УДК 501
DOI: 10.15372/PMTF202215157

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМА СИНГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ В ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

В. В. Васильев, С. А. Лурье*

Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения, Хотьково, Россия
* Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия
E-mails: vvvas@dol.ru, salurie@mail.ru

Предлагается модифицированная форма дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы, исследуемые в прикладной математике и механике. Отмечается, что решения классических уравнений в особых точках могут испытывать разрывы первого и второго рода, не имеющие физической природы и не наблюдаемые экспериментально. При выводе новых уравнений, описывающих физические поля и процессы, рассматриваются не бесконечно малые элементы среды, а элементы, обладающие конечными размерами. В результате классические уравнения включают нелокальные функции, осредненные по объему элемента, и дополняются уравнениями Гельмгольца, устанавливающими связь между нелокальными и актуальными физическими переменными, которые являются гладкими функциями, не имеющими особых точек. Рассмотрены сингулярные задачи теории математической физики и теории упругости. Полученные решения сопоставляются с результатами экспериментов.

Ключевые слова: прикладная механика, прикладная математика, дифференциальное исчисление, дифференциальные уравнения

Введение. Предмет, закономерности и особенности подходов прикладной математики рассматриваются в работах [1–3]. В прикладной математике используются некоторые упрощения математического аппарата, основанного на классическом дифференциальном исчислении, т. е. на анализе бесконечно малых величин. Однако получаемые в результате решения, описывающие физические процессы, оказываются лишенными физического смысла.

Рассмотрим классическую задачу теории упругости — задачу Фламана о воздействии сосредоточенной силы на полуплоскость (рис. 1). Полуплоскость с введенной в ней системой координат Oxy нагружена сосредоточенной силой P в точке O и закреплена в точке A для устранения ее перемещения как твердого тела. Эта задача рассматривается во многих монографиях по теории упругости, но результаты ее решения не комментируются, так как предложить разумное объяснение получаемого решения не представляется возможным. Выражения для перемещений точек края полуплоскости ($y = 0$, $r = x$, $\theta = \pm\pi/2$) имеют вид [4]

$$u_x(x) = \mp\frac{(1-\nu)P}{2Eh}, \qquad u_y(x) = -\frac{P}{\pi Eh}\Big(1 + \nu + 2\ln\frac{x}{y_A}\Big). \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № 075-15-2022-1023.

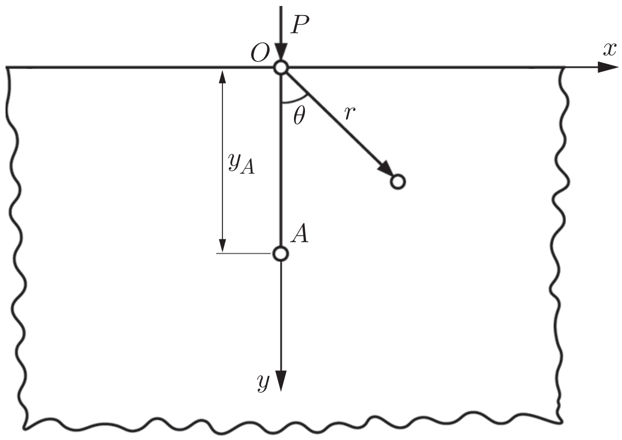

Рис. 1. Полуплоскость, нагруженная сосредоточенной силой

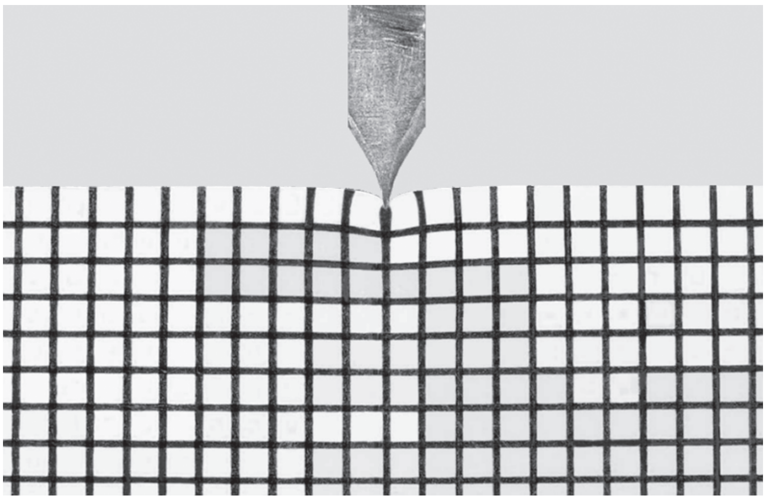

Рис. 2. Пластина при локальном нагружении

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; h — толщина пластины, моделируемой полуплоскостью; y_A — ордината точки A. Из второго равенства (1) следует, что вертикальное перемещение точки, в которой приложена сила, стремится к бесконечности, что не имеет физического смысла. Из первого равенства (1) следует, что горизонтальное перемещение имеет точку разрыва. При этом участки границы $x > 0$ и $x < 0$ сдвигаются как твердые тела по направлению к точке, в которой приложена сила, а в точке $x = 0$ перемещение имеет разрыв. Предложить геометрическую интерпретацию такого поля перемещений не представляется возможным.

На рис. 2 представлена пластина из достаточно жесткой силиконовой резины ($h =$ 5,5 мм, $y_A = 20$ мм, $E = 5{,}6$ МПа, $\nu = 0{,}48$, $P = 9{,}8$ Н [5]), нагруженная заостренным индентором. На пластину нанесена сетка, позволяющая измерять перемещения. На рис. 3 штриховыми линиями показано решение (1), точками — результаты измерений. Можно сделать вывод, что в эксперименте перемещение u_y в точке приложения силы является конечным, а перемещение u_x, определяемое первым равенством (1), не согласуется с экспериментальными данными.

1. Математическая сингулярность. Сингулярные функции являются фундаментальными решениями классических уравнений математической физики. Если уравнение баланса, описывающее любой физический процесс, является гармоническим, то фунда-

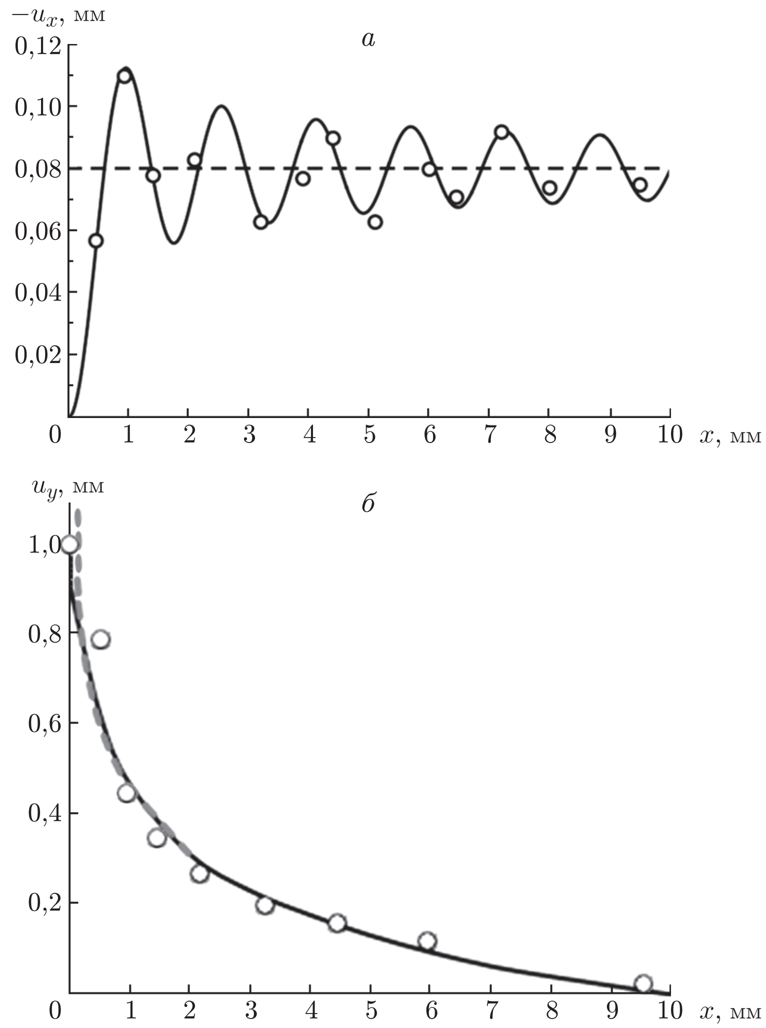

Рис. 3. Перемещения $u_x(x)$ (*а*) и $u_y(x)$ (*б*) в задаче о нагружении пластины сосредоточенной силой:

сплошные линии — обобщенное решение, штриховые — классическое решение, точки — экспериментальные данные

ментальное решение имеет особенность типа $\ln r$ для плоской ($r^2 = x^2 + y^2$) задачи и особенность типа r^{-1} для пространственной ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) задачи. В случае бигармонического уравнения баланса для плоской задачи вторая производная фундаментального решения $r^2 \ln r$ имеет логарифмическую особенность, а для пространственной задачи фундаментальное решение имеет особенность типа r^{-1} [6]. Граничные условия также порождают сингулярности. В угловых и конических точках возникают особенности решения в виде произведения степенной и логарифмической функций, причем показатель степени зависит от угла и граничных условий. Локальное нагружение порождает особенность в напряжениях типа r^{-1} и r^{-2} для плоской и пространственной задач соответственно.

2. Нелокальные функции. Рассмотрим функцию одной переменной $u(x)$, показанную на рис. 4. Традиционное определение производной du/dx_1 предполагает, что числитель и знаменатель этого отношения являются бесконечно малыми величинами. Однако в задачах с особыми точками числитель не обладает этим свойством. Как известно, существуют разрывы первого рода, когда в точке $x = 0$ функция $u(x)$ изменяется на конечную

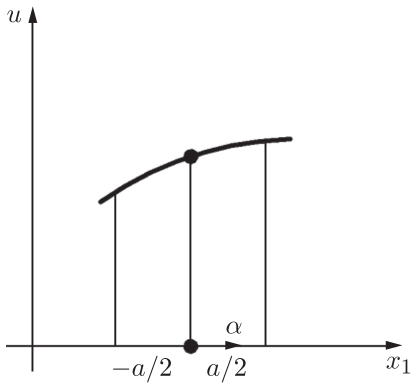

Рис. 4. Функция одной переменной

величину (штриховая линия на рис. 3,*а*), и второго рода, когда в точке $x = 0$ функция обращается в бесконечность (штриховая линия на рис. 3,*б*).

Для устранения возникающих при бесконечно малой величине dx_1 особенностей будем полагать, что в производной du/dx_1 знаменатель является конечной величиной a (см. рис. 4). Введем в окрестности точки x_1 локальную координату α, такую что $-a/2 \leqslant \alpha \leqslant a/2$. Основная идея предлагаемого подхода заключается в следующем. Если функция $u(x_1)$ описывает реальный физический процесс, то она по определению является гладкой и имеет необходимое число производных по x_1 при $\alpha = 0$. Разлагая функцию $u(x_1, \alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_1, получаем

$$u(x_1, \alpha) = u(x_1) + \alpha u' + \frac{\alpha^2}{2!}\, u'' + \frac{\alpha^3}{3!}\, u''' + \ldots, \tag{2}$$

где $u' = du/dx_1$. Введем нелокальную функцию $U(x_1)$, равную среднему значению функции $u(x_1, \alpha)$, представляемой на интервале $[-a/2, a/2]$ разложением (2) [7]:

$$U(x_1) = \frac{1}{a} \int\limits_{-a/2}^{a/2} u(x_1, \alpha)\, d\alpha. \tag{3}$$

Подставляя в (3) равенство (2), получаем

$$U(x_1) = u(x_1) + \frac{a^2}{24}\, u''(x_1) + \ldots. \tag{4}$$

Из (4) следует, что нелокальная функция определяется в точке x_1 не только значением исходной функции, но и значениями ее второй производной. Введем нелокальную производную в виде отношения разности значений функции на концах интервала к длине этого интервала:

$$\frac{Du}{Dx_1} = \frac{1}{a}\left[u\Big(x_1, \frac{a}{2}\Big) - u\Big(x_1, -\frac{a}{2}\Big)\right].$$

Подставляя в это выражение разложение (2) и учитывая равенство (4), находим

$$\frac{Du}{Dx_1} = u' + \frac{a^2}{24}\, u''' + \ldots = \frac{dU}{dx_1}.$$

Таким образом, нелокальная производная функции совпадает с классической производной нелокальной функции.

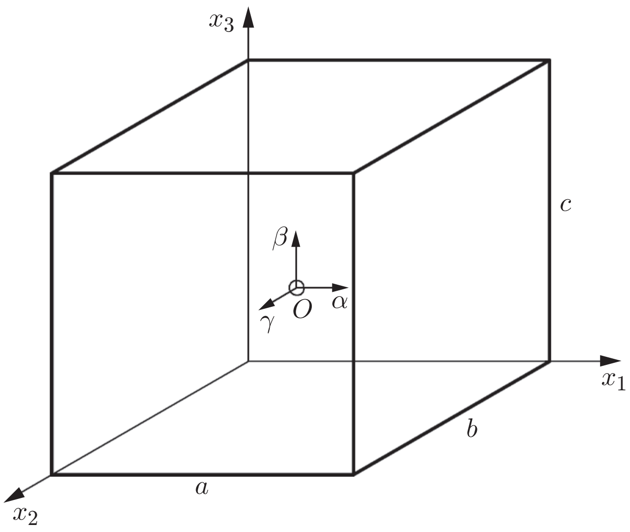

Рис. 5. Элемент среды

3. Обобщенные уравнения. Рассмотрим элемент среды, имеющий малые, но конечные размеры a, b, c (рис. 5). В окрестности точки O с координатами x_1, x_2, x_3 введем локальные координаты α, β, γ, такие что $|\alpha| \leqslant a/2$, $|\beta| \leqslant b/2$, $|\gamma| \leqslant c/2$. Рассмотрим симметричный тензор $t(t_1, t_2, t_3, t_{12}, t_{13}, t_{23})$, описывающий в общем случае некоторый физический процесс. В частных случаях этот тензор может вырождаться в вектор или скаляр, зависящий от двух или одной переменной. Полагая, как и выше, что компоненты тензора являются гладкими функциями координат, представим их в окрестности точки O в виде ряда Тейлора по координатам α, β, γ:

$$t_{ij}(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) = t_{ij}(x, y, z) + \alpha t_{ij,1} + \beta t_{ij,2} + \gamma t_{ij,3} + \frac{1}{2!}\,(\alpha^2 t_{ij,11} + \beta^2 t_{ij,22} + \gamma^2 t_{ij,33} +$$
$$+ 2\alpha\beta t_{ij,12} + 2\alpha\gamma t_{ij,13} + 2\beta\gamma t_{ij,23}) + \frac{1}{3!}\,(\alpha^3 t_{ij,111} + \beta^3 t_{ij,222} + \gamma^3 t_{ij,333} + 3\alpha^2\beta t_{ij,112} +$$
$$+ 3\alpha\beta^2 t_{ij,122} + 3\alpha^2\gamma t_{ij,113} + 3\alpha\gamma^2 t_{ij,133} + 3\beta^2\gamma t_{ij,223} + 3\beta\gamma^2 t_{ij,233}) \qquad (5)$$

(индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате). Далее ограничимся членами, представленными в разложении (5).

Осредняя компоненты тензора по объему элемента аналогично (3), введем нелокальные компоненты тензора

$$T_{ij} = \frac{1}{abc} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-c/2}^{c/2} t(x_1, x_2, x_3; \alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Подставляя в это выражение разложения (5), получаем

$$T_{ij} = t_{ij} + L(t_{ij})/24, \qquad L(t_{ij}) = a^2 t_{ij,11} + b^2 t_{ij,22} + c^2 t_{ij,33}. \qquad (6)$$

Для вывода уравнений, описывающих физическое поле, можно использовать общий закон сохранения [8], согласно которому дивергенция тензора равна нулю:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} = 0 \qquad (1, 2, 3). \qquad (7)$$

Здесь запись “$(1, 2, 3)$” обозначает круговую перестановку индексов, с использованием которой можно записать еще два уравнения. В теории упругости уравнения (7) являются уравнениями равновесия. Эти уравнения можно получить непосредственно из условий равновесия элемента, показанного на рис. 5 [9, 10]. Таким образом, уравнения равновесия сохраняют классическую форму, но вместо классического тензора напряжений t_{ij} используется нелокальный тензор T_{ij}. Аналогичным образом можно получить уравнения теплопроводности и диффузии путем замены в соответствующих классических уравнениях традиционных переменных на нелокальные. Рассмотрим деформации элемента, показанного на рис. 5. Введем вектор перемещения $u(u_1, u_2, u_3)$ и осредним перемещения по граням выделенного элемента. В частности, для граней $\alpha = \pm a/2$ и $\beta = \pm b/2$ имеем

$$u(x, y, z; \alpha)\big|_{\alpha=\pm a/2} = \frac{1}{bc} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-c/2}^{c/2} u(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)\big|_{\alpha=\pm a/2}\, d\beta\, d\gamma,$$

$$u(x, y, z; \beta)\big|_{\beta=\pm b/2} = \frac{1}{ac} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \int\limits_{-c/2}^{c/2} u(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)\big|_{\beta=\pm b/2}\, d\alpha\, d\gamma.$$

Используя традиционный подход, определим линейные деформации элемента с конечными размерами как отношение разности полученных перемещений граней к расстояниям между гранями, а угловые деформации как изменения первоначально прямых углов между координатными плоскостями. В результате имеем

$$E_1 = \frac{1}{a} \left[u_1(\alpha)\big|_{\alpha=a/2} - u_1(\alpha)\big|_{\alpha=-a/2} \right] \qquad (1, 2, 3),$$

$$E_{12} = \frac{1}{a} \left[u_2(\alpha)\big|_{\alpha=a/2} - u_2(\alpha)\big|_{\alpha=-a/2} \right] + \frac{1}{b} \left[u_1(\beta)\big|_{\beta=b/2} - u_1(\beta)\big|_{\beta=-b/2} \right] \qquad (1, 2, 3).$$

С использованием разложения для u_i, аналогичного равенству (5) для t_{ij}, окончательно получаем

$$E_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}, \qquad E_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \qquad (1, 2, 3). \tag{8}$$

Выражения (8) совпадают с классическими соотношениями Коши, но включают нелокальные перемещения, которые выражаются через классические перемещения равенствами, аналогичными соотношениям (6):

$$U_i = u_i + L(u_i)/24. \tag{9}$$

Оператор $L(\cdot)$ определяется вторым равенством (6). Нелокальные перемещения имеют простой физический смысл: это перемещения элемента, показанного на рис. 5, осредненные по его объему. С учетом разложения для u, аналогичного равенству (5), имеем

$$\frac{1}{abc} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-c/2}^{c/2} u_i(x_1, x_2, x_3; \alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma = U_i.$$

Для установления связи между нелокальными напряжениями и деформациями используем обобщенный закон Гука:

$$T_{11} = \frac{E}{1+\nu} \Big(E_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(E_{11} + E_{22} + E_{33} \right) \Big), \quad T_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\, E_{12} \quad (1, 2, 3). \tag{10}$$

Соотношения (10) не противоречат экспериментальным данным. Как известно, модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν определяются в экспериментах, в которых напряженно-деформированное состояние является однородным. В этом случае оператор $L(\,\cdot\,)$, входящий в выражения (6), (9) для нелокальных напряжений и перемещений, обращается в нуль, $T_{ij} = t_{ij}$, $U_i = u_i$ и соотношения (10) вырождаются в классический закон Гука. В работе [11] экспериментально показано, что при больших градиентах напряжений классический закон Гука не выполняется. Таким образом, определяющие соотношения имеют классическую форму, но связывают нелокальные функции.

Для изотропного тела можно считать, что $b = c = a$. Тогда равенства (6), (9) принимают вид

$$T_{ij} = t_{ij} + \frac{a^2}{24}\,\Delta(t_{ij}), \qquad U_i = u_i + \frac{a^2}{24}\,\Delta(u_i), \tag{11}$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа. Для двумерных задач $b = a$, $c = 0$, Δ — двумерный оператор Лапласа. Для одномерных задач $b = c = 0$, $\Delta(\cdot) = d^2(\cdot)/dx_1^2$. Если аргументом является скалярная функция, то оператор Лапласа инвариантен и соотношения, аналогичные (11), справедливы в любой системе координат.

Основная идея предлагаемого подхода заключается в следующем. Как следует из изложенного выше, предлагаемые обобщенные уравнения поля совпадают с классическими уравнениями, но вместо традиционных функций включают нелокальные функции. Таким образом, если получено классическое решение, то известны и соответствующие нелокальные функции. Классические переменные находятся в результате интегрирования системы уравнений Гельмгольца (11). В левые части этих уравнений подставляются известные нелокальные функции. Общее решение уравнений Гельмгольца состоит из частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Если при этом традиционное решение имеет особые точки, то частное решение также обладает этим свойством, а общее решение при соответствующем выборе постоянных интегрирования позволяет устранить особенности частного решения и получить регулярное решение. Следует отметить, что это оказывается возможным, если рассматривается физический процесс. Если в левые части уравнений (11) подставить некоторые абстрактные функции с особыми точками, то решение однородного уравнения Гельмгольца не позволит устранить их. Таким образом, предлагаемый подход не является универсальным: он применим только к прикладным задачам. Ниже рассматриваются некоторые приложения предлагаемого метода.

4. Приложение метода к задачам теории упругости. Исследуются две задачи.

Задача 1. Рассмотрим круглую мембрану, закрепленную по контуру радиусом R и нагруженную в центре сосредоточенной силой P и усилиями t, создающими ее предварительное натяжение (классическая сингулярная задача математической физики [12]). Прогиб мембраны удовлетворяет уравнению

$$t\,\Delta w = -p(r), \qquad \Delta(w) = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,(rw'). \tag{12}$$

Здесь $0 \leqslant r \leqslant R$ — радиальная координата; $(\cdot)' = d(\cdot)/dr$. Для мембраны, нагруженной в центре сосредоточенной силой, давление $p(r)$ может быть выражено через дельта-функцию, т. е. $p(r) = P\delta(r)$. Решение уравнения (12), удовлетворяющее условию закрепления мембраны $w(r)\big|_{r=R} = 0$, имеет вид [12]

$$w = \frac{P}{2\pi t}\,\ln\frac{R}{r}. \tag{13}$$

Следовательно, $w \to \infty$ при $r \to 0$. Заметим, что прогиб обращается в бесконечность при любой величине силы P, сколь бы малой она ни была. Решение (13) уравнения (12) имеет принципиальный недостаток классической постановки задачи. Правая часть уравнения (12) является сингулярной, и решение (13) также является сингулярным. С точки зрения математики это решение является верным, поскольку сингулярное воздействие вызывает сингулярную реакцию. Однако при решении прикладной задачи такой результат неприемлем, поскольку понятия силы P и прогиба w принципиально различаются. Сосредоточенная сила не существует в реальности и представляет собой предел произведения давления и площади площадки, на которую оно действует, в случае если давление стремится к бесконечности, а площадь площадки — к нулю. Как отмечалось выше, устранить такую сингулярность невозможно, так как она введена по определению. Тем не менее прогиб является физической величиной, которую можно измерить, и он не может быть бесконечно большим. Заметим, что в математике существует доказательство корректности решения (13), которое представляется в виде предельной функции последовательности регулярных решений [13]. Однако физического смысла полученный результат не имеет. Таким образом, математическая корректность решения не обеспечивает его физической достоверности.

Заметим, что интегрирование понижает порядок сингулярности. Поэтому можно предположить, что порядок уравнения (11) недостаточен для получения физически корректного решения. В предлагаемом подходе повышение порядка происходит за счет уравнения Гельмгольца (11), которое для рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$W = w + \frac{a^2}{24}\,\Delta(w). \tag{14}$$

Поскольку прогиб является скалярной функцией, оператор Лапласа обладает свойством инвариантности, записывается в полярных координатах и определяется вторым равенством (12). В левую часть уравнения (14) следует подставить классическое решение (13). В результате получаем

$$\frac{a^2}{24}\,\Delta(w) + w = \frac{P}{2\pi t}\ln\frac{R}{r}. \tag{15}$$

Определим параметр a, входящий в уравнение (15). Для этого рассмотрим задачу в пространстве с большим числом измерений, т. е. будем считать мембрану не двумерным математическим многообразием, а трехмерным объектом, имеющим толщину. Тогда мембрану можно интерпретировать как круглую пластину конечной толщины h. Уравнение, описывающее прогиб круглой пластины, нагруженной в центре сосредоточенной силой, имеет вид [14]

$$-\frac{D}{t}\,\Delta(w) + w = \frac{P}{2\pi t}\ln\frac{R}{r}, \tag{16}$$

где $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ — изгибная жесткость пластины. Сопоставляя уравнения (15) и (16), можно сделать вывод, что $a^2 = -24D/t$. Поскольку величины D и t не могут быть отрицательными, параметр a является мнимым. Этот результат представляется естественным, так как предлагаемая теория является феноменологической: она основана на континуальной модели среды, не учитывающей ее реальную микроструктуру. Поэтому в рамках такой модели невозможно получить информацию о структуре среды, в частности о реальных размерах элемента, показанного на рис. 5.

Введем действительный параметр $s^2 = -a^2/24$. Тогда равенства (11) принимают окончательный вид

$$T_{ij} = t_{ij} - s^2\,\Delta(t_{ij}), \qquad U_i = u_i - s^2\,\Delta(u_i). \tag{17}$$

Уравнение (15) преобразуется к виду [15]

$$\frac{d^2w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} - w = -\frac{P}{2\pi t}\ln\frac{R_s}{\rho}, \quad \rho = \frac{r}{s}, \quad R_s = \frac{R}{s}. \tag{18}$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (18), выражается через модифицированные функции Бесселя $I_0(\rho)$, $K_0(\rho)$ и соответствующее частное решение. Заметим, что, поскольку правая часть (18) удовлетворяет уравнению Лапласа, она является частным решением этого уравнения. Окончательно имеем

$$w(\rho) = C_1 I_0(\rho) + C_2 K_0(\rho) + \frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R_s}{\rho}. \tag{19}$$

Определяя постоянную C_1 из граничного условия $w(\rho)\big|_{\rho=R_s} = 0$, получаем

$$w(\rho) = C_2 \Big(K_0(\rho) - \frac{K_0(R_s)}{I_0(R_s)}\, I_0(\rho) \Big) + \frac{P}{2\pi t} \ln \frac{R_s}{\rho}. \tag{20}$$

Заметим, что помимо последнего члена, неограниченно возрастающего при $\rho \to 0$, решение включает функцию Макдональда $K_0(\rho)$, которая также обращается в бесконечность при $\rho = 0$. Таким образом, имеется возможность устранить сингулярность решения (20) путем выбора постоянной C_2. Для этого используем разложения функций Бесселя в степенные ряды вида [16]

$$I_0(\rho) = 1 + \frac{\rho^2}{4(1!)^2} + \frac{\rho^4}{4^2(2!)^2} + \ldots, \qquad K_0(\rho) = -\Big(\gamma + \ln \frac{\rho}{2}\Big) I_0(\rho) + \frac{\rho^2}{4(1!)^2} + \ldots, \tag{21}$$

где $\gamma = 0{,}577$ — постоянная Эйлера. Подставляя ряды (21) в решение (20) и переходя к пределу при $\rho \to 0$, можно сделать вывод, что прогиб в центре пластины оказывается конечным, если принять $C_2 = -P/(2\pi t)$. Окончательно получаем

$$w(\rho) = \frac{P}{2\pi t} \Big(\ln \frac{R_s}{\rho} - K_0(\rho) + \frac{K_0(R_s)}{I_0(R_s)}\, I_0(\rho) \Big). \tag{22}$$

Производная прогиба

$$w' = \frac{1}{s} \frac{dw}{d\rho} = \frac{P}{2\pi t s} \Big(K_1(\rho) - \frac{1}{\rho} + \frac{K_0(R_s)}{I_0(R_s)}\, I_1(\rho) \Big)$$

в центре мембраны обращается в нуль, так как $K_1\big|_{\rho\to 0} \to 1/\rho$, $I_1(0) = 0$.

Проверка полученного решения проводилась в экспериментах [15] с мембраной из полимерной пленки с алюминиевым покрытием, имеющей толщину 0,04 мм и постоянные материала $E = 5{,}4$ ГПа, $\nu = 0{,}4$. В мембране создавалось предварительное натяжение $t = 0{,}77$ Н/мм. В результате расчета получен параметр $s = 0{,}216$ мм. На рис. 6 показано распределение прогиба по радиусу мембраны при силе $P = 0{,}5$ Н. Сплошная линия соответствует решению (22), точками показаны результаты эксперимента. Различие обобщенного и классического решений проявляется только вблизи центра мембраны. Результаты расчета представлены на рис. 7, где штриховая линия соответствует решению (13), а сплошная — решению (22).

Следует отметить, что регулярное решение уравнения (18) с логарифмической сингулярностью не существует, если в правую часть уравнения ввести произвольную сингулярность. Как отмечено выше, предлагаемый подход не является универсальным и сингулярность устраняется в задачах, имеющих физический смысл.

Задача 2. Рассмотрим задачу теории упругости о растягиваемой пластине с центральной трещиной (рис. 8). При $x \geqslant c$ и $\theta = 0$ выражение для напряжения σ_y имеет вид [17]

$$\sigma_y = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - c^2}}. \tag{23}$$

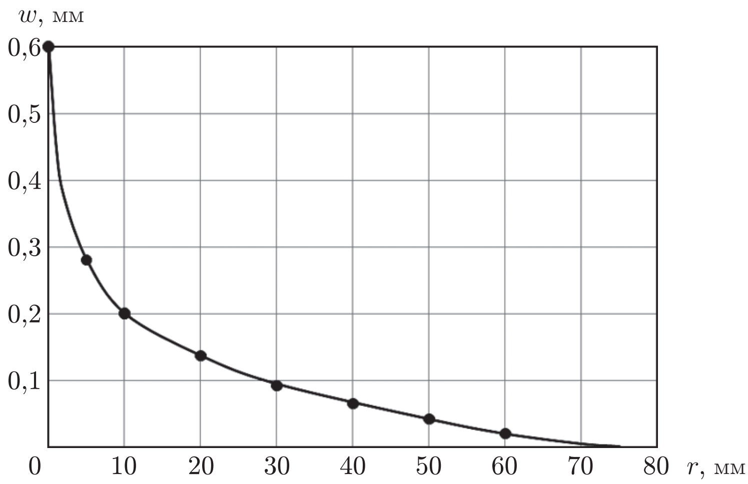

Рис. 6. Распределения прогиба по радиусу мембраны:
линия — решение (22), точки — экспериментальные данные

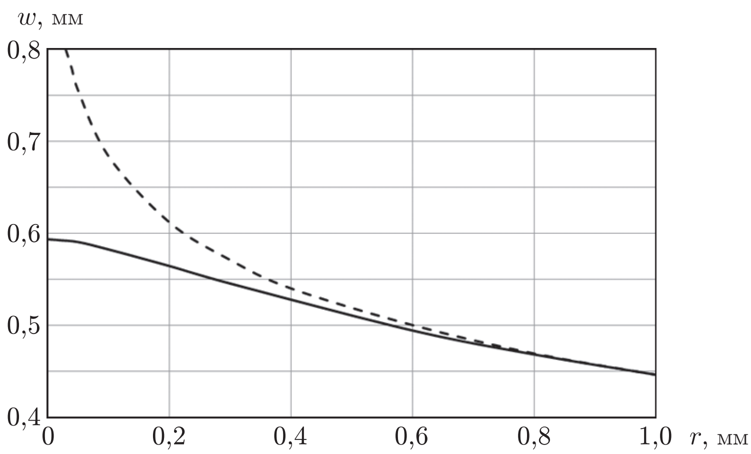

Рис. 7. Прогиб в окрестности центра мембраны:
штриховая линия — классическое решение, сплошная — обобщенное решение

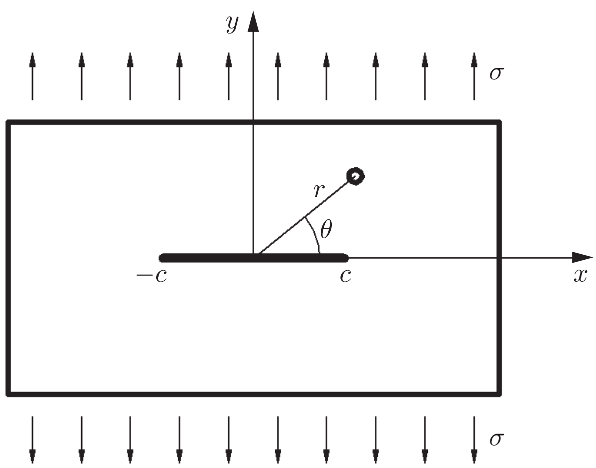

Рис. 8. Схема растяжения пластины с трещиной

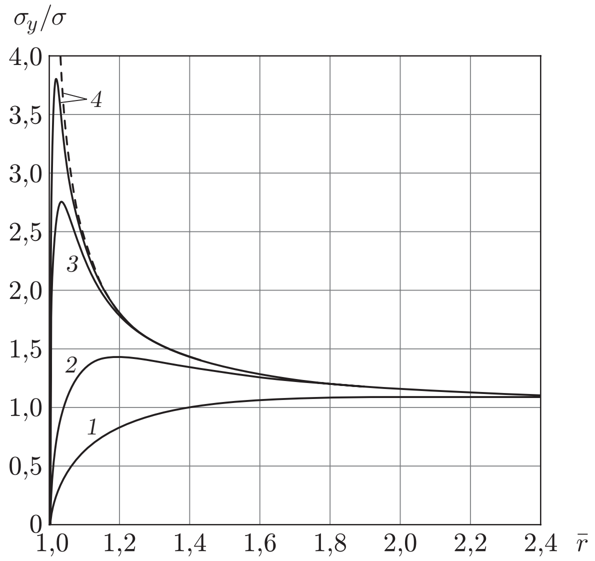

Рис. 9. Зависимости $\sigma_y(\bar{r})$:
сплошные линии — решение (24), штриховая — классическое решение (23); *1* — $\lambda = 3$, *2* — $\lambda = 10$, *3* — $\lambda = 50$, *4* — $\lambda = 100$

Следовательно, напряжение на конце трещины является бесконечно большим при сколь угодно малом действующем напряжении σ. Это означает, что пластина из хрупкого материала, прочность которого определяется максимальным напряжением, не воспринимает нагрузку, что противоречит результатам экспериментов, согласно которым пластины из хрупкого материала с трещинами обладают определенной несущей способностью. Обобщенное решение задачи, представленное в работе [18], позволяет получить следующее выражение для напряжения:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}}\Big[\frac{1+\bar{r}}{\sqrt{2+\bar{r}}} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\Big(2 + \frac{3}{\lambda} + \frac{15}{8\lambda^2}\Big)\,\mathrm{e}^{-\lambda\bar{r}}\Big] + \frac{3}{8\lambda\sqrt{2\bar{r}^3}}\Big(4 - \frac{1}{\lambda}\Big)\,\mathrm{e}^{-\lambda\bar{r}} - {}$$
$$- \frac{6}{\lambda^2\sqrt{\bar{r}^5}}\Big(\frac{1+\bar{r}}{\sqrt{(2+\bar{r})^5}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\bar{r}}\Big), \quad x \geqslant c, \quad \theta = 0. \qquad (24)$$

Здесь $\lambda = c/s$; $\bar{r} = r/c$; r — расстояние от конца трещины, отсчитываемое вдоль оси x. Зависимости напряжения от безразмерного расстояния $\bar{r}$ при различных значениях параметра λ показаны на рис. 9 сплошными линиями. Штриховая линия соответствует классическому решению (23). Из рис. 9 следует, что максимальные напряжения являются конечными. Обозначив максимальное напряжение через $\sigma_m(\lambda)$ и разделив его на действующее на пластину напряжение σ (см. рис. 8), находим коэффициент концентрации напряжения $k_\sigma = \sigma_m(\lambda)/\sigma$. Зависимость k_σ от λ, построенная с помощью решения (24), показана на рис. 10. Эта зависимость справедлива для пластин из любого материала.

Для определения $\lambda = c/s$ необходимо найти параметр s, входящий в уравнения Гельмгольца (17). Поскольку найти этот параметр аналитически, используя более общую модель пластины, невозможно, предлагается определить его экспериментально. С этой целью была испытана на растяжение пластина из полиметилметакрилата (оргстекла), являющегося хрупким материалом с пределом прочности $\bar{\sigma} = 83{,}3$ МПа, определенным с точностью до 1,3 %. В пластине шириной 99 мм и толщиной 2,93 мм имелась центральная трещина длиной $c = 10{,}8$ мм. Пластина разрушилась при напряжении $\sigma = 7{,}06$ МПа. Таким образом, в эксперименте коэффициент концентрации напряжений составил $k_\sigma =$

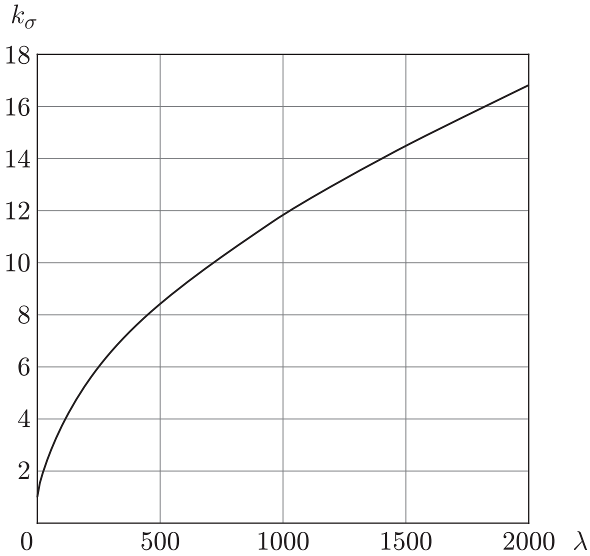

Рис. 10. Зависимость коэффициента концентрации напряжений k_σ от параметра λ

$\bar{\sigma}/\sigma = 11{,}8$. С использованием зависимости, приведенной на рис. 10, находим $\lambda = 1000$. Тогда $s = c/\lambda = 0{,}0108$ мм. Поскольку параметр s определен экспериментально, возникает вопрос о степени его инвариантности, т. е. о возможности предсказать несущую способность пластин из аналогичного материала с трещинами других размеров. Пластина с трещиной размером $c = 6$ мм разрушилась при напряжении $\sigma = 9{,}36$ МПа. При значении $s = 0{,}0108$ мм $\lambda = c/s = 556$, с использованием зависимости, приведенной на рис. 10, получаем $k_\sigma = 8{,}9$ и предельное значение напряжения $\sigma = 9{,}36$ МПа, совпадающее с экспериментальным значением. Пластина с трещиной размером $c = 18$ мм разрушилась при напряжении $\sigma = 5{,}35$ МПа. В расчете получены значения $\lambda = 1667$, $k_\sigma = 15{,}5$ и значение $\sigma = 5{,}37$ МПа, которое отличается от экспериментального значения на 0,4 %. Таким образом, найденный в одном эксперименте параметр s позволяет рассчитать критическое напряжение для пластин с трещинами различной длины. Более того, экспериментально показано, что параметр s, полученный при растяжении пластины с центральной трещиной, может быть использован для оценки прочности растягиваемых и изгибаемых пластин с боковыми трещинами [18].

Вернемся к задаче Фламана, рассмотренной во введении. Из обобщенного решения этой задачи, приведенного в работе [5], получаем следующие выражения для перемещений границы полуплоскости $\theta = \pm\pi/2$ (см. рис. 1):

$$u_x(x) = \mp\frac{(1-\nu)P}{2Eh}\left[1 - J_0\Big(\frac{x}{s}\Big)\right],$$

$$u_y(z) = \frac{2P}{\pi Eh}\left[K_0\Big(\frac{y_A}{s}\Big) - K_0\Big(\frac{x}{s}\Big) + \ln\Big(\frac{y_A}{x}\Big)\right] + \frac{(1+\nu)P}{\pi Eh}\left[K_2\Big(\frac{x}{s}\Big) - K_2\Big(\frac{y_A}{s}\Big) + \frac{2s^2}{y_A^2} - \frac{2s^2}{x^2}\right].$$

Для пластины из силиконовой резины (см. рис. 2) экспериментально получено значение $s = 0{,}25$ мм. Расчетные зависимости для перемещений $u_x(x)$, $u_y(x)$ показаны сплошными линиями на рис. 3 и хорошо согласуются с экспериментальными данными.

5. Математические сингулярности и реальность. Как отмечено выше, сингулярные функции появляются в решениях задач математической физики, если эти задачи рассматриваются в классической постановке. При интерпретации получаемых результатов, как правило, используется традиционный подход, согласно которому решение считается достоверным во всех точках, за исключением области в окрестности точки сингулярности. При этом вопрос о размерах этой области остается открытым, но в целом справедливость сингулярного решения не подвергается сомнению. Однако такой подход не используется в математических работах, в которых утверждается, что математическая сингулярность является реальной. Рассмотрим, в частности, математическую проблему сингулярности решений алгебраических уравнений, описывающих кривые с точками излома и самопересечения. Примером такой кривой является подпись, включающая подобные точки, в которых, как утверждается в [19], образуются сингулярности. При этом не учитывается, что в отличие от одномерного многообразия, являющегося математической моделью кривой, подпись является трехмерным объектом, имеющим малые, но конечные ширину и толщину. В точках пересечения линии располагаются на разных уровнях, самопересечения кривой отсутствуют и сингулярность не возникает. Еще более категоричным является утверждение, что сингулярности существуют в реальном мире повсюду [20]. В частности, сингулярность появляется на сгибе газеты, поскольку кривизна обращается в бесконечность. При этом не учитывается, что газетный лист не является двумерным многообразием, а имеет конечную толщину и изгибную жесткость. Изгибание газеты описывается теорией пластин, из которой следует, что бесконечно большая кривизна может образоваться только в результате приложения бесконечно большого изгибающего момента, что физически нереально. Таким образом, существование математической сингулярности основано на переносе в реальность формальных математических результатов, полученных с помощью неадекватных с точки зрения физики расчетных моделей.

Заключение. Сингулярные и разрывные решения предлагается считать формальными математическими результатами, не имеющими физического смысла. Для описания физических процессов можно использовать обобщенную постановку задачи, включающую наряду с традиционными уравнениями уравнения Гельмгольца, содержащие дополнительную экспериментальную константу и позволяющие получать регулярные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Блехман И. И.** Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. Киев: Наук. думка, 1976.
2. **Блехман И. И.** Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложения математики / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. М.: Наука, 1990.
3. **Блехман И. И.** Прикладная математика. Предмет, логика, особенности подходов / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. М.: Ленанд, 2018.
4. **Тимошенко С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1975.
5. **Vasiliev V. V., Lurie S. A., Salov V. A.** On the Flamant problem for a half-plane loaded with a concentrated force // Acta Mech. 2021. V. 232, N 4. P. 1–11.
6. **Полянин А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
7. **Васильев В. В., Лурье С. А.** Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 459–471.
8. **Синг Д. Л.** Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. **Васильев В. В., Лурье С. А.** Обобщенная теория упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 16–27.
10. **Васильев В. В., Лурье С. А.** Новое решение осесимметричной контактной задачи теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 5. С. 12–21.

11. **Андреев А. В.** Инженерные методы определения концентрации напряжений в деталях машин. М.: Машиностроение, 1976.
12. **Михлин С. Г.** Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977.
13. **Соболев С. Л.** Уравнения математической физики. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
14. **Теория** гибких круглых пластин. М.: Изд-во иностр. лит., 1967.
15. **Васильев В. В., Лурье С. А.** Обобщенное решение задачи о круглой мембране, нагруженной сосредоточенной силой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2016. № 3. С. 115–119.
16. **Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1968.
17. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
18. **Васильев В. В., Лурье С. А., Салов В. А.** Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // Физ. мезомеханика. 2018. Т. 21, № 4. С. 5–12.
19. **Interview** with Heisuka Hironaka // Notices AMS. 2005. V. 52, N 9. P. 1010–1019.
20. **Яо Ш.** Теория струн и скрытые измерения вселенной / Ш. Яо, С. Надис. М.: Питер, 2013.

Поступила в редакцию 21/VI 2022 г.,
после доработки — 21/VI 2022 г.
Принята к публикации 26/IX 2022 г.