

УДК 534.222.2

## ГРАДИЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НА ФРОНТЕ ГАЗОВОЙ ДЕТОНАЦИИ

Е. С. Прохоров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, prokh@hydro.nsc.ru

В рамках модели, основанной на предположении об изотермичности продуктов газовой детонации, получены так называемые градиентные соотношения — аналитические формулы, устанавливающие взаимосвязь между частными пространственными производными (градиентами) давления, плотности, массовой скорости газа за фронтом плоской детонационной волны и ускорением фронта. Показано, что полученные соотношения могут быть использованы для упрощенного описания пересжатых режимов детонации в химически реагирующем газе.

Ключевые слова: детонационные волны, степень пересжатия, продукты детонации, градиенты параметров, ускорение фронта.

Если движение сплошной среды за фронтом ударной волны (поверхностью сильного разрыва) описывается гладким одномерным решением, а параметры перед фронтом постоянны, можно установить однозначное соответствие между частной пространственной производной (градиентом) любого газодинамического параметра и производной по времени скорости (ускорением) фронта. Для одномерного адиабатического течения совершенного газа такие градиентные соотношения на фронте ударной волны приведены в [1, 2].

В работе [3] удалось снять ограничения, обусловленные моделью совершенного газа, путем использования естественного предположения относительно формы записи калорического уравнения состояния (внутренней энергии) среды, основанного на том, что с учетом термического уравнения состояния (например, уравнений Клапейрона — Менделеева или Ван-дер-Ваальса) полную внутреннюю энергию газа  $U = U_{th} + U_{ch}$ , включающую в себя кроме термодинамической части  $U_{th}$  и потенциальную химическую энергию  $U_{ch}$ , можно представить в виде функции давления  $p$  и плотности  $\rho$ :  $U = U(p, \rho)$ . Это справедливо как для инертных сред, так и для продуктов реакции в состоянии химического равновесия. Под равновесными течениями химически реагирующих газов обычно имеют в виду такие течения, в которых скорость установления химического рав-

новесия намного превышает скорость изменения внешних параметров, т. е. реакцию можно считать мгновенной. В результате были получены более универсальные градиентные соотношения, которые с учетом теплового эффекта химических реакций применимы и для детонационного фронта (сильного разрыва с мгновенным тепловыделением). В [4] показано, что область возможного использования этих соотношений в приложениях может быть расширена. Например, они могут быть легко обобщены на случай квазиодномерных движений сплошной среды или найти применение при исследовании аппроксимации численных разностных схем вблизи подвижной границы, соответствующей сильному разрыву.

Так, для одномерных плоских движений (волна распространяется вдоль координатной оси  $r$ ) градиентные соотношения [3] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_* &= \\ &= \frac{1}{M_*^2 - 1} \left[ \frac{\rho_0}{\rho_*} \left( A + 2 + \frac{A + 1}{M_*^2} \right) \frac{p_* - p_0}{c_*^2} \frac{dD}{dt} \right], \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_* &= \frac{1}{M_*^2 - 1} \left\{ \left[ 3(A + 1) - \frac{A}{M_*^2} \right] \frac{\rho_* - \rho_0}{c_*^2} \frac{dD}{dt} \right\}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_* &= \frac{1}{M_*^2 - 1} \left[ \frac{\rho_0}{\rho_*} (2A + 3) \frac{u_* - u_0}{c_*^2} \frac{dD}{dt} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

$$M_* = \frac{D - u_*}{c_*}, \quad A = \frac{2 + (1/\rho_* - 1/\rho_0)/(U_p)_*}{(1/M_*)^2 - 1},$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00634а) и фонда Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-247.2012.1).

$$U_p = \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_\rho,$$

где  $D$  — скорость фронта,  $u$  — массовая скорость,  $c$  — равновесная скорость звука,  $M$  — число Маха волны относительного потока; индексами 0 и \* обозначены параметры перед фронтом (в исходном состоянии) и на фронте волны соответственно. Видно, что градиенты газодинамических функций пропорциональны ускорению фронта  $dD/dt$ . Причем конкретные значения коэффициентов пропорциональности определяются функциональной зависимостью  $U = U(p, \rho)$  и значением  $D$ .

В данной работе общие формулы градиентных соотношений (1) адаптированы для упрощенного описания распространения режимов пересжатой детонации в химически реагирующем газе. При этом полагали, что для интенсивно взрывающихся газовых смесей с температурой продуктов реакции порядка  $2500 \div 4000$  К показатель равновесной адиабаты близок к единице [5], т. е. продукты детонации представляют почти изотермическую среду, когда приближенно можно считать  $p/\rho = \text{const}$  и  $U_p = \infty$ . В рамках данной модели газодинамические параметры на детонационном фронте можно явным образом выразить через скорость фронта  $D$ , точнее, через степень пересжатия детонационной волны (ДВ)  $\alpha = D/D_{CJ}$  (здесь и далее нижним индексом CJ обозначены параметры стационарной (установившейся) детонации Чепмена — Жуге).

Для этой модели справедливы следующие уравнения на фронте ДВ, распространяющейся по неподвижному взрывчатому газу ( $u_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} p_*(D - u_*) &= \rho_0 D, \\ p_* + \rho_*(D - u_*)^2 &= p_0 + \rho_0 D^2, \\ p_*/\rho_* &= c_{CJ}^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если уравнения (2) дополнить условием Чепмена — Жуге относительно равновесной скорости звука в продуктах детонации [6]

$$D_{CJ} = u_{CJ} + c_{CJ}, \quad (3)$$

то для детонации Чепмена — Жуге можно оценить параметры продуктов на фронте.

Обычно для ДВ  $p_* \gg p_0$ , так что начальным давлением газовой смеси можно пренебречь. Тогда, решая систему уравнений (2), (3), получаем

$$u_{CJ} = c_{CJ} = D_{CJ}/2,$$

$$\rho_{CJ} = 2\rho_0, \quad p_{CJ} = 2\rho_0 c_{CJ}^2.$$

Используя эти формулы и определение  $\alpha$ , из соотношений (2) находим зависимости для безразмерных газодинамических параметров на фронте ДВ от степени пересжатия:

$$\begin{aligned} \frac{p_*}{p_{CJ}} = \frac{\rho_*}{\rho_{CJ}} &= \alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}), \\ \frac{u_*}{u_{CJ}} &= \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что погрешность формул (4) по сравнению с точными равновесными расчетами [5], которые выполнены для различных взрывчатых смесей, незначительна даже при относительно больших степенях пересжатия ДВ. Например, при  $\alpha = 1.5$  она составляет всего  $\approx 7\%$ . Поэтому для приближенного моделирования пересжатых режимов газовой детонации может быть использован следующий подход.

При распространении детонации в достаточно «широких» [7] трубах отличие газодинамических параметров на фронте ДВ от параметров идеальной (без потерь на трение и теплоотвод) детонации Чепмена — Жуге пренебрежимо мало. Поэтому будем считать параметры  $D_{CJ}$ ,  $p_{CJ}$ ,  $\rho_{CJ}$ ,  $u_{CJ}$  заданными, например, из точных равновесных расчетов [5]. Тогда, используя (4), можно найти для пересжатой детонации конкретные значения параметров  $p_*$ ,  $\rho_*$ ,  $u_*$  в зависимости от  $\alpha$ .

С помощью формул (2)–(4) преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{CJ}} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)_* &= \frac{1}{\rho_{CJ}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_* = \\ &= - \frac{6M_*^2 + 2}{D_{CJ}(M_*^2 - 1)^2} [2\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) - 1] \frac{d\alpha}{dt}, \\ \frac{1}{u_{CJ}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_* &= - \frac{2M_*^2 + 6}{D_{CJ}(M_*^2 - 1)^2} \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}, \\ M_* &= \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, мы получили градиентные соотношения на фронте газовой детонации, имеющие следующую характерную структуру:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r}\right)_* = \mathbf{F}(\alpha) \frac{d\alpha}{dt},$$

где  $\mathbf{Y} = \{p/p_{CJ}, \rho/\rho_{CJ}, u/u_{CJ}\}$ ,  $\mathbf{F}(\alpha)$  — явная функция от степени пересжатия. Причем, чтобы воспользоваться этими соотношениями, достаточно знать только зависимость текущего положения фронта от времени  $r_* = r_*(t)$ , так как она позволяет находить скорость  $D = dr_*/dt$  и ускорение  $dD/dt = d^2r_*/dt^2$  фронта ДВ, а следовательно,  $\alpha$  и  $d\alpha/dt$ . Отметим, что соотношения (5) применимы только для описания пересжатых режимов детонации, поскольку при детонации Чепмена — Жуге в них возникает неопределенность типа 0/0. Если зависимость  $r_*(t)$  не является аналитической, а представляет собой табличную функцию, то для нахождения ее производных применимы методы численного дифференцирования (см., например, [8]). Из вышесказанного следует, что полученные формулы, например, можно использовать в инженерных расчетах для оценки значений производных  $(\partial \mathbf{Y}/\partial r)_*$  по изменению скорости фронта ДВ. Для подтверждения этого проведен следующий вычислительный эксперимент.

Была численно решена одномерная нестационарная задача о затухании плоской пересжатой ДВ, сформированной при взрыве стехиометрической ацетиленокислородной смеси  $C_2H_2 + 2.5O_2$  в секции детонационной трубы (диаметром  $d = 80$  мм) с повышенным начальным давлением ( $p_0 = 10$  атм) и при последующем выходе детонации в сопряженную секцию такого же диаметра, где начальное давление взрывчатой смеси было на порядок ниже ( $p_0 = 1$  атм). Начальная температура взрывчатой смеси  $T_0$  в обеих секциях одинакова. Полагалось, что секция повышенного давления расположена у закрытого конца трубы ( $r = 0$ ). Ее длина равна одному диаметру трубы  $d$ . Направление координатной оси  $r$  совпадает с осью трубы. Эта секция отделена от остальной части трубы тонкой невесомой мембраной, которая разрушается при мгновенном взрыве (инициировании детонации) взрывчатой смеси в начальный момент времени ( $t = 0$ ). Как следует из решения задачи о распаде произвольного разрыва, от контактной границы ( $r = d$ ) по взрывчатой смеси в секции с низким начальным давлением распространяется пересжатая ДВ, а в сторону закрытого конца трубы по продуктам детонации — волна разрежения.

Для расчетов нестационарного равновес-

ного течения продуктов в детонационной трубе применялась математическая модель, сформулированная в работе [9], которая позволяет описывать не только режим Чепмена — Жуге, но и режимы распространения пересжатой газовой детонации. В этой модели используются приближенные уравнения [10], определяющие с высокой точностью изменение средней молярной массы и удельной внутренней энергии, в том числе ее термодинамической и химической частей, при сдвиге химического равновесия газообразных продуктов сгорания углеводородов.

На рис. 1 представлено распределение безразмерных параметров газового потока  $\mathbf{Y}$  для момента времени  $t = 64.6$  мкс, когда фронт ДВ (ось  $\mathbf{Y}$ ) прошел в секции низкого давления расстояние, равное  $d$ , т. е.  $r_*/d = 2$ . Для обезразмеривания используются следующие значения параметров детонации Чепмена — Жуге (в смеси  $C_2H_2 + 2.5O_2$  при  $p_0 = 1$  и  $T_0 = 298.15$  К):  $D_{CJ} = 2424$  м/с,  $p_{CJ} = 34.14$  атм,  $\rho_{CJ} = 2.298$  кг/м<sup>3</sup>,  $u_{CJ} = 1118$  м/с,  $T_{CJ} = 4219$  К. Данному моменту времени соответствуют значения  $\alpha = 1.045$  и  $d\alpha/dt = 0$ , т. е.  $D = \text{const}$ . Последнее означает, что непосредственно за фронтом детонации реализуется течение продуктов с постоянными параметрами ( $(\partial \mathbf{Y}/\partial r)_* = 0$ ). Кривая 4 на рис. 1 демонстрирует незначительное (не более 9 %) изменение температуры  $T$  относительно  $T_{CJ}$  как за фронтом пересжатой

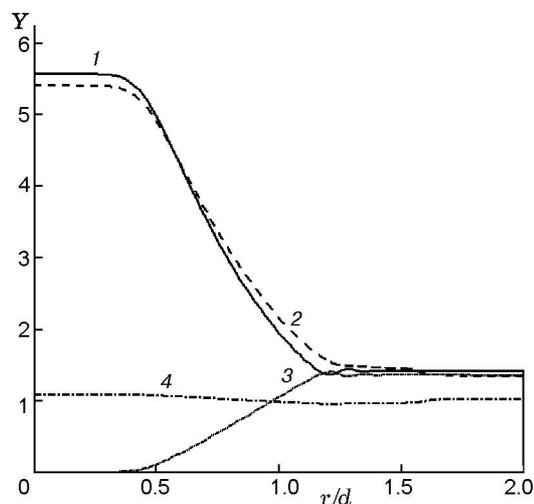


Рис. 1. Распределение безразмерных параметров газового потока  $\mathbf{Y}$  через 64.6 мкс после инициирования детонации:

1 — давление  $p/p_{CJ}$ , 2 — плотность  $\rho/\rho_{CJ}$ , 3 — массовая скорость  $u/u_{CJ}$ , 4 — температура  $T/T_{CJ}$

ДВ, так и в волне разрежения. Это согласуется с ранее выдвинутым предположением о квази-изотермичности продуктов детонации.

Рассчитанные профили параметров равновесного газового потока за фронтом ДВ для последующих моментов времени  $t = 317, 948$  и  $1585$  мкс, когда фронт ДВ прошел вдоль трубы расстояния  $r_*/d = 10, 30$  и  $50$  соответственно, приведены на рис. 2. Уменьшение параметров на фронте ( $Y_* \rightarrow 1$ ) означает, что пересжатая ДВ постепенно затухает, при этом профили параметров, растягиваясь со временем, прибли-

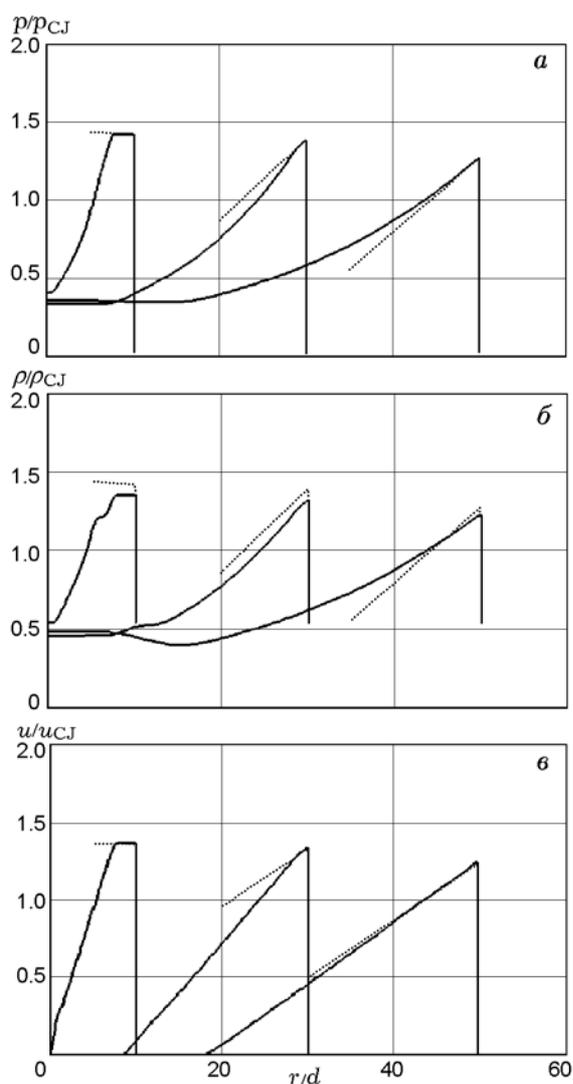


Рис. 2. Динамика профилей давления (а), плотности (б) и массовой скорости (в) продуктов детонации за фронтом ДВ:

сплошные линии — решение нестационарной задачи, пунктирные — приближенное решение (б)

жаются к «треугольным» профилям, которые характерны для детонации Чепмена — Жуге [11].

Эти расчеты были сопоставлены с приближенным решением (пунктирные линии на рис. 2):

$$Y = Y_* + (r - r_*) \left( \frac{\partial Y}{\partial r} \right)_*, \quad (6)$$

восстановленным по зависимости  $r_*(t)$  с помощью формул (4) и (5). Отметим, что пространственно-временная диаграмма текущего положения фронта  $r_* = r_*(t)$  может служить аналогом получаемых в реальном эксперименте фоторазверток самосвечения (см., например, [12]) фронта ДВ через щель параллельную оси трубы.

Из анализа результатов расчета следует, что в окрестности фронта ДВ (на расстоянии порядка  $(1 \div 3)d$  от  $r_*$ ) приближенное решение (6) вполне удовлетворительно аппроксимирует распределение параметров продуктов детонации. Причем для давления и массовой скорости (рис. 2, а, в) аппроксимацию можно считать даже хорошей. Например, отличие этих параметров (точнее,  $Y_*$ ) и их градиентов  $(\partial Y / \partial r)_*$  на фронте от решения нестационарной задачи не превышают 1 и 5 % соответственно. Это может служить основанием для применения формул (4) и (5) при обработке реальных экспериментальных данных и позволит сопоставлять результаты, полученные независимыми экспериментальными методами (например, с результатами измерения давления с помощью датчиков).

Итак, в работе получены градиентные соотношения на детонационном фронте, адаптированные для упрощенного описания пересжатых режимов газовой детонации. Показано, что эти соотношения могут быть использованы при построении приближенных решений нестационарных газодинамических задач на основе зависимости координаты фронта ДВ от времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cassen G., Stanton J. The decay of shock waves // J. Appl. Phys. — 1948. — V. 19, N 9. — P. 803–807.
2. Седов Л. И. К общей теории одномерных движений газа // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 85, № 4. — С. 723–726.

3. Прохоров Е. С. Градиентные соотношения на фронте ударных и детонационных волн // Физика горения и взрыва. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 92–94.
4. Прохоров Е. С. О производных функций газодинамических параметров за поверхностью сильного разрыва // Тр. междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент, практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко (Новосибирск, Россия, 30 мая — 4 июня 2011 г.). — Новосибирск, 2011. — С. 1–6. — <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/37591/44662/Prokhorov.pdf>.
5. Николаев Ю. А., Топчиян М. Е. Расчет равновесных течений в детонационных волнах в газах // Физика горения и взрыва. — 1977. — Т. 13, № 3. — С. 393–404.
6. Щетинков Е. С. Физика горения газов. — М.: Наука, 1965.
7. Николаев Ю. А. Теория детонации в широких трубах // Физика горения и взрыва. — 1979. — Т. 15, № 3. — С. 142–149.
8. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
9. Ждан С. А., Прохоров Е. С. Квазиодномерный расчет детонации в канале переменного сечения // Физика горения и взрыва. — 1984. — Т. 20, № 5. — С. 96–100.
10. Николаев Ю. А., Фомин П. А. О расчете равновесных течений химически реагирующих газов // Физика горения и взрыва. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 66–72.
11. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971.
12. Дубовик А. С. Фотографическая регистрация быстропотекающих процессов. — М.: Наука, 1964.

*Поступила в редакцию 2/III 2012 г.,  
в окончательном варианте — 20/VII 2012 г.*