с частотой $\omega \gg l/c$ (c — скорость продольной волны в стержне). Заглубленный торец $\{z = l, r \leq 1\}$ свободен от напряжений; длина бегущей по стержню волны $\lambda \gg 1$ ($\lambda \sim 2\pi c/\omega$). В этих предположениях для описания движения стержня приемлема одномерная волновая модель с перемещением $V(t, z)$.

Задача о колебаниях стержня, впаиваемого в упругое полупространство, сводится к совместному решению дифференциального уравнения упругого стержня

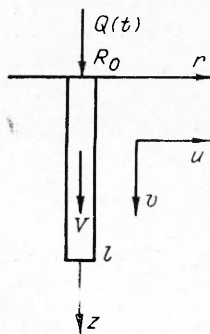
$$(1.1) \quad V_{tt} - V_{zz} + F(z, t) = 0$$

и уравнений динамики упругой среды A

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{zz} + b^2(v_{rr} + v_r/r) + (a^2 - b^2)(u_{rz} + u_z/r), \\ u_{tt} &= a^2(u_{rr} + u_r/r - u/r^2) + b^2 u_{zz} + (a^2 - b^2)v_{rz}. \end{aligned}$$

Здесь $v(r, z, t)$, $u(r, z, t)$ — осевое и радиальное перемещения точек среды; a , b — скорости продольной и поперечной волн; $F(z, t)$ — реакция среды на перемещения стержня. В качестве единиц измерения приняты радиус R_0 , плотность стержня ρ_0 и его модуль Юнга E_0 (при этом единицей скорости служит скорость звука в стержне, а единицей времени — время, за которое звуковая волна в стержне проходит расстояние, равное его радиусу).

Решение ряда динамических задач о действии на границе полуплоскости нормальных нагрузок [2, 3] показывает, что амплитуды деформаций и их частных производных в вертикальном направлении существенно превышают соответствующие величины в радиальном. Это позволяет, приняв некоторые предположения о характере деформаций, перейти от точной теории упругости A к физически адекватной и математически простой модели деформируемой среды с одним перемещением B



Р и с. 1

$$(1.2.2) \quad v_{tt} = a^2 v_{zz} + b^2(v_{rr} + v_r/r),$$

которую используют в задачах динамики однонаправленных композитов [4—6]. При дополнительном предположении о преимущественном сдвиговом деформировании грунта приходим к чисто сдвиговой модели среды C [7]

$$(1.2.3) \quad v_{tt} = b^2(v_{rr} + v_r/r).$$

Рассмотрены также плоские варианты вышеперечисленных моделей, обозначенные A' , B' и C' . В этом случае для C' удастся получить аналитическое решение, при помощи которого легко проанализировать влияние различных параметров задачи на характер волнового процесса. Качественная близость численного решения плоской и осесимметричной задач позволяет распространить полученные результаты на общий случай.

Допустим, что поверхность полупространства свободна от напряжений, а между стержнем и средой осуществлен жесткий контакт. Тогда реакция среды определяется напряжением сдвига на боковой поверхности стержня

$$(1.3) \quad F(z, t) = -2\tau_{rz}|_{r=1},$$

$\tau_{rz} = \rho b^2(v_r + u_z)$ в модели A , $\tau_{rz} = \rho b^2 v_r$ в B, C ; ρ — относительная плотность среды. Граничные условия на поверхности полупространства

$$(1.4) \quad \partial V/\partial z = Q(t) \quad (z = 0, r \leq 1);$$

$$(1.5) \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad (z = 0, r > 1).$$

В моделях B, C (1.5) принимает вид $\partial v/\partial z = 0$. На боковой поверхности стержня ставится условие непрерывности смещений

$$(1.6) \quad V = v, u = 0 \quad (r = 1).$$

Нижний торец свободен от напряжений

$$(1.7) \quad \partial V/\partial z = 0 \quad (z = l).$$

Для завершения постановки задачи осталось наложить условия излучения на бесконечности

$$(1.8) \quad u = v = 0 \quad (\sqrt{r^2 + z^2} > at)$$

и задать начальные условия (не ограничивая общности примем их нулевыми)

$$(1.9) \quad u|_{t=0} = v|_{t=0} = V|_{t=0} = 0.$$

Итак, в области $\{r > 0, z > 0\}$ требуется найти решение уравнений (1.1) — (1.2) с граничными (1.3) — (1.8) и начальными (1.9) условиями.

2. Аналитическое решение. Вначале сформулируем основные выводы дисперсионного анализа приближенных моделей. Набор собственных частот (все они комплексные) различается по моделям B, B', C, C' лишь в области первых нескольких значений. С ростом номера частоты ее действительная часть стремится к соответствующей собственной частоте колебания свободного стержня $\pi k/l$ (например, при $k = 4$ отличие менее 1 %). Мнимая часть, характеризующая затухание волны, стремится к величине $-\gamma\sqrt{1-a^2}$, где $\gamma = \rho b$. Таким образом, при возбуждении системы на частотах, близких к $\pi k/l$, могут реализоваться резонансы. Проявление основных различий между приближенными моделями следует ожидать в диапазоне длинных волн.

В [8] для чисто сдвиговой плоской модели C' в случае ступенчатой нагрузки, заданной в виде $Q(t) = H_0(t)$, получено аналитическое решение

$$(2.1) \quad \dot{V}_H(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\gamma t) \{I_0(\gamma \sqrt{t^2 - (z + 2ln)^2}) H_0(t - (z + 2ln)) + I_0(\gamma \sqrt{t^2 - (2l(n+1) - z)^2}) H_0(t - (2l(n+1) - z))\},$$

I_0 — модифицированная функция Бесселя. Решение для случая синусоидальной нагрузки находится из (2.1) с помощью интеграла Дюамеля

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad V(t, z) &= \int_0^t \sin(\omega(t - \tau)) \dot{V}_H(\tau, z) d\tau = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{z_{1n}}^t \sin(\omega(t - \tau)) \exp(-\gamma\tau) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - z_{1n}^2}) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{z_{2n}}^t \sin(\omega(t - \tau)) \exp(-\gamma\tau) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - z_{2n}^2}) d\tau \right\}, \\
 &\quad z_{1n} = z + 2ln, \quad z_{2n} = 2l(n + 1) - z.
 \end{aligned}$$

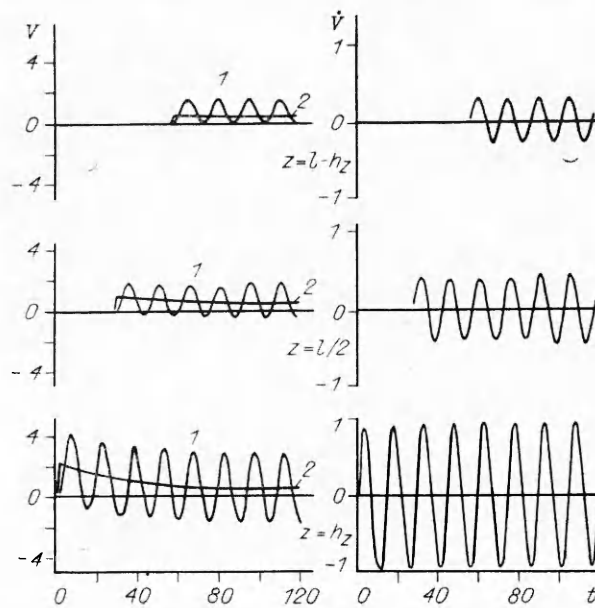
Для $t \gg z_*$ можно показать справедливость следующей асимптотической формулы:

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad &\int_{z_*}^t \sin(\omega(t - \tau)) \exp(-\gamma\tau) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - z_*^2}) d\tau \approx \\
 &\approx \exp(-\gamma t) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - z_*^2}) \frac{\omega}{\gamma^2 + \omega^2} - \exp(-\gamma z_*) \cos(\omega(t - z_*) + \\
 &\quad + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}) \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \approx \frac{1}{\omega} \left[\exp(-\gamma t) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - z_*^2}) - \right. \\
 &\quad \left. - \exp(-\gamma z_*) \cos(\omega(t - z_*)) \right].
 \end{aligned}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и ограничиваясь первым членом суммы, что соответствует учету прямой и первой отраженной волн, получаем асимптотическое решение задачи (1.1) — (1.9) в модели C' , справедливое для больших t , которое, как будет показано ниже, вполне приемлемо для описания результатов в практических случаях:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad V(t, z) &= \frac{1}{\omega} \{ [\exp(-\gamma t) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - z^2}) - \\
 &- \exp(-\gamma z) \cos(\omega(t - z))] H_0(t - z) + [\exp(-\gamma t) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - (2l - z)^2}) - \\
 &- \exp(-\gamma(2l - z)) \cos(\omega(t + z - 2l))] H_0(t + z - 2l) \}.
 \end{aligned}$$

Смещение в прямой волне, распространяющейся по стержню, определяется первыми двумя слагаемыми (2.4). Вклад от нестационарности



Р и с. 2

сти $\exp(-\gamma t) I_0(\gamma \sqrt{t^2 - z^2}) \times H_0(t - z)$ представляет собой функцию, которая мгновенно достигает максимального значения, а затем медленно убывает со временем по экспоненциальному закону (кривая 2 на рис. 2, $\lambda = 2\pi/\omega = 15$, $b = 0,1$, $a = 0$, $\rho = 0,3$, $l = 60$, $h_z = 1$). Второе слагаемое — возмущение на несущей частоте с амплитудой, постоянной по времени и затухающей с ростом z . В решении присутствует лишь один параметр среды — γ , характеризующий затухание функции $V(t, z)$. В случае полубесконечного стержня решение (2.2) существенно упрощается, а

асимптотика определяется первыми двумя членами формулы (2.4).

3. Численное решение. Для численного решения уравнений (1.1), (1.2) использовалась явная конечно-разностная схема типа «крест». Паразитные осцилляции, возникающие при замене дифференциальных уравнений разностными, устранялись по методу минимизации численной дисперсии [9].

Рассмотрим систему конечно-разностных уравнений для упрощенных моделей среды

$$(3.1) \quad m \frac{V_j^{n+1} - 2V_j^n + V_j^{n-1}}{\tau^2} = \Lambda_{ij} V_j^n + G \frac{v_{j1}^n - V_j^n}{h_r};$$

$$(3.2) \quad \frac{v_{ji}^{n+1} - 2v_{ji}^n + v_{ji}^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \Lambda_{jj} v_{ji}^n + b^2 \left(\Lambda_{ii} v_{ji}^n + d \frac{v_{ji}^n - v_{ji-1}^n}{2h_r(R + (i-1)h_r)} \right).$$

Здесь τ , h_r , h_z — шаги разностной сетки; Λ_{ij} , Λ_{jj} — разностные операторы второго порядка по координатам $r(i)$ и $z(j)$; m — масса узла; $G = 2\rho b^2$. При $a = 0$ получаем сдвиговые модели, при $d = 1$ или $d = 0$ — осесимметричный и плоский случаи. Конечно-разностные уравнения для точной теории упругости A не имеют принципиальных отличий от (3.2), но более громоздки в записи и поэтому не приводятся.

С помощью стандартного фурье-анализа выводим условия устойчивости для схемы (3.1)

$$(3.3) \quad \tau \leq h_z \sqrt{m(1 + Gh_z^2/h_r^2)^{-1/2}},$$

для схемы (3.2)

$$\tau \leq \begin{cases} \left(\frac{a^2}{h_z^2} + \frac{b^2}{h_r^2} \right)^{-1/2} & (B, C), \\ \left[\max(a, b) \left(\frac{1}{h_z^2} + \frac{1}{h_r^2} \right)^{1/2} \right]^{-1} & (A). \end{cases}$$

Оптимальными параметрами разностной сетки, обеспечивающими максимальное сближение областей зависимости системы дифференциальных и конечно-разностных уравнений, являются в вертикальном направлении

$$(3.4) \quad h_z = \tau,$$

в радиальном —

$$h_r = \begin{cases} \tau (b(1 - (a\tau/h_z)^2)^{1/2})^{-1} & (B, C), \\ \tau (\max(a, b)(1 - (a\tau/h_z)^2)^{1/2})^{-1} & (A). \end{cases}$$

Из (3.3) следует, что (3.4) удовлетворяется, только если $m = 1 + \varepsilon_m$ ($\varepsilon_m = Gh_z^2/h_r^2$), что соответствует некоторой присоединенной к стержню массе. Наличие такого погранслоя отвечает физическому существованию задачи, однако его величина в данном случае не связана с физическими характеристиками процесса, а диктуется требованиями устойчивости счета. Грубую оценку величины погранслоя в дискретной модели можно получить из условия совместного движения со стержнем примыкающего слоя среды толщиной $h_r/2$, тогда $\tilde{m} = 1 + \tilde{\varepsilon}_m$ ($\tilde{\varepsilon}_m = \rho h_r/2$). В расчетах практических задач $\varepsilon_m < \tilde{\varepsilon}_m$.

При реализации численного алгоритма бесконечная область $\{z \geq 0\} \times \{r \geq 0\}$ заменяется конечной $\{0 \leq z \leq L\} \times \{0 \leq r \leq R\}$. Условия отсутствия источников энергии на бесконечности (1.8) можно заменить на приближенные:

$$(3.5) \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{b} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (r = R), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (z = L),$$

соответствующие условиям излучения в одномерном случае, где они непосредственно вытекают из решения Даламбера для одномерного волнового уравнения. В модели A к ним следует добавить условия на радиальное

смещение

$$(3.6) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} (r = R), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial t} (z = L).$$

Возникает вопрос, насколько точны (3.5) и (3.6). Заметим, что для сдвиговых моделей C первое из условий (3.5) становится точным, а второе — лишним, так как отсутствует связь между горизонтальными слоями среды ($\partial v/\partial z = 0$). При этом в конечно-разностном алгоритме нет необходимости отодвигать границы дискретной области на большое расстояние (такое, чтобы за время счета отраженная волна не достигала точки наблюдения). Достаточно взять $L = l$, а в радиальном направлении ограничиться несколькими узлами сетки. В B, B' условия (3.5) становятся приближенными и приводят к появлению частичных отражений от фиктивных границ. Однако, как показали расчеты, проведенные в широком диапазоне параметров моделей B и B' , влияние фиктивных границ на количественные характеристики процесса несущественно. Качественная же картина колебаний не меняется. Так, при увеличении вдвое ($L = 2l$) численные результаты изменились не более чем на 1–2%. Удаление боковой границы R от $5h_r$ до $30h_r$ дает погрешность менее 5%. Гораздо менее точными являются (3.5), (3.6) в модели A . Здесь границы области приходится отодвигать на такое расстояние, чтобы отраженная волна за расчетное время не достигала точки наблюдения.

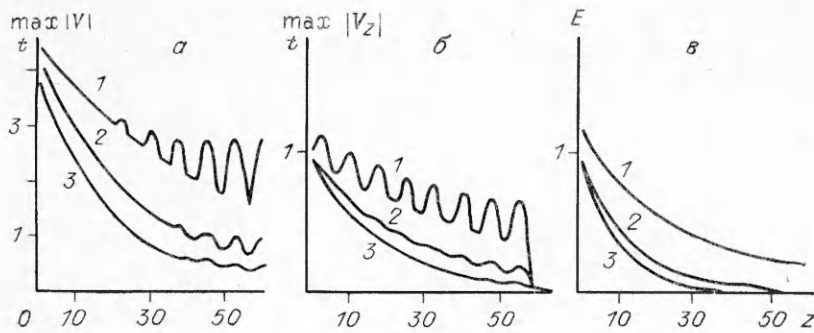
Расчеты при действии на верхнем торце стержня синусоидальной нагрузки $Q(t) = H_0(t) \sin(2\pi t/\lambda)$ проводились до стабилизации процесса по времени.

4. Сравнение моделей по результатам расчетов. Расчеты показали, что качественно картина колебаний одна и та же для всех моделей. Поэтому ограничимся рассмотрением модели C' . Кривые 1 на рис. 2 — осциллограммы смещений в трех точках стержня: вблизи поверхности полупространства ($z = h_z = 1$), в середине стержня ($z = l/2$) и в окрестности нижнего торца ($z = l - h_z$). Справа — осциллограммы скоростей. Видно, что чем ближе точка наблюдения к дневной поверхности, тем меньше энергии доносит до нее отраженная волна, так как в процессе распространения часть энергии рассеивается в окружающую среду. Если в точке $z = l - h_z$ в формировании амплитуды участвуют и прямая и отраженная волны, причем их вклады приблизительно равны, то в точке $z = l/2$ с приходом отраженной волны в момент $t = 3l/2$ амплитуды меняются незначительно (кривая 2 описывает вклад от нестационарности лишь для прямой волны). Отметим, что перемещение, вычисленное по асимптотике (2.4), практически совпадает с 1, максимальное отличие в данном расчетном примере не превышает 2%.

Результаты сравнительного анализа характеристик волнового процесса сведены в табл. 1 ($V_m = \max_t |V(t, l)|$, $\dot{V}_m = \max_t |\dot{V}(t, l)|$, $b = 0,1$, $a = 0,2$, $\rho = 0,25$, $l = 60$, I — осесимметричная задача, II — плоская). Здесь представлены пиковые значения перемещений и скоростей в сечении $z = l$, где наблюдаются наибольшие количественные различия между моделями. Рядом приведены относительные погрешности:

$$\epsilon_{B,C} = \left| \frac{V_m^C - V_m^B}{V_m^C} \right| \cdot 100\%, \quad \epsilon_{A',B',C'} = \max \left\{ \left| \frac{V_m^{B'} - V_m^{A'}}{V_m^{A'}} \right|, \left| \frac{V_m^{C'} - V_m^{A'}}{V_m^{A'}} \right| \right\} \cdot 100\%,$$

$\epsilon_{I,II}$ — сравнение по всем предложенным моделям, включая асимптотическую формулу (2.4). Приведенные данные соответствуют расчетам для трех значений длины волны $\lambda = l/2$; $l/3$; $l/6$. Как было показано при дисперсионном анализе, основные различия между плоскими и осесимметричными моделями наблюдаются в области длинных волн. С другой стороны, чем длиннее волна, тем ближе упрощенные модели B, C к точной теории упругости A . Различия между моделями с одним перемещением (B) и чисто сдвиговыми моделями (C) незначительны на всем диапазоне



Р и с. 3

колебаний. Отличие (2.4) от численного решения по модели C' не превышает 3 %.

Таким образом, переход от A к B и C вполне оправдан. При изучении качественного поведения волны в стержне можно воспользоваться любой из обсуждаемых моделей. Интерпретируя численные результаты в длинноволновом диапазоне, необходимо различать плоскую и осесимметричную постановки. В дальнейшем при изучении влияния геометрических и физических параметров системы на волновой процесс за основу взята модель B .

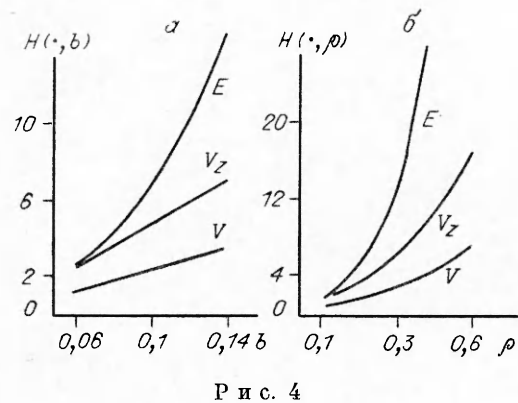
5. Анализ результатов. Все параметры волнового процесса можно условно поделить на три группы: a , b , ρ — относительные физические параметры исследуемой среды; l — геометрический параметр; λ — длина волны вынужденных колебаний.

Рассмотрим вначале влияние параметров среды. Как видно из сравнительного анализа моделей, скорость волны расширения практически не оказывает влияния на волновую картину. Так, при изменении a от 0 до $2b$ максимальное различие по амплитудам колебания скорости достигало 7 % во всем диапазоне колебаний. Естественно, что при увеличении a до величины порядка 6—10 b влияние этого параметра становится заметным, но в большинстве реальных сред (например, в грунтах, горных породах) такое соотношение скоростей не реализуется. Таким образом, процесс распространения волны в стержне слабо зависит от скорости продольной волны в окружающей среде. Если говорить о решении обратной задачи (т. е. о нахождении параметров среды из анализа волновой картины в стержне), то определение a проблематично.

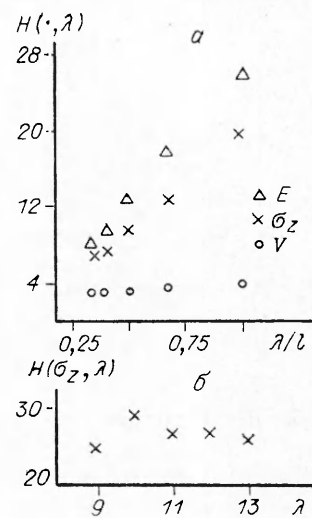
В полученном аналитическом решении (2.2) и его асимптотике (2.4) присутствуют два параметра: ω — частота возбуждаемой нагрузки и $\gamma = \rho b$ (ρ — относительная плотность среды, b — относительная скорость распространения сдвиговой волны). Естественно предположить, что при фиксированной частоте именно γ окажет самое заметное влияние на волновой процесс. Численные расчеты, проведенные в широком диапазоне параметров, полностью подтвердили это предположение. На рис. 3 приведены эпюры пиковых абсолютных значений перемещения, напряжения,

Т а б л и ц а 1

	I					II					
	λ	B	$\varepsilon_{B,C}, \%$	C	$\varepsilon_{I,II}, \%$	A'	$\varepsilon_{A',B',C'}, \%$	B'	$\varepsilon_{B',C'}, \%$	C'	(2.4)
V_m	$l/2$	2,97	1,6	2,92	28,8	4,06	1,2	4,10	1,2	4,09	4,05
	$l/3$	2,29	2,6	2,23	20,9	2,82	4,6	2,76	2,5	2,72	2,69
	$l/6$	1,17	9,3	1,29	8,6	1,56	2,5	1,28	3,1	1,24	1,26
\dot{V}_m	$l/2$	0,39	4,2	0,37	18	0,44	2,7	0,45	4,4	0,43	0,43
	$l/3$	0,48	5,2	0,45	10,4	0,46	10,4	0,45	7,3	0,42	0,42
	$l/6$	0,38	7,3	0,35	8,9	0,45	22,7	0,35	1,7	0,35	0,35



Р и с. 4



Р и с. 5

энергии в сечении стержня как функции координаты z . Кривые отвечают различным значениям плотности среды ρ ($1-0,2$; $2-0,4$; $3-0,6$). На рис. 3 и всех последующих (если не оговорено противное) все параметры зафиксированы: $l = 60$, $\lambda = l/4$, $\rho = 0,25$, $b = 0,1$, $a = 0,2$. Видно, что с ростом плотности затухание волновых характеристик увеличивается. Волнистый характер кривых связан с разностью фаз складывающихся прямой и отраженных волн.

Введем функционал $H(f, \beta)$, характеризующий затухание некоторой волновой функции $f(z)$ при прохождении волны по стержню от верхнего торца к нижнему для данного значения некоторого параметра β :

$$H(f, \beta) = \max_t |f(0)| / \max_t |f(l)|.$$

Для немонотонно убывающих функций типа перемещения, напряжения берется осредненная величина. На рис. 4 показаны графики зависимости затухания перемещения, напряжения, энергии от различных параметров задачи. С ростом γ (соответственно, с увеличением ρ и b) функция H монотонно возрастает для всех основных амплитудных и энергетических характеристик волнового процесса в стержне.

Рис. 5, а иллюстрирует зависимость $H(\cdot, \lambda)$. Длина волны менялась от $l/6$ до $2l$. Как и следовало ожидать, $H(\cdot, \lambda)$ растет с увеличением λ . Более длинные волны лучше излучаются в среду, и все волновые характеристики быстро затухают. Тем не менее из-за наличия частичного резонанса для некоторых длин волн функция $H(\cdot, \lambda)$ не является монотонно возрастающей. На рис. 5, б, где представлены значения $H(\cdot, \lambda)$ для $\lambda = 9, 10, 11, 12$ видно, что на резонансных длинах волн ($2l/\lambda \in \mathbf{Z}$) затухание слабее.

Монотонный характер затухания амплитуды основных характеристик волнового процесса позволяет перейти к рассмотрению обратной задачи определения параметров окружающей среды по известной волновой картине в стержне. Искомыми могут быть плотность среды ρ или скорость сдвиговой волны b .

Т а б л и ц а 2

Модель	λ					
	$l/6$	$\epsilon, \%$	$l/3$	$\epsilon, \%$	$l/2$	$\epsilon, \%$
<i>B</i>	0,02616	4,64	0,02797	11,9	0,03060	22,4
<i>C</i>	0,02670	6,8	0,02855	14,2	0,03106	24,2
<i>A'</i>	0,02143	14,3	0,02452	1,92	0,02520	0,8
<i>B'</i>	0,02457	1,72	0,0262	1,52	0,02468	1,28
<i>C'</i>	0,02507	0,28	0,02499	0,04	0,02487	0,52

Итак, пусть задано значение функционала $H(f, \beta)$ для некоторой характеристики волнового процесса $f(z)$. Требуется найти неизвестный параметр среды β . Для решения обратной задачи использована (2.4):

$$(5.1) \quad H(V, \gamma) = \max_t |V^{ac}(0)| / \max_t |V^{ac}(l)| = h_0,$$

h_0 получаем из численного решения прямой задачи для различных упрощенных моделей; λ зафиксирована таким образом, чтобы удовлетворялись все ограничения, наложенные при введении одномерной модели стержня и упрощенных моделей среды. Параметр γ определялся из (5.1). В проведенном численном эксперименте $\gamma = 0,025$. В табл. 2 приведены найденные из (5.1) значения γ при решении обратной задачи для различных λ и относительные погрешности по сравнению с истинным γ ($l = 60$, $a = 2b$).

В заключение сформулируем основные выводы. 1. Обоснован переход от теории упругости к упрощенным моделям среды при описании нестационарных колебаний упругого стержня в полупространстве. 2. Проанализировано влияние свойств среды на характер волновой картины в стержне и показано, что основными параметрами, ответственными за затухание колебаний, являются частота возбуждаемой нагрузки, плотность и сдвиговая жесткость среды. Влияние объемной жесткости незначительно. 3. В практических расчетах можно при построении решения использовать приближенные аналитические оценки, полученные для сдвиговой модели среды.

Автор выражает благодарность Х. Б. Ткачу за постановку задачи и М. В. Степаненко за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.
2. Рахматулин Х. А. О распространении упругопластических волн в полупространстве // ПММ.— 1959.— Т. 23, вып. 3.
3. Ормонбеков Т. Взаимодействие конструкций со средой.— Фрунзе: Илим, 1983.
4. Михайлов А. М. Динамика однонаправленного стеклопластика // ПМТФ.— 1974.— № 4.
5. Степаненко М. В. О динамике разрушения однонаправленного стеклопластика // ПМТФ.— 1979.— № 4.
6. Степаненко М. В. Численный эксперимент по динамике разрушения композитного материала // Механика композит. материалов.— 1981.— № 1.
7. Outwater I. O., Jr. The mechanics of plastics reinforcement in tension // Modern Plastics.— 1956.— V. 33, N 7.
8. Михайлов А. М. Неосесимметричное динамическое нагружение оболочки с ребрами жесткости // Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 1.
9. Абдукадыров С. А., Пинчукова Н. И., Степаненко М. В. Об одном способе численного решения уравнений динамики упругих сред и конструкций // ФТПРПИ.— 1984.— № 6.

г. Новосибирск

Поступила 2/XII 1988 г.,
в окончательном варианте — 24/III 1989 г.

УДК 621.762

С. Е. Александров, Б. А. Друянов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УСТАНОВИВШЕЙСЯ ЭКСТРУЗИИ УПЛОТНЯЕМОГО МАТЕРИАЛА

При прессовании пористых пластичных материалов (металлов) обработке обычно подвергается предварительно уплотненная заготовка, представляющая собой связанное, хотя и поврежденное тело (поры, микротрещины), плотность которого может составлять 90...95 % от плотности твердой фазы. Экструзия начнется, когда давление пуансона станет достаточно большим. Геометрическая схема процесса показана на рис. 1: 1 — матрица, 2 — пуансон, 3 — заготовка, 4 — контейнер. Установившееся