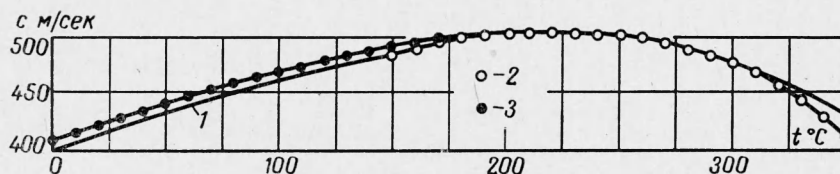


нения звука в двухфазной системе, что свидетельствует о малой величине скачка скорости звука на кривой насыщения при этих температурах.

При больших температурах величина скачка скорости становится столь значительной, что пренебрегать ею нельзя, и поэтому к скорости звука, вычисленной по



Фиг. 3

указанной формуле, необходимо прибавить величину скачка скорости звука при переходе через кривую насыщения. Анализ точности измерений, а также контрольные опыты с воздухом показывают, что ошибка измерения скорости звука во всем диапазоне температур не превышает 1%.

Сравнение результатов измерений на обеих установках, а также с полученными ранее [1] обнаруживает хорошее совпадение измеренных значений скорости звука.

Поступила 4 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдонин В. П., Новиков И. И. Скорость звука на кривой фазового равновесия пар — жидкость. ПМТФ, 1960, № 1, стр. 58.
2. Авдонин А. В. Измерение скорости распространения звуковых волн в насыщенном паре воды. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 10, стр. 1245.
3. Вукалович М. П. Термодинамические свойства воды и водяного пара, 6-е изд. Машгиз, Москва — Берлин, 1958.
4. Новиков И. И. Показатель адиабаты насыщенного водяного пара. Докл. АН СССР, 1948, т. 9, № 8, стр. 1425.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЛУЧИСТО-КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

А. Л. Бурка (Новосибирск)

Рассматривается краевая задача для прямоугольной области $[0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq l]$ со смешанными граничными условиями, включающими конвективные и лучистые потоки. (Температура окружающей среды предполагается равной нулю.)

В линейном приближении получено аналитическое решение для безразмерных лучистых потоков тепла. Математическая постановка задачи записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq \tau < \infty) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} - hT \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} + hT \right)_{x=L} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = E_1(x, 0, \tau) = H [T^4(x, 0, \tau) - T_1^4] \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=l} = E_2(x, l, \tau) = H [T_2^4 - T^4(x, l, \tau)] \quad \left(H = \frac{\sigma_0}{\lambda_0} \right) \quad (4)$$

$$T(x, y, 0) = T_0$$

Здесь E_1, E_2 — отношения результирующих потоков излучения к коэффициенту теплопроводности, a — коэффициент температуропроводности, T_0 — начальная температура области, T_1, T_2 — температуры источников излучения h — относительный коэффициент теплоотдачи, σ_0 — коэффициент излучения абсолютно черного тела, λ_0 — коэффициент теплопроводности. Ниже рассматривается приближенное решение системы из двух нелинейных интегральных уравнений относительно результирующих плотностей излучения на сторонах прямоугольника.

Применяя преобразование Лапласа к (1)–(4), получаем общее решение задачи в изображениях

$$u(x, y, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f_n}{\gamma_n^2} + \frac{1}{N} \frac{\text{ch } \gamma_n y}{\gamma_n \text{sh } \gamma_n l} \int_0^L E_2^\circ(\xi, l, p) X_n(\xi) d\xi - \frac{1}{N} \frac{\text{ch } \gamma_n (y-l)}{\gamma_n \text{sh } \gamma_n l} \int_0^L E_1^\circ(\xi, 0, p) X_n(\xi) d\xi \right] X_n(x) \quad (5)$$

$$u(x, y, p) = \int_0^{\infty} T(x, y, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad \gamma_n = \left(\lambda_n^2 + \frac{p}{a} \right)^{1/2}$$

$$E_1^\circ(x, 0, p) = \int_0^{\infty} E_1(x, 0, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad E_2^\circ(x, l, p) = \int_0^{\infty} E_2(x, l, \tau) e^{-p\tau} d\tau$$

Здесь f_n — коэффициент разложения T_0/a по собственным функциям $X_n(x)$ соответствующей однородной задачи, $X_n(x)$ представляют собой нетривиальные решения уравнения $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$, удовлетворяющие граничным условиям

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(L) + hX(L) = 0$$

Эти решения существуют для всех значений λ_n — корней уравнения $\text{ctg } \lambda L = 1/2(\lambda/h - h/\lambda)$, и имеют вид

$$X_n(x) = \sin \left(\lambda_n x + \text{arc tg } \frac{\lambda_n}{h} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

«Операторные» температуры на сторонах $y = 0$ и $y = l$ определяются

$$u(x, 0, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f_n}{\gamma_n^2} + \frac{1}{N} \frac{1}{\gamma_n \text{sh } \gamma_n l} \int_0^L E_2^\circ(\xi, l, p) X_n(\xi) d\xi - \frac{1}{N} \frac{\text{ch } \gamma_n l}{\gamma_n \text{sh } \gamma_n l} \int_0^L E_2^\circ(\xi, 0, p) X_n(\xi) d\xi \right] X_n(x) \quad (6)$$

$$u(x, l, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f_n}{\gamma_n^2} + \frac{1}{N} \frac{\text{ch } \gamma_n l}{\gamma_n \text{sh } \gamma_n l} \int_0^L E_2^\circ(\xi, l, p) X_n(\xi) d\xi - \frac{1}{N} \frac{1}{\gamma_n \text{sh } \gamma_n l} \int_0^L E_1^\circ(\xi, 0, p) X_n(\xi) d\xi \right] X_n(x), \quad N = \int_0^L X_n^2(x) dx \quad (7)$$

Применяя к (6) и (7) обратное преобразование Лапласа, находим истинные температуры на сторонах прямоугольника и выражаем их через результирующие потоки

$$\left(T_1^4 + \frac{E_1}{H} \right)^{1/4} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} u(x, 0, p) e^{p\tau} dp, \quad \left(T_2^4 - \frac{E_2}{H} \right)^{1/4} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} u(x, l, p) e^{p\tau} dp \quad (8)$$

Выражения (8) представляют систему из двух нелинейных интегральных уравнений относительно результирующих потоков E_1, E_2 . Ее решение в замкнутой форме не представляется возможным.

В качестве параметров, по которым осуществляется линеаризация системы (8), берутся отношения результирующих потоков излучения к падающим E_1/HT_1^4 и E_2/HT_2^4 . Ниже рассматривается случай, когда эти отношения в любой момент времени существенно меньше единицы. Принимая это во внимание, разложим левые части (8) в ряд и ограничимся первыми двумя членами разложения. Переходя к «операторным» потокам излучения и предполагая законность изменения порядка суммирования и интегрирования в (8), получаем

$$\varphi_1^\circ(x, 0, p) = -\frac{T_1}{pT_0} + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\gamma_n^2 \omega_n} + \alpha \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{N \gamma_n \text{sh } \gamma_n l} \varphi_2^\circ(\xi, l, p) d\xi - \beta \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{N \gamma_n \text{th } \gamma_n l} \varphi_1^\circ(\xi, 0, p) d\xi$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^\circ(x, l, p) = & \frac{T_2}{pT_0} - 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\gamma_n^2 \omega_n} - \alpha \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{N \gamma_n \operatorname{th} \gamma_n l} \varphi_2^\circ(\xi, l, p) d\xi + \\ & + \beta \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X(\xi)}{N \gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n l} \varphi_1^\circ(\xi, 0, p) d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\varphi_1^\circ(x, 0, p) = \frac{E_1^\circ}{4HT_0 T_1^3}, \quad \varphi_2^\circ(x, l, p) = \frac{E_2^\circ}{4HT_0 T_2^3}, \quad \frac{\alpha = 4HT_1^3}{\beta = 4HT_2^3}, \quad \omega_n = \lambda_n N \sqrt{\lambda_n^2 + h^2}$$

Выражения (9) представляют собой систему из двух линейных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода с симметричными ядрами. К такой системе применима теорема Гильберта — Шмидта для уравнений с симметричными ядрами [1], и само решение может быть получено в аналитическом виде.

Умножив (9) на $X_n(x) dx$ и проинтегрировав оба уравнения по x в промежутке $(0, L)$, сводим систему (9) в силу ортогональности собственных функций $X_n(x)$ на промежутке $(0, L)$ к алгебраической системе

$$\left(1 + \frac{\beta}{\gamma_n \operatorname{th} \gamma_n l}\right) A_1 - \frac{\alpha}{\gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n l} A_2 = \frac{2hN}{\omega_n} \left(\frac{1}{a\gamma_n^2} - \frac{T_1}{pT_0}\right) \quad (10)$$

$$\frac{\beta}{\gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n l} A_1 - \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_n \operatorname{th} \gamma_n l}\right) A_2 = \frac{2hN}{\omega_n} \left(\frac{1}{a\gamma_n^2} - \frac{T_2}{pT_0}\right), \quad A_k = \int_0^L \varphi_k^\circ(\xi, p) X_n(\xi) d\xi$$

Здесь A_k — неизвестные коэффициенты Фурье разложения функции $\varphi_k^\circ(x, p)$ по собственным функциям $X_n(x)$, а $k = 1, 2$. Определяя A_1 и A_2 из (10) и подставляя в (9), получаем решение для «операторных» потоков в замкнутой форме

$$\varphi_1^\circ(x, 0, p) = -\frac{T_1}{pT_0} + \frac{2h}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\gamma_n^2 \omega_n} + \frac{2h}{aT_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_1(\gamma_n) X_n(x)}{\omega_n} \quad (11)$$

$$\varphi_2^\circ(x, l, p) = \frac{T_2}{pT_0} - \frac{2h}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\gamma_n^2 \omega_n} - \frac{2h}{aT_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_2(\gamma_n) X_n(x)}{\omega_n} \quad (12)$$

Здесь

$$F_1(\gamma_n) = \frac{\kappa(\theta\gamma_n^2 + \lambda_n^2 T_0) \operatorname{sh} \gamma_n l + \alpha(\delta\gamma_n^2 + \lambda_n^2 T_0) \gamma_n + \beta(\theta\gamma_n^2 + \lambda_n^2 T_0) \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n l}{\gamma_n^2 (\gamma_n^2 - \lambda_n^2) (\gamma_n^2 \operatorname{sh} \gamma_n l + \kappa \operatorname{sh} \gamma_n l + q\gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n l)} \quad (13)$$

$$F_2(\gamma_n) = \frac{\kappa(\delta\gamma_n^2 + \lambda_n^2 T_0) \operatorname{sh} \gamma_n l + \beta(\theta\gamma_n^2 + \lambda_n^2 T_0) \gamma_n + \alpha(\delta\gamma_n^2 + \lambda_n^2 T_0) \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n l}{\gamma_n^2 (\gamma_n^2 - \lambda_n^2) (\gamma_n^2 \operatorname{sh} \gamma_n l + \kappa \operatorname{sh} \gamma_n l + q\gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n l)} \quad (14)$$

$$(\theta = T_1 - T_0, \quad \delta = T_2 - T_0, \quad \kappa = \alpha\beta, \quad q = \alpha + \beta)$$

При обратном преобразовании Лапласа отыскание оригиналов первых двух членов выражений (11) и (12) не вызывает затруднений

$$\frac{T_1}{pT_0} \doteq \frac{T_1}{T_0}, \quad \frac{T_2}{pT_0} \doteq \frac{T_2}{T_0}, \quad \frac{2h}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(x)}{\gamma_n^2 \omega_n} \doteq 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\omega_n} e^{-a\lambda_n \tau} \quad (15)$$

Оригинал $F_k(\gamma_n)$ ($k = 1, 2$) определяется по формуле

$$f_k(\tau) = \frac{e^{-a\lambda_n^2 \tau}}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} F_k(\gamma_n) e^{a\gamma_n^2 \tau} d(a\gamma_n^2) \quad (16)$$

После замены переменных $s = a\gamma_n^2$ выражение (16) принимает вид

$$f_k(\tau) = \frac{e^{-a\lambda_n^2 \tau}}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} F_k(s) e^{s\tau} ds \quad (k = 1, 2) \quad (17)$$

Здесь

$$F_1(s) = G^{-1}[\kappa(\theta\sigma^2 + \lambda_n^2 T_0) \operatorname{sh} \sigma l + \alpha(\delta\sigma^2 + \lambda_n^2 T_0) \sigma + \beta(\theta\sigma^2 + \lambda_n^2 T_0) \sigma \operatorname{ch} \sigma l]$$

$$G = \sigma^2 (\sigma^2 - \lambda_n^2) (\sigma^2 \operatorname{sh} \sigma l + \kappa \operatorname{sh} \sigma l + q\sigma \operatorname{ch} \sigma l), \quad \sigma = s / a^{1/2}$$

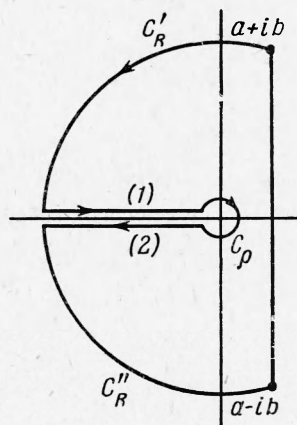
Подынтегральные функции в (17) неоднозначны относительно s в начале координат. Для вычисления этих интегралов рассмотрим контур, составленный из отрезка $(a - ib; a + ib)$, дуг C_R', C_R'' окружности $|s| = R$, двубережного разреза (1), (2) и окружности $C_\rho: |s| = \rho$ (фиг. 1). Внутри этого контура $F_k(s)$ однозначны и имеют бесчисленное множество полюсов; эти функции удовлетворяют на дугах C_R' и C_R'' лемме Жордана [2], т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C_R'} F_k(s) e^{s\tau} ds = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R''} F_k(s) e^{s\tau} ds = 0 \quad (18)$$

Тогда по теореме Коши

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} F_k(s) e^{s\tau} ds + \int_{(1)} F_k(s) e^{s\tau} ds + \right. \\ & \left. + \int_{(2)} F_k(s) e^{s\tau} ds + \int_{C_\rho} F_k(s) e^{s\tau} ds \right] = \\ & = \operatorname{res} F_k(a\lambda_n^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{res} F_k(\mu_m) \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь $a\lambda_n^2, \mu_m$ — особые точки (полюсы). На берегах (1) и (2) имеем соответственно $s = xe^{i\pi}, s = xe^{-i\pi}$ или $\sqrt{s} = i\sqrt{x}, \sqrt{s} = -i\sqrt{x}$



Фиг. 1

Легко заметить, что $F_k(s)$ — четные относительно $i\sqrt{x}$ функции, и вследствие этого на двубережном разрезе

$$\int_{(1)} F_k(s) e^{s\tau} ds + \int_{(2)} F_k(s) e^{s\tau} ds = 0 \quad (20)$$

В этом случае выражение (19) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} F_k(s) e^{s\tau} ds = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} F_k(s) e^{s\tau} ds + \operatorname{res} F_k(\lambda_n^2 a) + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{res} F_k(\mu_m) \quad (21)$$

Полагая $s = \rho e^{i\varphi}, -\pi < \varphi < +\pi$, для первого интеграла в правой части получим

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{+\pi} F_k(\rho e^{i\varphi}) \exp(i\varphi + \rho e^{i\varphi} \tau) \rho d\varphi = -aT_0 \quad (22)$$

В выражении (21) вычеты функций $F_k(s)$ в точках $a\lambda_n^2, \mu_m$ равны

$$\operatorname{res} F_1(a\lambda_n^2) = aT_0 \Psi_1(\lambda_n) \exp \lambda_n^2 a\tau$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{res} F_1(\mu_m) = 2aT_0 \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_1(\lambda_n, \mu_m) \exp\left(-\frac{a\mu_m^2 \tau}{l^2}\right) \quad (23)$$

$$\operatorname{res} F_2(a\lambda_n^2) = aT_0 \Psi_2(\lambda_n) \exp \lambda_n^2 a\tau.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{res} F_2(\mu_m) = 2aT_0 \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_2(\lambda_n, \mu_m) \exp\left(-\frac{a\mu_m^2 \tau}{l^2}\right) \quad (24)$$

Здесь

$$\Psi_1(\lambda_n) = \frac{1}{g} \left(\kappa \frac{T_1}{T_2} \operatorname{sh} \lambda_n l + \alpha \frac{T_2}{T_0} \lambda_n + \beta \frac{T_1}{T_0} \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n l \right)$$

$$\Psi_2(\lambda_n) = \frac{1}{g} \left(\kappa \frac{T_2}{T_0} \operatorname{sh} \lambda_n l + \beta \frac{T_1}{T_0} \lambda_n + \alpha \frac{T_2}{T_0} \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n l \right)$$

$$g = \lambda_n^2 \operatorname{sh} \lambda_n l + \kappa \operatorname{sh} \lambda_n l + q \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n l$$

$$\Phi_1(\lambda_n, \mu_m) = \frac{1}{Q} \left[\kappa \left(\frac{\theta}{T_0} \frac{\mu_m^2}{l^2} - \lambda_n^2 \right) \sin \mu_m + \alpha \frac{\mu_m}{l} \left(\frac{\delta}{T_0} \frac{\mu_m^2}{l^2} - \lambda_n^2 \right) + \right. \\ \left. + \beta \frac{\mu_m}{l} \left(\frac{\theta}{T_0} \frac{\mu_m^2}{l^2} - \lambda_n^2 \right) \cos \mu_m \right] \\ \Phi_2(\lambda_n, \mu_m) = \frac{1}{Q} \left[\kappa \left(\frac{\delta}{T_0} \frac{\mu_m^2}{l^2} - \lambda_n^2 \right) \sin \mu_m + \beta \frac{\mu_m}{l} \left(\frac{\theta}{T_0} \frac{\mu_m^2}{l^2} - \lambda_n^2 \right) + \right. \\ \left. + \alpha \frac{\mu_m}{l} \left(\frac{\delta}{T_0} \frac{\mu_m^2}{l^2} - \lambda_n^2 \right) \cos \mu_m \right] \\ Q = \frac{\mu_m^2}{l^2} \left(\frac{\mu_m^2}{l^2} + \lambda_n^2 \right) \left[(2 + ql) \sin \mu_m - \left(\frac{\kappa l^2}{\mu_m} + \frac{q l}{\mu_m} - \mu_m \right) \cos \mu_m \right]$$

а μ_m — представляют собой корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{l}{q \mu} \left(\frac{\mu^2}{l^2} - \kappa \right)$$

Учитывая (15), (17), (22), (23), (24), окончательно получаем для безразмерных потоков

$$\Phi_1(x, 0, \tau) = -\frac{T_1}{T_0} + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_1(\lambda_n) X_n(x)}{\omega_n} - \\ - 4h \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_1(\lambda_n, \mu_m) X_n(x)}{\omega_n} \times \\ \times \exp \left[-a \left(\lambda_n^2 + \frac{\mu_m^2}{l^2} \right) \tau \right] \quad (25)$$

$$\Phi_2(x, l, \tau) = \frac{T_2}{T_0} - 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_2(\lambda_n) X_n(x)}{\omega_n} + \\ + 4h \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_2(\lambda_n, \mu_m) X_n(x)}{\omega_n} \times \\ \times \exp \left[-a \left(\lambda_n^2 + \frac{\mu_m^2}{l^2} \right) \tau \right] \quad (26)$$

Ряды в (25) и (26) быстро сходятся; первая сумма сходится примерно как λ_n^{-3} , а вторая сходится примерно как $\mu_m^{-2} \exp[-(\lambda_n^2 + \mu_m^2) \tau]$.

Это позволяет в расчетах ограничиваться первыми членами рядов. В частности, если $L, l \sim 0.1$ м, а $a \sim 10^{-3}$ м²/час, то с достаточной точностью можно ограничиться выражениями:

$$\Phi_1(x, 0, \tau) = -\frac{T_1}{T_0} + 2h \frac{\psi_1(\lambda_1) X_1(x)}{\omega_1} - 4h \frac{\Phi_1(\lambda_1, \mu_1) X_1(x)}{\omega_1} \exp \left[-a \left(\lambda_1^2 + \frac{\mu_1^2}{l^2} \right) \tau \right] \quad (27)$$

$$\Phi_2(x, l, \tau) = \frac{T_2}{T_0} - 2h \frac{\psi_2(\lambda_1) X_1(x)}{\omega_1} + 4h \frac{\Phi_2(\lambda_1, \mu_1) X_1(x)}{\omega_1} \exp \left[-a \left(\lambda_1^2 + \frac{\mu_1^2}{l^2} \right) \tau \right] \quad (28)$$

На фиг. 2 представлена зависимость потоков $\Phi_1(F, \eta)$ и $\Phi_2(F, \eta)$ от критерия Фурье F для $\eta = 0, \eta = 1/2$, (при этом $\eta = x/L$) — по формулам (27) и (28).

Поступила 19.X.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. Гостехиздат, 1953.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теорий функций комплексного переменного. Физматгиз, М.—Л., 1958.