

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ШТАМПОВ С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

И. М. Архипова, В. Ю. Чирков

Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова,
198005 Санкт-Петербург
E-mail: wchir@yandex.ru

Изучена задача медленного динамического контактного взаимодействия системы удаленных друг от друга штампов с поверхностью упругого полупространства при отсутствии трения в предположении, что диаметры площадок контакта малы по сравнению с минимальным расстоянием между штампами, а время пробега сдвиговой волны расстояния, равного диаметру штампа, сопоставимо с временным масштабом процесса. Построена асимптотическая модель первого порядка. В качестве примера рассмотрен случай установившихся колебаний системы двух штампов.

Ключевые слова: колебания, штампы, упругое полупространство, задача Лэмба, асимптотические методы.

1. Постановка задачи. Пусть на границе упругого (с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) полупространства выделены точки P^1, \dots, P^N с координатами (x_1^j, x_2^j) , $j = 1, 2, \dots, N$. Наименьшее из возможных расстояний $d_{jk} = |P^j - P^k|$, $j \neq k$ обозначим через d .

Рассмотрим динамическую контактную задачу для системы $N \geq 2$ штампов, имеющих центры в данных точках и занимающих в плане области $\omega_\varepsilon^1, \dots, \omega_\varepsilon^N$ малого (порядка εd) диаметра. Здесь и далее $\varepsilon > 0$ — малый безразмерный параметр. Область ω_ε^j получается сжатием в ε^{-1} раз некоторой фиксированной плоской области ω_1^j :

$$\omega_\varepsilon^j = \{(x_1, x_2): \varepsilon^{-1}(x_1 - x_1^j, x_2 - x_2^j) \in \omega_1^j\}.$$

Для простоты будем считать, что область ω_1^j на плоскости "растянутых" координат

$$(\xi_1^j, \xi_2^j) = \varepsilon^{-1}(x_1 - x_1^j, x_2 - x_2^j)$$

содержится в круге радиусом $d/2$ с центром в начале координат. Тогда при любых значениях параметра $\varepsilon \in (0, 1)$ области $\omega_\varepsilon^1, \dots, \omega_\varepsilon^N$ не будут иметь самопересечений.

Будем считать, что штампы имеют плоские подошвы и в течение всего времени движения плотный контакт подошв с поверхностью упругого основания не нарушается. Обозначим через $\delta_0^j(t)$ и $\beta_1^j(t)$, $\beta_2^j(t)$ соответственно зависящие от времени t заданные вертикальное перемещение центра штампа и углы поворота штампа относительно осей, проходящих через его центр и параллельных координатным осям Ox_1 и Ox_2 .

Предполагается, что трение под подошвами штампов пренебрежимо мало. Тогда плотности контактных давлений $p^1(t, x_1, x_2), \dots, p^N(t, x_1, x_2)$ на границе упругого полупространства в соответствии с решением задачи Лэмба удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений [1, 2]:

$$\sum_{k=1}^N (D_\varepsilon^k p^k)(t, x_1, x_2) = \delta_0^j - \beta_2^j(x_1 - x_1^j) + \beta_1^j(x_2 - x_2^j), \quad (x_1, x_2) \in \omega_\varepsilon^j. \quad (1.1)$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, N$; D_ε^k — линейный интегральный оператор:

$$(D_\varepsilon^k p^k)(x_1, x_2) = \int_0^t \iint_{\omega_\varepsilon^k} \frac{\partial}{\partial(t-\tau)} G_3(t-\tau, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) p^k(\tau, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\tau, \quad (1.2)$$

$G_3(t, r)$ — вертикальное перемещение точек поверхности упругого полупространства, обусловленное действием постоянной единичной сосредоточенной силы, внезапно приложенной на границе в начале координат (с полярным радиусом $r = 0$) в момент времени $t = 0$.

Справедливо следующее представление [3]:

$$G_3(t, r) = T_3(r)[H(t - r/c_1)/2 + H(t - r/c_2)/2 + f_{12}(c_2 t/r)H(t - r/c_1)H(r/c_2 - t) - f_{23}(c_2 t/r)H(t - r/c_2)H(r/c_3 - t)]. \quad (1.3)$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда; c_1, c_2 — скорости волн растяжения и сдвига; c_3 — скорость волн Рэлея; $T_3(r) = (1 - \nu^2)(\pi E)^{-1} r^{-1}$ — вертикальное смещение точек поверхности упругого полупространства в задаче Буссинеска; функции $f_{12}(c_2 t/r), f_{23}(c_2 t/r)$ определяются по формулам

$$f_{12}(c_2 t/r) = -q_1(c_2^2 t^2/r^2 - p_1)^{-1/2} + q_2(c_2^2 t^2/r^2 - p_2)^{-1/2} - q_3(p_3 - c_2^2 t^2/r^2)^{-1/2},$$

$$f_{23}(c_2 t/r) = 2q_3(p_3 - c_2^2 t^2/r^2)^{-1/2},$$

где q_1, q_2, q_3 — коэффициенты:

$$q_1 = \frac{p_1(\alpha - p_1)\sqrt{1 - p_1}}{2(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}, \quad q_2 = \frac{p_2(\alpha - p_2)\sqrt{1 - p_2}}{2(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)},$$

$$q_3 = \frac{p_3(\alpha - p_3)\sqrt{p_3 - 1}}{2(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)}, \quad \alpha = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)},$$

p_1, p_2, p_3 — корни уравнения

$$p^3 - (2 - \nu)p^2 + (1 - \nu)p - (1 - \nu)/8 = 0. \quad (1.4)$$

При $0 < \nu < \nu_*$ в качестве p_3 выбирается наибольший из корней, а при $\nu_* < \nu < 1/2$ — единственный вещественный корень $p_3 = c_2^2/c_3^2$. При этом

$$\nu_* = (1/24)(388 + 114\sqrt{114})^{1/3} - (13/3)(388 + 114\sqrt{114})^{-1/3} + 1/6 \approx 0,263.$$

В случае $\nu = \nu_*$ уравнение (1.4) имеет кратные корни. В данной работе этот случай не рассматривается.

При $\nu = 1/4$ (это значение обычно используется в сейсмологии [4]) $q_1 = \sqrt{3}/12, q_2 = \sqrt{3\sqrt{3} - 5}/12, q_3 = \sqrt{3\sqrt{3} + 5}/12, p_1 = 1/4, p_2 = (3 - \sqrt{3})/4, p_3 = 3 + \sqrt{3}/4, \alpha = 1/3$.

Положим

$$G_3(t, r) = T_3(r) + g_3(t, r). \quad (1.5)$$

Подставляя выражение (1.5) в (1.2), получим [5]

$$G_3(t, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) * \frac{\partial p^k}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = T_3(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)[p^k(t, \mathbf{y}) - p^k(0, \mathbf{y})] + g_3(t, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) * \frac{\partial p^k}{\partial t}(t, \mathbf{y}),$$

где

$$G_3(t, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) * \frac{\partial p^k}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = \int_0^t G_3(t - \tau, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{\partial p^k}{\partial \tau}(\tau, \mathbf{y}) d\tau.$$

При этом формула (1.2) принимает вид

$$(D_\varepsilon^k p^k)(t, \mathbf{x}) = \iint_{\omega_\varepsilon} g_3(t, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) p^k(0, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \iint_{\omega_\varepsilon^k} T_3(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) p^k(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \iint_{\omega_\varepsilon^k} g_3(t, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) * \frac{\partial p^k}{\partial t}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1) должны быть дополнены начальными условиями, определяющими положения и скорости штампов при $t = 0$. Если в начальный момент времени упругое полупространство находится в недеформированном состоянии ($p^j(0, x_1, x_2) \equiv 0$), то можно положить $\delta_0^j(0) = \beta_1^j(0) = \beta_2^j(0) = 0$ и $\dot{\delta}_0^j(0) = \dot{\beta}_1^j(0) = \dot{\beta}_2^j(0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Однако предлагаемый ниже метод приближенного решения рассматриваемой динамической контактной задачи не позволяет описать начальный этап движения, существенно зависящего от начальных условий.

2. Влияние удаленных друг от друга штампов. Следуя подходу, используемому в работе [6], выделим какой-либо штамп, зафиксировав номер j , и запишем уравнение (1.1) в виде

$$(D_\varepsilon^j p^j)(t, \mathbf{x}) = \delta_0^j - \beta_2^j(x_1 - x_1^j) + \beta_1^j(x_2 - x_2^j) - \sum_{k \neq j} (D_\varepsilon^k p^k)(t, \mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Используя соотношение $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1} = d_{jk}^{-1} + O(\varepsilon)$, получаем

$$\frac{\pi E}{1 - \nu^2} \iint_{\omega_\varepsilon^k} T_3(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) p^k(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{F_3^{\varepsilon k}(t)}{d_{jk}} + \dots \quad (2.2)$$

Здесь $F_3^{\varepsilon k}$ — результирующая, определяемая формулой

$$F_3^{\varepsilon k} = \iint_{\omega_\varepsilon^k} p^k(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Выражения для членов порядка ε и ε^2 в разложении (2.2) приведены в работе [6].

Рассмотрим третий интеграл в правой части (1.6). Согласно представлениям (1.3) и (1.5) по истечении некоторого промежутка времени с момента начала движения выполняется соотношение

$$-T_3(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{-1} g_3(t, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) * \frac{\partial p^k}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = - \int_0^{c_1^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\partial p^k}{\partial(t-\tau)}(t-\tau, \mathbf{y}) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{c_1^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{c_2^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left\{ -\frac{1}{2} + f_{12}\left(\frac{c_2\tau}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) \right\} \frac{\partial p^k}{\partial(t-\tau)}(t-\tau, \mathbf{y}) d\tau - \\
& - \int_{c_2^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{c_3^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} f_{23}\left(\frac{c_2\tau}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) \frac{\partial p^k}{\partial(t-\tau)}(t-\tau, \mathbf{y}) d\tau. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Аналогично (2.2) устанавливается разложение

$$\iint_{\omega_\varepsilon^k} g_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p^k}{\partial t}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = g_3(t, d_{jk}) * \frac{dF_3^{\varepsilon k}}{dt}(t) - \dots, \quad (2.4)$$

которое, как и исходное представление (2.3), имеет силу только при $t > c_3^{-1}(d_{jk} + d)$.

3. Медленное движение изолированного штампа. Рассмотрим интеграл в левой части уравнения (2.1) при $\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^j$ и $\mathbf{y} \in \omega_\varepsilon^j$. Справедливо следующее разложение [5]:

$$\frac{\pi E}{1-\nu^2} c_2 g_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p^j}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = -\Lambda_0 \frac{\partial p^j}{\partial t}(t, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.1)$$

Здесь

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \beta^{-1} - \int_{\beta^{-1}}^1 f_{12}(\tau) d\tau + \int_1^\gamma f_{23}(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

$\beta = c_1/c_2 = \alpha^{-1/2}$; $\gamma = c_2/c_3 = p_3^{1/2}$. Таким образом, при $t > c_3^{-1}\varepsilon d$, когда справедливо представление (2.3) и обращается в нуль первое слагаемое в правой части (1.6), с учетом разложения (3.1) имеем

$$\frac{\pi E}{1-\nu^2} (D_\varepsilon^j p^j)(t, \mathbf{x}) = \iint_{\omega_\varepsilon^j} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} p^j(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{dF_3^{\varepsilon j}}{dt}(t) + \dots \quad (3.3)$$

Пусть на площадку ω_ε (здесь и далее для упрощения записи формул индекс j опускается) действует равномерно распределенное по площади переменное во времени давление $p(t, \mathbf{x}) \equiv p_0(t)$ (функция $p_0(t)$ не зависит от параметра ε). Тогда, переходя в правой части соотношения (3.3) к растянутым координатам, можно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ первое слагаемое будет порядка $\varepsilon p_0(t)$, второе — $\varepsilon^2 \dot{p}_0(t)$, третье — $\varepsilon^3 \ddot{p}_0(t)$ (точка обозначает дифференцирование по времени).

В контактной задаче для изолированного штампа в качестве единицы длины можно выбрать диаметр $d_\varepsilon = \varepsilon d$ области ω_ε , а в качестве единицы измерения времени — величину $T_\varepsilon = c_3^{-1}\varepsilon d$. В этом случае $\tau = t/T_\varepsilon$ является безразмерной временной переменной. При переходе к безразмерной переменной τ слагаемые в правой части соотношения (3.3) будут иметь следующие порядки: $\varepsilon p_0(\varepsilon, \tau)$, $\varepsilon \partial p_0(\varepsilon, \tau)/\partial \tau$ и $\varepsilon \partial^2 p_0(\varepsilon, \tau)/\partial \tau^2$. Следовательно, для того чтобы разложение (3.3) являлось асимптотическим, необходимо, чтобы за время пробега волной Рэлея расстояния, равного диаметру штампа, контактное давление изменялось незначительно. При фиксированном законе изменения давления, задаваемом достаточно гладкой функцией $p_0(t)$, это требование выполняется для штампа, занимающего в плане область малого диаметра ω_ε , т. е. при $\varepsilon \ll 1$.

Для простоты ограничимся только первой поправкой к квазистатическому приближению (3.3). Обозначая через $\delta_0(t)$ перемещение штампа, получим следующее уравнение медленного вертикального движения изолированного штампа:

$$(B_\varepsilon p)(t, \mathbf{x}) = \delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \dot{F}_3^\varepsilon(t), \quad \mathbf{x} \in \omega_\varepsilon. \quad (3.4)$$

Здесь B_ε — линейный интегральный оператор статической контактной задачи:

$$(B_\varepsilon p)(t, \mathbf{x}) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{\omega_\varepsilon} \frac{p(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}. \quad (3.5)$$

Поскольку правая часть уравнения (3.4) не зависит от координат x_1, x_2 , имеет место зависимость

$$F_3^\varepsilon(t) = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c^\varepsilon \left(\delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \dot{F}_3^\varepsilon(t) \right), \quad (3.6)$$

где c^ε — поступательная емкость штампа с плоским гладким основанием (см., например, [7–9]). Для эллиптического штампа с большей полуосью $a^\varepsilon = \varepsilon a$ и эксцентриситетом e имеем [10]

$$c^\varepsilon = a^\varepsilon / K(e), \quad (3.7)$$

где $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Уравнение (3.6) запишем в виде

$$-\frac{\Lambda_0}{c_2} \dot{F}_3^\varepsilon(t) + \frac{1}{c^\varepsilon} F_3^\varepsilon(t) = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} \delta_0(t). \quad (3.8)$$

Полагая $F_3^\varepsilon(t) = F_{30} \exp(i\omega t)$, из уравнения (3.8) найдем $\delta_0(t) = \delta_{00} \exp(i\omega t)$, где

$$\delta_{00} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \left(\frac{1}{c^\varepsilon} - i\omega \frac{\Lambda_0}{c_2} \right) F_{30}.$$

Таким образом, величина импеданса, определяемого как отношение амплитуды силы F_{30} к амплитуде перемещения δ_{00} [11], равна

$$\frac{F_{30}}{\delta_{00}} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} c^\varepsilon \left(1 - i\omega c^\varepsilon \frac{\Lambda_0}{c_2} \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Предположение о медленном движении штампа, сделанное при выводе уравнения (3.4), в рассматриваемом случае при фиксированном диаметре d_ε^j подошвы штампа ω_ε означает малость относительной частоты колебаний. Таким образом, с той же точностью, с которой получено уравнение (3.6), из соотношения (3.9) находим

$$\frac{F_{30}}{\delta_{00}} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} c^\varepsilon \left(1 + i\lambda_0 \frac{\omega d_\varepsilon}{2c_2} + O(\varepsilon^2) \right), \quad (3.10)$$

где $\lambda_0 = 2c^\varepsilon \Lambda_0 / d_\varepsilon$.

Для сравнения с известными результатами для кругового штампа [11] вычислим значение величины $\lambda_0 = 2\pi^{-1} \Lambda_0$. При $\nu = 1/4$ $\lambda_0 = 0,79$, что согласуется с результатами расчетов в работе [11].

Заметим, что по сравнению с разложением (3.10) формула (3.9), которую можно рассматривать как простейшую аппроксимацию Паде, имеет бóльшую точность [12, 13].

4. Асимптотическая модель медленного вертикального движения системы удаленных друг от друга штампов. В левую часть уравнения (2.1) подставим приближенное выражение для оператора D_ε^j с учетом двух первых членов формулы (3.3), а в

правую часть — приближенное выражение для оператора D_ε^k в соответствии с представлением (1.6) и с учетом первых членов в формулах (2.2) и (2.4). В результате получим уравнение

$$(B_\varepsilon^j p^j)(t, \mathbf{x}) = \delta_0^j(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \dot{F}_3^{\varepsilon j}(t) - \sum_{k \neq j} \left(\frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{F_3^{\varepsilon k}(t)}{d_{jk}} + g_3(t, d_{jk}) * \dot{F}_3^{\varepsilon j}(t) \right), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon^j,$$

где B_ε — интегральный оператор (см. (3.5)).

Из уравнения (4.1) следует зависимость (аналогично (3.6))

$$F_3^{\varepsilon j}(t) = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_j^\varepsilon \left[\delta_0^j(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \dot{F}_3^{\varepsilon j}(t) - \sum_{k \neq j} \left(\frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{F_3^{\varepsilon k}(t)}{d_{jk}} + g_3(t, d_{jk}) * \dot{F}_3^{\varepsilon j}(t) \right) \right] \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (4.2)$$

Здесь c_j^ε — поступательная емкость штампа ω_ε^j . Для системы эллиптических штампов величина c_j^ε определяется формулой (3.7). В частном случае системы круговых штампов соотношение (4.2) согласуется с соотношением (6) в работе [2], полученным другим способом. Уравнение (4.2) является обобщением решения квазистатической контактной задачи для системы большого числа произвольных малых штампов, полученное в работе [14].

Уравнение (4.2) можно записать в виде

$$F_3^{\varepsilon j}(t) = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_j^\varepsilon \left(\delta_0^j(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \dot{F}_3^{\varepsilon j}(t) - \sum_{k \neq j} \tilde{g}_3(t, d_{jk}) * \dot{F}_3^{\varepsilon k}(t) \right), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\pi E}{1 - \nu^2} d_{jk} \tilde{g}_3(t, d_{jk}) * \dot{F}_3^{\varepsilon k}(t) &= \left(\frac{1}{2} + f_{12}(\beta^{-1}) \right) F_3^{\varepsilon k} \left(t - \frac{d_{jk}}{c_1} \right) + \left(\frac{1}{2} - f_{12}(1) \right) F_3^{\varepsilon k} \left(t - \frac{d_{jk}}{c_2} \right) + \\ &+ \int_{\beta^{-1}}^1 f'_{12}(\tau) F_3^{\varepsilon k} \left(t - \frac{d_{jk}}{c_2} \tau \right) d\tau - \int_1^\gamma f_{23}(\tau) \frac{dF_3^{\varepsilon k}}{d\tau} \left(t - \frac{d_{jk}}{c_2} \tau \right) d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения (4.3) для $j = 1, 2, \dots, N$ как систему уравнений относительно неизвестных сил $F_3^{\varepsilon 1}(t), \dots, F_3^{\varepsilon N}(t)$. С той же точностью, с которой было получено уравнение (4.3), можно положить

$$\dot{F}_3^{\varepsilon k}(t) = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_k^\varepsilon \dot{\delta}_0^k(t). \quad (4.4)$$

Подставляя выражение (4.4) в уравнение (4.3), преобразуем его к виду

$$-\frac{\Lambda_0}{c_2} \dot{F}_3^{\varepsilon j}(t) + \frac{1}{c_j^\varepsilon} F_3^{\varepsilon j}(t) = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} \left\{ \delta_0^j(t) - \sum_{k \neq j} \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_k^\varepsilon \tilde{g}_3(t, d_{jk}) * \dot{\delta}_0^k(t) \right\}. \quad (4.5)$$

Выражение в фигурных скобках в правой части дифференциального уравнения (4.5) обозначим $\Delta_0^j(t)$. Тогда частное решение уравнения (4.5), полученное методом малого параметра, можно записать в виде

$$\frac{1 - \nu^2}{\pi E} F_3^{\varepsilon j}(t) = c_j^\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda_0 c_j^\varepsilon}{c_2} \right)^n \frac{d^n \Delta_0^j}{dt^n}(t). \quad (4.6)$$

Оставим в бесконечной сумме (4.6) только члены порядка ε по сравнению с единицей. Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{1 - \nu^2}{\pi E} F_3^{\varepsilon j}(t) = c_j^\varepsilon \Delta_0^j(t) + \frac{(c_j^\varepsilon)^2 \Lambda_0}{c_2} \dot{\Delta}_0^j(t)$$

или (отбрасывая члены $O(\varepsilon^2)$)

$$\frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{c_j^\varepsilon} F_3^{\varepsilon j}(t) = \delta_0^j(t) + \frac{c_j^\varepsilon \Lambda_0}{c_2} \dot{\delta}_0^j(t) - \sum_{k \neq j} \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_k^\varepsilon \tilde{g}_3(t, d_{jk}) * \dot{\delta}_0^k(t).$$

5. Пример. Используя построенную выше асимптотическую модель первого порядка, рассмотрим контактную динамическую задачу об установившихся колебаниях системы двух круговых штампов на упругом полупространстве. Пусть к одному из штампов приложена периодическая вертикальная сила $P \exp(i\omega t)$. Вертикальные перемещения штампов $\delta_0^1(t)$ и $\delta_0^2(t)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\delta}_0^1(t) &= -F_1(t) + P \exp(i\omega t), \\ m_2 \ddot{\delta}_0^2(t) &= -F_2(t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Согласно формуле (4.3) реакции упругой среды $F_1(t)$ и $F_2(t)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_1 \left(\delta_0^1(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \dot{F}_1(t) - \tilde{g}(t, d) * \dot{F}_2(t) \right), \\ F_2(t) &= \frac{\pi E}{1 - \nu^2} c_2 \left(\delta_0^2(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \dot{F}_2(t) - \tilde{g}(t, d) * \dot{F}_1(t) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\pi E}{1 - \nu^2} d\tilde{g}(t, d) * \dot{F}(t) &= \left(\frac{1}{2} + f_{12}(\beta^{-1}) \right) F(t - dc_1^{-1}) + \left(\frac{1}{2} - f_{12}(1) \right) F(t - dc_2^{-1}) + \\ &+ \int_{\beta^{-1}}^1 f'_{12}(\tau) F(t - dc_2^{-1}\tau) d\tau + \int_1^\gamma f_{23}(\tau) \frac{dF}{d\tau}(t - dc_2^{-1}\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Для простоты поступательные емкости круговых штампов считаем равными: $c_1 = c_2 = 2a/\pi$.

Положим

$$\delta_0^j(t) = A_j \exp(i\omega t), \quad F_j(t) = B_j \exp(i\omega t) \quad (j = 1, 2).$$

Получив из системы уравнений (5.1), (5.2) уравнения для определения комплексных амплитуд B_1 и B_2 реакций $F_1(t)$ и $F_2(t)$, определим комплексные амплитуды вертикальных перемещений штампов A_1, A_2 при заданной частоте возмущающей силы ω .

Введем безразмерные частоту и амплитуды:

$$\varkappa = \frac{a\omega}{c_2}, \quad \tilde{A}_j = \frac{A_j}{a}, \quad \tilde{B}_j = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{B_j}{a^2} \quad (j = 1, 2).$$

Тогда безразмерные комплексные амплитуды вертикальных перемещений \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 будут выражаться через величины \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 :

$$\tilde{A}_1 = \frac{1}{\varkappa^2 \mu_1} \tilde{B}_1 - \frac{1}{\varkappa^2 \mu_1}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{1}{\varkappa^2 \mu_2} \tilde{B}_2. \quad (5.3)$$

При этом система уравнений для определения комплексных амплитуд реакций \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varkappa^2 \mu_1} - i\varkappa \Lambda_0\right) \tilde{B}_1 + \varepsilon \tilde{G}(\varkappa, \varepsilon) \tilde{B}_2 &= -\frac{1}{\varkappa^2 \mu_1} \tilde{P}, \\ \varepsilon \tilde{G}(\varkappa, \varepsilon) \tilde{B}_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varkappa^2 \mu_2} - i\varkappa \Lambda_0\right) \tilde{B}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{a}{d}, \quad \mu_j = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{m_j c_2^2}{a^3}, \quad \tilde{P} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{a^2} P, \\ \tilde{G}(\varkappa, \varepsilon) &= \left(\frac{1}{2} + f_{12}(\beta^{-1})\right) \exp(-i\varepsilon^{-1} \beta^{-1} \varkappa) + \left(\frac{1}{2} - f_{12}(1)\right) \exp(-i\varepsilon^{-1} \varkappa) + \\ &+ \int_{\beta^{-1}}^1 f'_{12}(\tau) \exp(-i\varepsilon^{-1} \varkappa \tau) d\tau - i\varepsilon^{-1} \varkappa \int_1^\gamma f_{23}(\tau) \exp(-i\varepsilon^{-1} \varkappa \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Результаты численных расчетов по формулам (5.3), (5.4) представлены на рис. 1–3. При этом $\varepsilon = 0,1$, параметр b_j определяется по формуле

$$b_j = \frac{2\pi}{1 - \nu^2} \mu_j \quad (j = 1, 2).$$

На рис. 1 приведена зависимость амплитуды вертикальных перемещений первого штампа $R_1 = A_1 \mu a / P$ от частоты \varkappa в отсутствие второго штампа. На рис. 2 представлено отношение R амплитуд вертикальных перемещений первого штампа при наличии и отсутствии второго штампа для значений $b_1 = 2$ и $b_2 = 100$. Из рис. 2 следует, что наличие второго штампа не оказывает существенного влияния на амплитуду вертикальных перемещений первого штампа. На рис. 3 показана зависимость отношения амплитуд вертикальных перемещений штампов от частоты при различных значениях параметра b_2 . Результаты расчетов, представленные на рис. 1–3, хорошо согласуются с результатами, полученными в работе [15] с использованием иного приближенного метода.

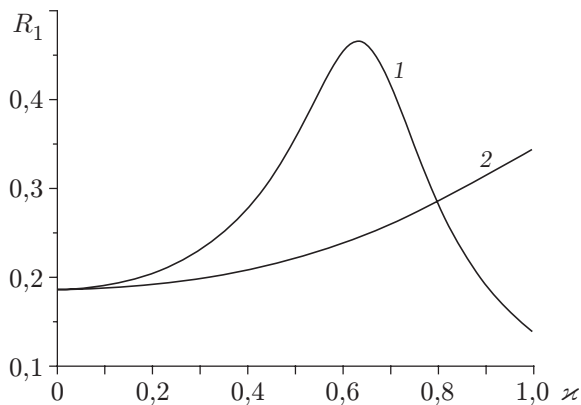


Рис. 1

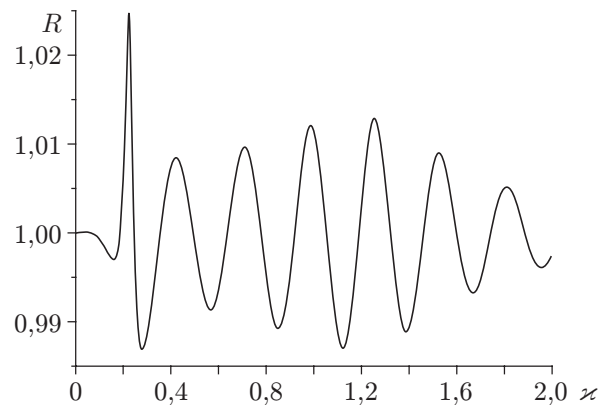


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость амплитуды вертикальных перемещений первого штампа R_1 от частоты \varkappa в отсутствие второго штампа:

1 — $b_1 = 10$; 2 — $b_1 = 2$

Рис. 2. Зависимость отношения R амплитуд вертикальных перемещений первого штампа при наличии и отсутствии второго штампа от частоты \varkappa ($b_1 = 2$, $b_2 = 100$)

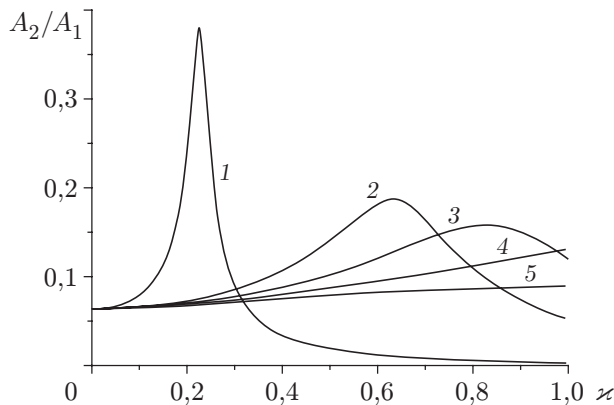


Рис. 3. Зависимость отношения амплитуд вертикальных перемещений штампов A_2/A_1 от частоты ν :

1 — $b_2 = 100$; 2 — $b_2 = 10$; 3 — $b_2 = 5$; 4 — $b_2 = 2$; 5 — $b_2 = 0$

Авторы выражают благодарность И. И. Аргатову за помощь в работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горшков А. Г.** Динамические контактные задачи с подвижными границами / А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский. М.: Наука. Физматлит, 1995.
2. **Лавров Н. А., Павловская Е. Е.** Динамика системы удаленных штампов на упругом полупространстве // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 204–210.
3. **Richards P. G.** Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1979. V. 69, N 4. P. 947–956.
4. **Pekeris C. L.** The seismic surface pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1955. V. 41, N 7. P. 469–480.
5. **Аргатов И. И.** Медленные вертикальные движения штампа на упругом полупространстве // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 2. С. 188–191.
6. **Аргатов И. И.** Взаимодействие нескольких штампов на упругом полупространстве // Прикл. механика (Киев). 2003. Т. 39, № 9. С. 74–81.
7. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
8. **Бородачев Н. М.** Об определении осадок жестких плит и массивов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1964. № 4. С. 3–4.
9. **Аргатов И. И.** Емкостные характеристики штампа с плоским гладким основанием // Изв. вузов. Стр.-во. 2000. № 4. С. 26–32.
10. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
11. **Gladwell G. M. L.** The calculation of mechanical impedances relating to an indenter vibrating on the surface of a semiinfinite elastic body // J. Sound Vibr. 1968. V. 8, N 2. P. 215–228.
12. **Аргатов И. И.** Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 4. С. 623–632.
13. **Andrianov I. V., Awrejcewicz J.** New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Appl. Mech. Rev. 2001. V. 54, N 1. P. 69–92.
14. **Аргатов И. И., Чирков В. Ю.** Приближенное решение контактной задачи для системы штампов на упругом полупространстве // Трение и износ. 1999. Т. 20, № 5. С. 467–470.
15. **Warburton G. B., Richardson J. D., Webster J. J.** Forced vibrations of two masses on an elastic half-space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38, N 1. P. 148–156.

Поступила в редакцию 14/XI 2007 г.