

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕРСНОЙ ЗАСЕЛЕННОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ГАЗА ПРИ АДИАБАТИЧЕСКОМ РАСШИРЕНИИ В СОПЛЕ

Г. В. Гембаржевский

(Москва)

В работе получены приближенные аналитические выражения для мощности и коэффициента усиления слабого сигнала газодинамического лазера в более общих предположениях, чем использовались ранее. Так, для получения простой теоретической оценки коэффициента усиления слабого сигнала в [1] были сделаны следующие допущения: всюду в потоке газа заселенность третьей моды CO_2 постоянна и равна заселенности в горле сопла, а заселенность двух других мод CO_2 находится в равновесии с поступательным движением. Приблизительно такие же результаты получены в [2], но как следствие предположения о бесконечно большой скорости охлаждения газа в сопле по сравнению со скоростью колебательной релаксации. Поэтому [2] позволяет найти область применимости результатов, полученных в [1], которая оказывается ограниченной относительно низкими температурой и давлением торможения.

Закон подобия для коэффициента усиления газодинамического лазера в области сравнительно высоких давлений торможения предложен в [3]. Решение модельной задачи о колебательной релаксации с постоянными скоростями реакций позволило получить закон подобия лишь с точностью до неизвестной функции от температуры торможения, показателя адиабаты газа и конфигурации сопла. Для определения этой функции необходим численный расчет системы кинетических и газодинамических уравнений для сопла [4-6].

Вследствие пренебрежения изменением скорости колебательной релаксации вдоль сопла область применимости полученных результатов [1-3] существенно ограничена: так, в [1, 2] требуется ограничить сверху параметры торможения, а в [3] фиксируются конфигурация сопла, температура торможения и показатель адиабаты газа.

В настоящей статье с помощью учета зависимости коэффициентов кинетических уравнений от времени предполагается получить аналитические выражения для зависимости мощности и коэффициента усиления газодинамического лазера от формы и размеров сопла, параметров торможения и состава газа, справедливые в широкой области изменения этих параметров.

Примем обычные допущения, используемые в численных расчетах [4-6]: существуют колебательные температуры T_i отдельных мод смеси (индекс $i = 1, 2, 3$ относится к модам CO_2 , $i = 4$ — к азоту), вращательная температура равна поступательной T , газодинамическое течение квазиодномерно и пренебрежем эффектами вязкости и теплопроводности. Кроме того, примем еще два малосущественных допущения: характеристическая температура третьей моды CO_2 равна характеристической температуре четвертой моды, т. е. азота $\theta_3 = \theta_4$, скорость обмена между первой и второй модами CO_2 выше скорости охлаждения газа, т. е. $Y_1 = Y_2^2 \exp \cdot (-78/T) \approx Y_2^2$, где $Y_i = \exp(-\theta_i/T_i)$ — величина, определяющая заселенность моды i , а θ_i — характеристическая температура моды i . Это допущение используется в работах [3, 6], а в [5] показано, что оно выполняется с высокой степенью точности даже при низких давлениях.

И, наконец, основным допущением является следующее: зависимость газодинамических величин от времени в коэффициентах кинетических уравнений можно аппроксимировать зависимостью для течения газа с постоянным показателем адиабаты γ . Действительно, данные, приведенные в [6], позволяют утверждать, что точность расчета инверсной заселенности

с использованием последнего предположения лежит в пределах $\pm 25\%$. Погрешность в расчете тем ниже, чем меньше начальный запас колебательной энергии, т. е. чем ниже температура торможения и чем больше относительные концентрации гелия Ψ_2 и азота Ψ_2 .

Используя указанные выше допущения, получим систему

$$dY_2 / dX_2 = A_{21} (Y_2 - X_2) - mA_{31} (Y_3 - Y_2^3 X_2^{-3} X_3) \quad (1)$$

$$dY_3 / dX_3 = A_{31} (Y_3 - Y_2^3 X_2^{-3} X_3) - A_{32} (Y_4 - X_3) \quad (2)$$

$$dY_4 / dX_4 = A_{41} (Y_4 - X_4) - rA_{32} (Y_3 - Y_4) \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения: X_i — равновесные значения Y_i

$$X_i = \exp(-\theta_i / T), \quad A_{ij} = N_* W_{ij} R_{ij} H^{-1} X_i^{-1}$$

$$W_{21} = 0.5 \theta_2^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 P_{21}^{\alpha} F_{\alpha} \sigma_{\alpha}^1 U_{\alpha}^1 / C$$

$$W_{31} = \theta_3^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 P_{31}^{\alpha} F_{\alpha} \sigma_{\alpha}^1 U_{\alpha}^1 / C$$

$$W_{41} = \theta_4^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 P_{41}^{\alpha} F_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 U_{\alpha}^2 / C$$

$$W_{32} = \theta_3^{-1} P_{32}^2 \Psi_2 \sigma_2^1 U_2^1 / C$$

N_* — значение плотности газа в горле сопла; Ψ_{α} — относительная концентрация вещества α (индекс α принимает значения 1, 2, 3, что обозначает углекислый газ, азот и гелий соответственно); σ_{α}^1 — сечение столкновения молекулы CO_2 и молекулы α согласно данным работы [7]; σ_{α}^2 — сечение столкновения молекулы N_2 и молекулы α согласно [7]; U_{α}^1 — средняя относительная скорость молекул α и CO_2 ; U_{α}^2 — средняя относительная скорость молекул α и N_2 ; C — скорость звука $P_{i1}^{\alpha} (P_{32}^2)$ — вероятности соответствующих колебательных переходов при единичном столкновении с молекулой α (N_2). В соответствии с [5,7] здесь приняты следующие значения:

$$P_{21}^1 = 450 T^{-1/2} \exp(-110 T^{-1/3} + 100 T^{-2/3})$$

$$P_{21}^2 = 3.0 P_{21}^1, \quad P_{21}^3 = 10 T^{-1/2} \exp(-50 T^{-1/3})$$

$$P_{31}^1 = 2.5 \exp(-80 T^{-1/3} + 60 T^{-2/3}), \quad P_{31}^2 = 0.4 P_{31}^1$$

$$P_{31}^3 = 0.16 P_{31}^1, \quad P_{41}^{\alpha} = 1.4 \cdot 10^5 \exp(-280 T^{-1/3})$$

$$P_{32}^2 = 4 \cdot 10^{-9} (1100 - T)^2 + 6 \cdot 10^{-4}$$

$$R_{21} = (1 - Y_2)^4 (1 - Y_2^2) (1 - Y_3) [1 + 2Y_2 (1 + Y_2)^{-2}]^{-1}$$

$$R_{31} = (1 - Y_2)^2 (1 - Y_2^2) (1 - Y_3)^3, \quad R_{41} = (1 - Y_4)^3$$

$$R_{32} = (1 - Y_2)^2 (1 - Y_2^2) (1 - Y_3)^3 (1 - Y_4)$$

$$m = 5.25 (1 - Y_2)^2 (1 - Y_3)^{-2} [1 + 2Y_2 (1 + Y_2)^{-2}]^{-1} \exp \times \\ \times (-2420 \cdot T^{-1})$$

$$r = \Psi_1 \Psi_2^{-1} (1 - Y_4)^2 (1 - Y_3)^{-2}$$

$$H = \frac{dS}{dt} \frac{[1 + 2k(1 - t)]^2}{S_* (1 - t) t^{1/2} T k (1 + 2k)}$$

где $S = S(l)$ — сечение сопла на расстоянии l от горла, S_* — сечение сопла в горле, T_* — поступательная температура в горле, $t = T / T_*$, $k = (\gamma - 1)^{-1}$, γ — показатель адиабаты смеси.

Допустим, что область «замораживания» третьей и двух других мод CO_2 разделены, тогда $Y_3 - Y_2^3 X_2^{-3} X_3 \approx Y_3 - X_3$. Ниже показано, что

это действительно так в интересных с точки зрения получения инверсной заселенности случаях.

Рассматривая систему уравнений (1) — (3), отметим, что коэффициенты A сильно зависят от X , так что в горле сопла $AX \gg 1$, а в конце сопла $AX \ll 1$, т. е. вначале скорость охлаждения газа меньше скорости колебательной релаксации, а затем картина меняется на обратную. Предполагая, что $dY/dX \approx Y/X$ (подобное допущение использовалось в работе [8]), можно найти решения системы в обоих предельных случаях — $AX \gg 1$. Наконец, сшивая решения в точке X^+ , где $AX^+ = 1$, получим замороженные значения Y^+ . Начальные условия не влияют на Y^+ , если в горле сопла выполнено условие $AX \gg 1$.

Конкретные результаты следующие.

1°. Суммарная скорость колебательной релаксации N_2 и третьей моды CO_2 определяется переходом A_{31} , т. е. пусть $A_{31}(X_{331}^+) < rA_{32}(X_{331}^+)$ где X_{331}^+ определяется как корень уравнения $X_3 A_{31}(X_3) = 1$, тогда

$$Y_3^+ \simeq Y_4^+ \simeq \left[\left(\frac{2r+1}{rA_{31}} + \frac{1}{r(r+1)A_{32}} \right) \left(1 + \frac{A_{41}}{rA_{31}} + \frac{A_{41}}{rA_{32}} \right)^{-1} \right]_{X_3=X_{331}^+} \quad (4)$$

Здесь и в формулах (5, 6) выражение в квадратных скобках берется в точках, указанных за скобками.

2°. Ограничивающим переходом является переход A_{32} . Пусть

$$rA_{32}(X_{332}^+) < A_{31}(X_{332}^+), \quad A_{41}(X_{332}^+) < rA_{31}(X_{332}^+), \quad X_{332}^{++} < X_{331}^+ < X_{332}^+$$

где X_{331}^+ определено выше, X_{332}^{++} и X_{332}^+ — соответственно меньший и больший корни уравнения $X_3 rA_{32}(X_3) = 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{rA_{31}} + \frac{2}{r(r+1)A_{32}} \right) \left(1 + \frac{A_{41}}{rA_{31}} + \frac{A_{41}}{rA_{32}} \right)^{-1} \right]_{X_3=X_{332}^+} \leq Y_3^+ \simeq \\ & \simeq Y_4^+ \leq \left[\left(\frac{1+r}{rA_{31}} + \frac{2}{r(r+1)A_{32}} \right) \left(1 + \frac{A_{41}}{rA_{31}} + \frac{A_{41}}{rA_{32}} \right)^{-1} \right]_{X_3=X_{332}^+} \end{aligned} \quad (5)$$

В обоих указанных выше случаях для замороженного значения Y_2^+ получаем

$$Y_2^+ = [2A_{21}^{-1} (1 + mA_{31}Y_3^+)]_{X_2=X_2^+} \quad (6)$$

где X_2^+ определяется уравнением $X_2 A_{21}(X_2) = 1$.

Отметим следующее важное обстоятельство: замороженная заселенность первой и второй мод CO_2 $Y_1^+ = (Y_2^+)^2$ может быть сделана сколь угодно малой за счет подбора формы сопла $S_*^{-1} dS/dl$ ниже сечения, где замораживается третья мода CO_2 ($X_3 \approx X_{331}^+$), если в этой области сопла выполняется неравенство $W_{21}R_{21} \gg W_{31}R_{31}$. Для этого оказывается достаточно 30—40% гелия в смеси согласно принятым значениям вероятностей процессов. Тем самым обосновано допущение о разделе областей замораживания третьей и двух других мод CO_2 .

Учитывая сказанное выше относительно заселенности первой и второй мод CO_2 , будем считать, что максимальная мощность P , которую можно извлечь из газовой смеси в виде когерентного излучения, определяется мощностью, запасенной в третьей моде CO_2 и в азоте, т. е.

$$P = h(\nu_3 - \nu_1) S_* U_* N_* [\Psi_1 Y_3^+ (1 - Y_3^+)^{-1} + \Psi_2 Y_4^+ (1 - Y_4^+)^{-1}] \quad (7)$$

где $h(\nu_3 - \nu_1)$ — энергия кванта излучения, $S_* U_* N_*$ — расход газа.

Анализируя формулы (4), (5), (7) (и считая независимыми переменными $S = S(l), T_*, X_3^+, \Psi_1, \Psi_1 + \Psi_2$), можно указать оптимальные условия для достижения максимальной мощности.

1. Угол β между осью и образующей осесимметричного сопла или половину угла между плоскостями клинового сопла следует выбрать максимально допустимыми, так как $P \sim \lg \beta$ (имеется в виду та часть сопла, где замораживается третья мода CO_2 , т. е. $X_3 \approx X_3^+$).

2. Так как $P \sim S_*^{1/2}$ для осесимметричного сопла, то при фиксированном суммарном критическом сечении следует использовать несколько сопел вместо одного (в соответствии с рекомендациями работы [4]), одновременно увеличивая плотность в критическом сечении пропорционально $S_*^{-1/2}$ (тогда все прочие параметры останутся неизменными, в частности число Рейнольдса). Для клинового сопла мощность пропорциональна его ширине.

3. Критическую температуру следует выбрать по возможности максимальной, так как $P \sim T_*^{1+k/2}$ для осесимметричного сопла и $P \sim T_*$ для клинового. Лишь процесс диссоциации ограничивает T_* сверху.

4. Мощность зависит от суммарной относительной концентрации CO_2 и N_2 не сильнее, чем $P \sim \Psi_1 + \Psi_2$. Величина $\Psi_1 + \Psi_2$ ограничивается относительной концентрацией He , требуемой для эффективной дезактивации первой и второй мод CO_2 ($\Psi_1 + \Psi_2 \leq 0.7$).

5. Для 1° зависимость P от X_{331}^+ обнаруживает пологий максимум в области $X_{331}^+ = 2 \cdot 10^{-2}$ и $2 \cdot 10^{-1}$ для осесимметричного и клинового сопла соответственно.

6. В случае 1° оптимальное значение $r = A_{31}(X_{331}^+) / A_{32}(X_{331}^+)$; $P \sim \Psi_1^{-1}$.

Рассмотрим теперь коэффициент усиления слабого сигнала газодинамического лазера g . Отметим, что наибольший интерес представляет не столько коэффициент усиления, сколько оптическая толщина на ширине сопла gd , определяемая равенством

$$\Delta I / I = \exp(gd) - 1$$

где $\Delta I / I$ есть относительное увеличение интенсивности света при прохождении слоя оптически активной среды толщиной d , равной ширине сопла.

Оказывается, что и оптическая толщина gd , и коэффициент усиления g как функции расстояния вдоль сопла достигают максимума в той точке, где плотность падает до значения $N_0 \approx 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (т. е. там, где лоренцовская форма линии сменяется на доплеровскую). Под g здесь понимается коэффициент усиления в центре колебательно-вращательной линии, причем вращательное квантовое число J выбирается оптимальным при данной температуре. Приведенный выше вывод справедлив, если замораживание первой и второй мод CO_2 заканчивается раньше, чем плотность газа падает до значения $N_0 \approx 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Этого можно добиться всегда, увеличивая плотность газа N_* и уменьшая радиус критического сечения осесимметричного сопла или высоту клинового пропорционально N_*^{-1} , причем все остальные параметры остаются без изменения.

Максимальный коэффициент усиления $\max g$ и максимальное значение усиления света по ширине осесимметричного сопла $\max gd$ определяются формулами

$$\max g \approx a \Psi_1 (Y_3^+ - Y_1^+) (1 - Y_1^+) (1 - Y_2^+)^2 (1 - Y_3^+) [T(N_0)]^{-1} \quad (8)$$

$$\max gd \approx \frac{2a \Psi_1 (Y_3^+ - Y_1^+) (1 - Y_1^+) (1 - Y_2^+)^2 (1 - Y_3^+) S_*^{1/2}}{\pi^{1/2} T(N_0) [t(N_0)]^{k/2} [1 + 2k - 2kt(N_0)]^{1/4}} \quad (9)$$

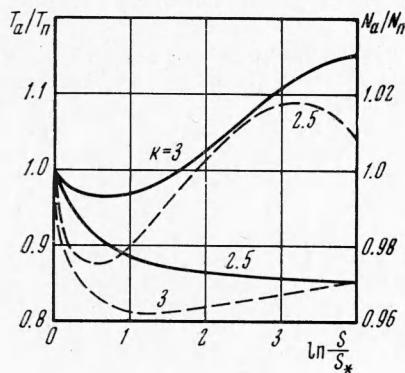
где $a = 3 \cdot 10^2, \text{ см}^{-1} \text{ град}$.

Анализируя формулы (4), (5), (8), (9) (и считая независимыми переменными $S = S(l)$, T_* , X_3^+ , Ψ_1 , $\Psi_1 + \Psi_2$), получаем следующие условия для достижения максимального усиления на ширине сопла.

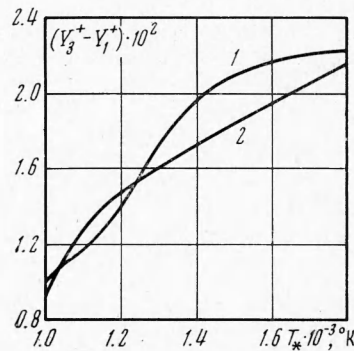
1. Угол β следует выбирать максимально допустимым, так как $\max gd \sim (\operatorname{tg} \beta)^{1/2+1/k}$, $\max g \sim (\operatorname{tg} \beta)^{1/k}$.

2. Для осесимметричного сопла $\max gd \sim S_*^{(k-2)/4k}$. Поэтому при фиксированном суммарном критическом сечении следует использовать несколько осесимметричных сопел вместо одного. В клиновом сопле следует увеличивать его ширину d и уменьшать высоту в критическом сечении h_* , так как $(\max g) d \sim dh_*^{-1/k}$.

3. Для осесимметричного сопла T_* следует выбирать максимально допустимой, так как $\max gd \sim T_*^{(n^2-k+2)/4k}$. Для клинового сопла максимум



Фиг. 1



Фиг. 2

усиления достигается при температуре, определяемой выражением

$$T_* \simeq -\theta_3 / \ln X_3^+$$

(т. е. замораживание третьей моды CO_2 должно происходить в горле сопла).

4. Соответствует п. 4 условий достижения максимальной мощности.

5. Для 1° оптимальное значение $X_{331}^+ = 3 \cdot 10^{-1}$ для клинового сопла, а для осесимметричного X_{331}^+ следует выбирать максимально допустимым, учитывая то, что процесс диссоциации ограничивает X_{331}^+ сверху. Максимум в зависимости оптической толщины от X_{331}^+ выражен слабо (пологий).

6. В 1° для осесимметричного сопла оптимальное значение $r = A_{31}(X_{331}^+) / A_{32}(X_{331}^+)$. Для клинового сопла оптимальное значение r бесконечно велико ($\Psi_2 = 0$).

7. Сравнивая эффективность клинового и ряда осесимметричных сопел, получаем следующий результат. При фиксированных параметрах ΣS_* , $\operatorname{tg} \beta$, T_* , X_3^+ , Ψ_1 , $\Psi_1 + \Psi_2$, N_* (ΣS_* — суммарное критическое сечение) отношение максимальных оптических толщин клинового и ряда осесимметричных сопел дается выражением

$$0.5\pi [-T(N_0) \ln X_3^+ / \theta_3]^{k/2}$$

Полученная выше оценка мощности и коэффициента усиления проверялась по численному расчету, опубликованному в работе [5]. Результаты сравнения приведены на графиках. Сплошными линиями на фиг. 1 представлена зависимость отношения поступательной температуры, рассчитанной аналитически (для $k = 2.5, 3$), к температуре, рассчитанной чис-

ленно T_a / T_n , от логарифма относительного сечения сопла $\ln S / S_*$, а пунктирными линиями — зависимость отношения плотности, рассчитанной аналитически ($k = 2.5, 3$) и численно N_a / N_n , от того же аргумента. Состав смеси: 10% $\text{CO}_2 + 90\% \text{N}_2$, температура в критическом сечении $T_* = 1290^\circ \text{K}$, плотность $N_* = 4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. На фиг. 2 приведена зависимость разности $Y_3^+ - Y_1^+$, рассчитанной аналитически для $k = 2$ (кривая 1) и численно (кривая 2), от температуры в критическом сечении, причем плотность меняется незначительно ($N_* \approx 4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$), состав смеси: 10% $\text{CO}_2 + 40\% \text{N}_2 + 50\% \text{He}$.

Приведенные результаты позволяют утверждать, что точность аналитического расчета лежит в пределах 15% по температуре, 4% по плотности и 15% по интенсивности заселенности.

Полученные результаты в принципе применимы и к другим системам, кроме $\text{CO}_2 + \text{N}_2 + \text{He}$.

В заключение автор благодарит Н. А. Генералова за обсуждение работы и полезные замечания и И. К. Селезневу за дополнительные материалы по численному расчету.

Поступила 12 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee G., Gowen F. E. Gain of CO_2 gasdynamic lasers. Appl. Phys. Letter, 1971 vol. 18, No. 6.
2. Щеглов В. А. Упрощенная кинетика процессов, приводящих к инверсии населенностей молекул рабочей среды в газодинамическом лазере. В сб. «Краткие сообщения по физике», № 12, М., Физич. ин-т им. П. Н. Лебедева, 1970.
3. Christiansen W. H., Tsongas G. A. Gain kinetics of CO_2 gasdynamic laser mixture at high pressure. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 12.
4. Басов Н. Г., Михайлов В. Г., Ораевский А. Н., Щеглов В. А. Получение инверсной населенности молекул в сверхзвуковом потоке бинарного газа в сопле Лавалья. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, вып. 12.
5. Генералов Н. А., Козлов Г. И., Селезнева И. К. Об инверсной заселенности молекул CO_2 в расширяющихся потоках газа. ПМТФ, 1971, № 5.
6. Anderson I. D., Jr. Time-dependent analysis of population inversions in an expanding gas. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 8.
7. Taylor R. L., Bitterman S. Survey of vibrational relaxation data for processes important in the $\text{CO}_2 - \text{N}_2$ laser system. Rev. Mod. Phys., 1969, vol. 41, No. 1.
8. Hoffman A. L., Vlasses G. C. A simplified model for predicting gain, saturation, and pulse length for gas dynamic lasers. IEEE Journal QE, 1972, vol. QE-8, No. 2.