

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

УДК 004.922

ОБ АНИЗОТРОПНОЙ МОДЕЛИ ВИЗУАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА**А. М. Ковалев***Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск**E-mail: kovalev@iae.nsk.su*

Рассматривается проективное отображение физического пространства на внутреннюю область сфероида – модель гиперболического гильбертова пространства. Определяются прямые, диаметры, перпендикуляры, расстояния и углы на плоскости Гильберта. Показано изображение визуального пространства внутри сфероида, а также его конформное отображение на модели Пуанкаре. Приведена формула увеличения луны при возвышении над горизонтом.

Введение. На основе экспериментальных данных, полученных на горизонтальной земной поверхности, в [1] предложена модель изотропного визуального пространства (ВП). Модель занимает внутренность шара, радиус которого пропорционален гиперфокальному расстоянию зрительной сенсорной системы (3–6 м). В [1, 2] показано, что ВП обладает свойствами пространства Лобачевского – Римана, а в [3] продемонстрирована глобальная структура ВП на моделях Клейна и Пуанкаре. В этой структуре «бесконечно» удаленные объекты, такие как звезды, солнце и луна, располагаются на поверхности, близкой к предельной сфере, а значит, по закону Эммерта имеют размеры, независимые от возвышения над горизонтом. Но в действительности это не так. Всем известно, что на восходе или закате луна и солнце больше, чем в средней части неба или в зените. В [3] отмечено, что возникает анизотропия ВП по углу возвышения, или широте θ , и это показано в экспериментах с искусственными лунами в [4]. При $\theta = 45^\circ$ среднее расстояние до предельной поверхности $d = 3,65$ м, что в 1,5 раза меньше, чем при $\theta = 1,5^\circ$ ($d = 5,47$ м). К сожалению, по двум точкам Кауфманов невозможно определить достоверный вид предельной поверхности. Однако можно предположить, что это – равномерно сжатая по вертикали сфера, или сфероид. В данной работе рассматривается модель анизотропного визуального пространства, занимающая внутреннюю область сфероида.

Сфероид. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат XYZ задан сжатый эллипсоид вращения (сфероид) каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где a – радиус окружности в плоскости XOZ , большая полуось; b – малая полуось. В полярной системе координат, начало которой совпадает с оптическим центром глаза, сфероид (1) может быть задан гиперфокальным расстоянием d_θ , широтой θ и долготой φ :

$$d_\theta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}; \quad \theta = \arctg \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right); \quad \varphi = \arctg \left(\frac{z}{x} \right). \quad (2)$$

При $\theta = 0$ на плоскости XOZ из (2) получается круг с радиусом $d_0 = a$. Спроектируем все ∞^2 точек плоскости XOZ внутрь круга с помощью преобразования, найденного в [1, 2]:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \frac{d_0}{e + d_0}, \quad (3)$$

где $\mathbf{E} = [x, 0, z]$ – точки плоскости XOZ ; $\mathbf{Q} = [x_g, 0, z_g]$ – точки внутри круга с радиусом d_0 ; $e = \sqrt{x^2 + 0^2 + z^2}$ – радиальное евклидово расстояние до точки. В результате получается модель плоскости ВП, совпадающая с моделью Клейна плоскости Лобачевского.

На рис. 1 показано меридиональное сечение сфероида (2) при $\varphi = 0$. Рассмотрим проективное отображение евклидовой плоскости XOY на внутреннюю область эллипса L . Нет оснований считать, что преобразование будет иного вида, чем (3). Тогда

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} \frac{d_\theta}{e + d_\theta}, \quad (4)$$

где $\mathbf{E} = [x, y, 0]$ – точки плоскости XOY ; $\mathbf{G} = [x_g, y_g, 0]$ – точки внутри эллипса L ; d_θ – переменное гиперфокальное расстояние из (2); $e = \sqrt{x^2 + y^2 + 0^2}$ – радиальное евклидово расстояние до точки.

Построим аллею Гиллебранда (P-alley), параллельную оси OY [1]. Пусть ширина аллеи $x_g = w < a$. Из (4)

$$x_g = w = \frac{xd_\theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + d_\theta}}. \quad (5)$$

Учтем, что

$$d_\theta = \frac{ab\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}}. \quad (6)$$

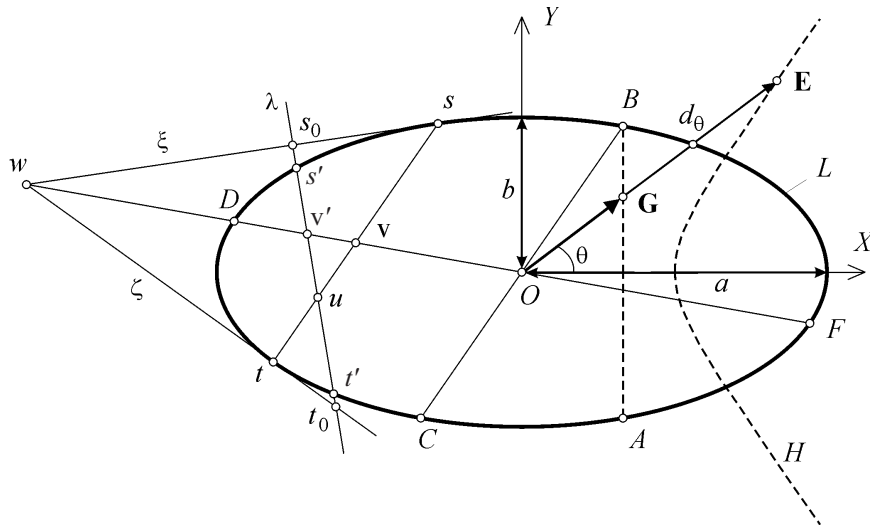


Рис. 1. Прямые, расстояния и перпендикуляры в геометрии Гильберта

Подставляя (6) в (5) и раскрывая (5), получим уравнение второго порядка

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{w^2}\right)x^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x}{w} - 1 = 0. \quad (7)$$

Малый дискриминант уравнения (7) $\delta = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{w^2}\right) \frac{1}{b^2}$ отрицателен, поскольку

$w < a$. Значит, уравнение представляет собой гиперболу. На рис. 1 показана евклидова гипербола H и соответствующая ей прямая, или геодезическая, AB в области эллипса L . Как и на модели Клейна, концы хорды AB должны быть исключены. Например, диаметр BC , параллельный одной из асимптот гиперболы H , исключает конец B хорды. Таким образом, прямыми, или геодезическими, являются хорды и диаметры эллипса L , причем через любую точку вне прямой можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих заданную. Это говорит о том, что геометрия внутренней области эллипса L является гиперболической, или гильбертовой гиперболической [5].

Метрика Гильберта. Покажем, что сопряженные диаметры эллипса взаимно перпендикулярны. Например, построим диаметр DF , сопряженный с диаметром BC (см. рис. 1). Из элементарной геометрии следует, что для этого нужно построить хорду st , параллельную диаметру BC , и через середину этой хорды v и центр эллипса O провести прямую DF . Выполним дополнительные построения. Во-первых, построим касательные ξ и ζ к эллипсу L в точках s и t . Эти касательные пересекутся в точке w , лежащей на продолжении диаметра DF , что легко доказывается в рамках элементарной геометрии из уравнений хорд, сопряженных диаметров и касательных эллипса L . Во-вторых, построим прямую λ , которая пересекает хорду st в точке u , диаметр DF в точке v' , касательные ξ и ζ в точках s_0 и t_0 соответственно и эллипс L в точках s' и t' . Наша задача – показать, что расстояние от точки u до точки v на интервале (s, t) меньше расстояния от точки u до точки v' на интервале (s', t') .

Определим метрику Гильберта $h(u, v)$ на интервале (s, t) :

$$h(u, v) = \frac{c}{2} \ln R(u, v; s, t), \quad (8)$$

где $c > 0$; $R(u, v; s, t) = \frac{e(u, s) e(v, t)}{e(u, t) e(v, s)}$ – двойное отношение четырех точек;

$e(\cdot, \cdot)$ – евклидово расстояние. Учитывая, что прямые st и $s_0 t_0$ являются перспективными с центром w (см. рис. 1), получим

$$R(u, v; s, t) = R(u, v'; s_0, t_0) < R(u, v'; s', t'). \quad (9)$$

Последнее неравенство доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} R(u, v'; s_0, t_0) &= \frac{e(u, s_0) e(v', t_0)}{e(u, t_0) e(v', s_0)} = \\ &= \frac{e(u, v') + e(v', s_0)}{e(u, t_0)} \frac{e(v', u) + e(u, t_0)}{e(v', s_0)} = \left[1 + \frac{e(u, v')}{e(v', s_0)} \right] \left[1 + \frac{e(v', u)}{e(u, t_0)} \right]; \end{aligned}$$

точно так же

$$R(u, v'; s', t') = \left[1 + \frac{e(u, v')}{e(v', s')} \right] \left[1 + \frac{e(v', u)}{e(u, t')} \right].$$

Так как $e(v', s_0) > e(v', s')$ и $e(u, t_0) > e(u, t')$, то $R(u, v'; s_0, t_0) < R(u, v'; s', t')$. Из (9) вытекает $h(u, v) < h(u, v')$. Тогда хорда st перпендикулярна диаметру DF , а сопряженные диаметры BC и DF взаимно перпендикулярны. Кроме того, из этих рассуждений следует, что все радиальные прямые, исходящие из центра O , перпендикулярны предельной кривой L , поскольку, например, касательные к L в точках B и C параллельны диаметру DF . Таким образом, в геометрии Гильберта эллипс эквивалентен евклидовой окружности.

При надлежащем выборе аффинных координат $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/b$, $\bar{z} = z/a$ уравнение сфероида (1) можно записать в виде $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1$. Тогда в меридиональном сечении сфероида эллипс L (см. рис. 1) можно рассматривать как единичную окружность в евклидовой метрике. При этом гильбертовы расстояния (8) не изменяются, а углы приобретают привычные евклидовы величины в радианах или градусах. С учетом (2)

$$\theta_h = \arctg \left(\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}} \right) = \arctg \left(\frac{ay}{b\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \arctg \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta \right); \quad (10)$$

$$\varphi_h = \arctg(\bar{z}/\bar{x}) = \varphi,$$

где θ_h, φ_h – гильбертовы углы в евклидовой угловой мере.

Проективное отображение физического пространства. Пусть в полярной системе координат, начало которой совпадает с оптическим центром глаза, заданы сфероид (2) и точка с полярным расстоянием e , широтой θ и долготой φ . Проективное отображение физической точки в область сфероида запишем в виде

$$g = \frac{ed_\theta}{e + d_\theta}; \quad \theta_g = \theta; \quad \varphi_g = \varphi, \quad (11)$$

где g – радиальное расстояние от наблюдателя до изображения точки. Очевидно, что расстояние g не может превысить гиперфокального расстояния d_θ , поскольку $g \rightarrow d_\theta$ при $e \rightarrow \infty$. Спроектируем все видимые точки физического пространства внутрь сфероида (2) и получим, с одной стороны, изображение физического пространства, с другой – анизотропную модель ВП, совпадающую с моделью гильбертова гиперболического пространства. Во всех горизонтальных гиперплоскостях, параллельных плоскости визирования $\theta_g = \theta = 0$, модель становится изотропной и совпадает с моделью Клейна для плоскостей Лобачевского.

На рис. 2 показано изображение глобальной структуры физического пространства в меридиональном сечении $\varphi_g = \varphi = 90^\circ$. Начало координат ассоциируется с расположением внутреннего «Я» наблюдателя. Радиальные лучи расходятся с евклидовым шагом 15° . Наблюдатель стоит на земной поверхности 1, которая в плоском сечении представлена гиперболой. Евклидовы окружности 2 с радиусами $e = 1,5, 6$ и 24 м – это эллипсы. При уменьшении радиуса окружности сжатие эллипса и его эксцентриситет уменьшаются, что отражено в таблице. В расчетах использовался сфероид с полуосями $a = 2,927$ м и $b = 5,475$ м, которые получены по усредненным данным

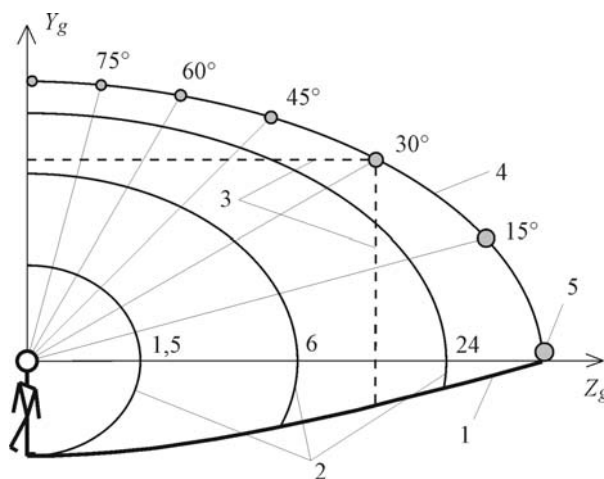


Рис. 2. Проективное отображение физического пространства: 1 – земля, 2 – окружности, 3 – геодезические, 4 – небосвод, 5 – луна (солнце) на закате

Радиус сферы, м	Сжатие эллипса, %	Эксцентриситет
0,25	3,7	0,268
0,75	9,5	0,425
1,50	15,8	0,539
6,00	31,3	0,726
24,00	41,5	0,811
∞	46,5	0,845

экспериментов Кауфманов [4]. В окрестности наблюдателя физическое и видимое пространства практически изоморфны, и в этом «заслуга» проективного преобразования (11), связанного непосредственно с функцией фокусировки зрительной сенсорной системы [1].

На рис. 2 изображены гиперпрямые, или геодезические, 3, которые параллельны радиальной прямой с направлением 30° . Все три прямые должны быть перпендикулярны предельной поверхности 4. На проективной модели эти свойства изобразить нельзя. Поэтому необходима модель

конформного отображения ВП, которая будет рассмотрена далее.

Предельная поверхность 4 представляется сфероидом (2). Небосвод, определяющий местоположение «бесконечно» удаленных звезд, луны и солнца, располагается в непосредственной близости от этой поверхности. Можно оценить эту «близость». Пусть расстояние до объектов определяется не их физическим расстоянием, а максимальным расстоянием, которое способна измерить зрительная система, например, с помощью стереоскопической диспаратности. Пусть это расстояние $e = 1,5$ км. Кстати, известный психолог Р. Л. Грегори пишет, что наблюдаемая многими луна «удалена «на глаз» всего километра на полтора или около того» [6, с. 128]. С помощью (11) определим предельный видимый эллипс: $g(90^\circ) = 2,921$ м, $g(0^\circ) = 5,455$ м. Если сравнить эти данные с данными вышеупомянутых полуосей сфероида (2): $a = 2,927$ м и $b = 5,475$ м, то отличия не будут превышать 0,20–0,37 %. Таким образом, с большой точностью можно считать, что предельная поверхность 4 и есть небосвод.

Луна и солнце имеют одинаковые угловые размеры и в зените и на горизонте. Атмосфера земли не оказывает влияния [7]. Размеры изображений светил на сетчатке глаза одинаковы независимо от их возвышения над горизонтом. В этих условиях работает психофизический закон Эммерта, который гласит: «При неизменной величине сетчаточного изображения воспринимаемый размер предмета прямо пропорционален воспринимаемому расстоянию до предмета». Если предметами являются луна, солнце или созвездия, то их размер пропорционален гиперфокальному расстоянию d_θ из (2).

Обычно интересует не линейный размер объектов, а их относительное (по отношению к зениту) увеличение в зависимости от угла возвышения над горизонтом. Из (2) линейное увеличение

$$V_\theta = \frac{d_\theta}{b} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}}, \quad (12)$$

где $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ – эксцентриситет сфероида.

Зададим вопрос: во сколько раз луна, изображенная на рис. 3 справа, больше? Обыкновенный читатель, практически не задумываясь, ответит: «Примерно в 4 раза». Чтобы определить линейное увеличение V_θ из (12), че-



Рис. 3. Воспринимаемое соотношение размеров лун

ловеку надо «включить» отдельную нейронную программу для выделения и сравнения диаметров, которые на рис. 3 отличаются в 2 раза. Оказывается, что проще сравнивать площади, чем линейные размеры. Пожалуй, первым это заметил профессор физики Лондонского университета С. Толанский [8]. Относительное увеличение площадей предметов составляет

$$VS_{\theta} = V_{\theta}^2 = \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}, \quad (13)$$

где V_{θ} – линейное увеличение из (12). Заметим, что увеличение размеров луны (солнца) на горизонте с учетом вышеупомянутых параметров сфероида равно по диаметру 1,87; по площади 3,5.

Луна и солнце имеют довольно большие угловые размеры: $0,52^{\circ}$. Даже невооруженным глазом можно различить на поверхности луны некоторые детали. Сфероид в средней части неба имеет разные меридиональные и саггитальные радиусы кривизны. Почему отсутствует астигматизм изображений луны? На наш взгляд, основная причина состоит в том, что сфероидальное пространство возникает в сознании последовательно-параллельным образом [2]. При фиксации луны на широте θ фокусное расстояние d_{θ} неизменно в пределах небольшого телесного угла ($<10^{\circ}$), обрабатываемого параллельно. В этом «мгновенном» состоянии зрительная система воспринимает орисферу пространства Лобачевского, которая, как известно, обладает свойствами евклидовой плоскости. Поэтому астигматизм изображений исключается полностью.

Конформное отображение пространства. Пусть анизотропное ВП является гильбертовым пространством с постоянной гауссовой кривизной $K = -1/c^2$. Тогда радиальные расстояния h и центральные углы θ_h (широта) и φ_h (долгота) с учетом метрики (8) и преобразований (10) и (11) определяются следующим образом:

$$h = c \operatorname{arth} \left(\frac{g}{d_{\theta}} \right) = \frac{c}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{e}{d_{\theta}} \right); \quad \theta_h = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta \right); \quad \varphi_h = \varphi. \quad (14)$$

Заметим, что такое описание ВП не отличается от описания пространства Лобачевского. Поэтому можно построить конформное отображение визуального пространства (14) с помощью известных формул [3]:

$$p = 2c \operatorname{th} \left(\frac{h}{2c} \right) = 2c \frac{g/d_\theta}{1 + \sqrt{1 - (g/d_\theta)^2}}; \quad \theta_p = \theta_h; \quad \varphi_p = \varphi_h, \quad (15)$$

где p, θ_p, φ_p – полярные координаты точки на модели Пуанкаре пространства Лобачевского. Из (14), (15) при $e \rightarrow \infty, h \rightarrow \infty, g \rightarrow d_\theta$ величина $p \rightarrow 2c$, и, таким образом, пространство на модели Пуанкаре занимает внутренность шара с радиусом $2c$.

На рис. 4 показано анизотропное ВП на модели Пуанкаре в меридиональном сечении $\varphi_p = 90^\circ$. Структура пространства и размеры предметов соответствуют его проективному отображению на рис. 2. Линия земной поверхности 1 – это сложная с перегибом кривая, которая является отображением евклидовой прямой, параллельной главной оси зрения. Евклидовы окружности 2 представлены эллипсами, вытянутыми по вертикали. Эксцентриситет эллипса уменьшается по мере увеличения радиуса отображаемой окружности. Все радиальные прямые, заданные с евклидовым шагом 15° , и гиперпрямые, или геодезические, 3 перпендикулярны сечению предельной поверхности 4, имитирующей небосвод. Как обычно, геодезические 3 представляются дугами окружностей, которые перпендикулярны и декартовым осям, и предельной линии.

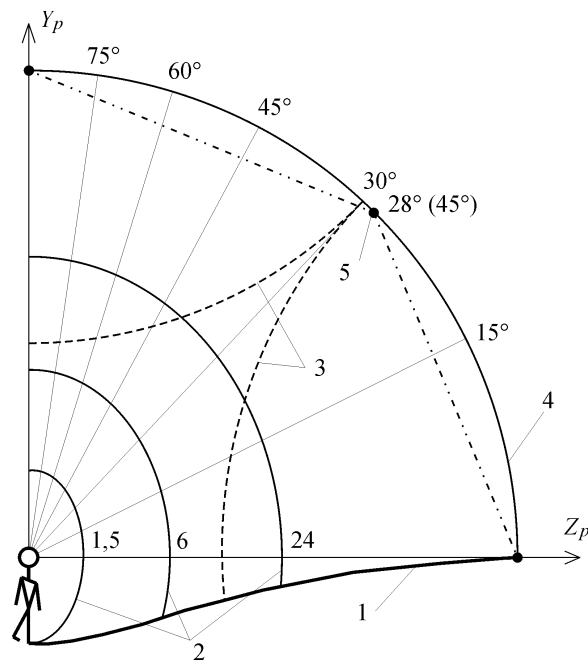


Рис. 4. Анизотропное визуальное пространство на модели Пуанкаре: 1 – земная поверхность, 2 – окружности, 3 – геодезические, 4 – небосвод, 5 – бисекция неба

Два следствия вытекают из конформного отображения анизотропного ВП.

1. Известно, что человек обычно переоценивает угол возвышения предметов над горизонтом. В задаче «деления неба пополам», или бисекции небосвода от зенита до горизонта, воспринимаемый угол 45° в действительности оказывается меньше. При ясном небе фактический угол равен $23-34^\circ$ [9]. Если в (14) считать, что гильбертов угол $\theta_h = 45^\circ$ является воспринимаемым, а евклидов угол θ – фактическим, то $\theta = \operatorname{arctg}(b/a) = 28^\circ$ для вышеупомянутого сфероида. Величина угла лежит в середине диапазона данных, приведенных в [9]. На рис. 4 бисекция неба обозначена точкой 5. Итак, особенности восприятия углов возвышения могут объясняться самой гильбертовой геометрией ВП.

2. Найдем дифференциальное угловое увеличение луны от евклидова угла возвышения θ . Для $\theta_h(\theta)$ из (14) получим дифференциал

$$d\theta_h(\theta) = \frac{ad\theta}{b\cos^2\theta[1+(a/b)^2\tg^2\theta]} = \frac{abd\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta} = \frac{(b/a)d\theta}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta} \quad (16)$$

(a, b и ε определены выше).

Угловой размер луны $d\theta = 0,52^\circ$ не зависит от угла возвышения θ , поэтому числитель отношения (16) – величина постоянная. Следовательно, дифференциальное угловое увеличение луны равно

$$\frac{d\theta_h(\theta)}{d\theta_h(\pi/2)} = \frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta} = VS_\theta,$$

т. е. совпадает с простой для человека оценкой увеличения луны по площади (13).

Заключение. Предложена анизотропная модель визуального пространства, занимающая внутреннюю область сжатого эллипсоида вращения, или сфероида. Показано, что геометрия модели соответствует гиперболической геометрии Гильберта. Определено проективное отображение физического пространства на область модели, найдено описание визуального пространства в гильбертовой метрике, и рассмотрено конформное отображение визуального пространства на модели Пуанкаре. Приведены изображения (проективное и конформное) глобальной структуры визуального пространства, включающей земную поверхность и небосвод, радиальные прямые, гиперпрямые и концентрические окружности. Получены формулы относительно увеличения «бесконечно» удаленных объектов (луны, солнца, созвездий) в зависимости от угла возвышения над горизонтом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев А. М. О нелинейной модели визуального пространства // Автометрия. 2005. 41, № 5. С. 58.
2. Ковалев А. М. О моделях визуального пространства // Оптика и спектроскопия. 2006. 100, № 1. С. 134.
3. Ковалев А. М. Описание визуального пространства в моделях Клейна и Пуанкаре // Автометрия. 2006. 42, № 4. С. 57.

4. **Kaufman L., Kaufman J. H.** Explaining the moon illusion // Proc. of the National Academy of Sciences of the USA. 2000. **97**, N 1. P. 500.
5. **Бузман Г., Келли П.** Проективная геометрия и проективные метрики. М.: Изд. иностр. лит., 1957.
6. **Грегори Р. Л.** Разумный глаз: Пер. с англ. М.: УРСС, 2003.
7. **Borghuis B.** The Moon Illusion // <http://retina.anatomy.upenn.edu/~bart/scriptie.html/>
8. **Толанский С.** Оптические иллюзии: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
9. **Indow T.** The Global Structure of Visual Space // Advanced Series of Mathematical Psychology. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2004. Vol. 1

Поступила в редакцию 14 марта 2006 г.
