

УДК 532.529.5:536.24

## Исследование структуры полидисперсной изотермической газочапельной струи на начальном участке. Эксперимент и численное моделирование\*

Ю.А. Ложкин<sup>1</sup>, Д.М. Маркович<sup>1,2</sup>, М.А. Пахомов<sup>1</sup>, В.И. Терехов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

E-mails: lozhkin@itp.nsc.ru, dmark@itp.nsc.ru, pakhomov@ngs.ru,  
terekhov@itp.nsc.ru

Выполнено экспериментальное и численное исследование структуры газочапельной полидисперсной струи. Эксперименты проведены с применением методов Particle Image Velocimetry/ Particle Tracking Velocimetry/Interferometric Particle Imaging, которые позволили выполнить одновременные измерения параметров осредненных и пульсационных скоростей несущей и дисперсной фаз. Турбулентность газовой фазы рассчитывалась с использованием модели переноса рейнольдсовых напряжений. Экспериментально и численно показана существенная неизотропность пульсаций скорости частиц как по длине, так и по сечению газочапельной струи. Наблюдается сильная зависимость аксиальных пульсаций скоростей дисперсной фазы от ее размера.

**Ключевые слова:** газочапельная полидисперсная струя, эксперимент, численное моделирование, анизотропия, турбулентность.

### Введение

Двухфазные струи широко применяются в различных технических приложениях, среди примеров — течения в камерах сгорания реактивных двигателей, топках котлов, испарителях и т.д. Исследование распространения и межфазного взаимодействия расплывленных капель в струе газа сопровождается большим количеством сложных явлений: межфазным динамическим и тепловым взаимодействием, изменением размера капель, дополнительным притоком массы пара при их испарении и изменением турбулентности несущей среды. Исследованию аэромеханики и тепломассопереноса в таких течениях посвящено большое число исследований, подробные обзоры приведены в работах [1–3]. К настоящему времени в литературе представлены многочисленные экспериментальные и численные работы по исследованию распространения частиц, модификации турбулентности газа при добавлении дисперсной фазы и испарения капель, например, [4–18].

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Президента РФ (грант для молодых докторов наук № МД-670.2012.8) и РФФИ (грант № 13-08-01411).

В работах [7, 8] были выполнены измерения нисходящей изотермической струи с большой массовой концентрацией капель ( $M_{L1} = 0,12, 0,4$  и  $0,73$ ). В качестве капель был использован растворитель со свойствами, близкими к бензиновому топливу. Размер полидисперсных частиц варьировался в диапазоне  $d_1 = 1-100$  мкм. Эксперименты проводились с использованием методов Phase Doppler Anemometer — PDA (измерение осредненной, пульсационной скоростей капель и их размера и корреляции между скоростями газа и капель) и Planar Laser Induced Fluorescence — PLIF (измерение концентрации частиц). Измерены осредненные и пульсационные параметры скоростей фаз, размер капель и их концентрация. Показано, что при больших массовых загрузках ( $M_{L1} > 0,4$ ) необходимо принимать во внимание обратное влияние частиц на процессы переноса в турбулентной струе. Степень расширения двухфазной струи уменьшается с ростом концентрации капель и при  $M_{L1} = 0,73$  она становится более чем на 30 % уже соответствующей однофазной струи.

Измерения структуры восходящей газок капельной струи с испаряющимися каплями ацетона при небольших величинах массовой концентрации ( $M_{L1} = 0,02-0,05$ ) и среднего заутеровского диаметра ( $d_{32} = 14-24$  мкм) выполнялись в работе [9]. Эксперименты проводились с использованием PDA и PLIF (измерялась концентрация капель ацетона и его пара) методов. Были измерены осредненные и пульсационные параметры скоростей фаз, размер капель ацетона, концентрация частиц и его пара.

Встречающиеся в практических приложениях газок капельные струи чаще всего являются полидисперсными. Для математического описания распределения дисперсной фазы по размерам вводятся соответствующие функции распределения [1, 11]. Для многих процессов, связанных с образованием мелкодисперсных частиц, логарифмы их радиусов подчиняются нормальному закону распределения [1, 11]. Фактор полидисперсности учитывается разбиением дисперсной фазы на конечное число фракций, каждая из которых характеризуется своим размером, количеством, скоростью и температурой [1]. Полифракционный состав двухфазного потока моделируется системой монодисперсных частиц, размеры которых изменяются в широком диапазоне (непрерывное распределение частиц по размерам заменяется ступенчатым). При наличии фазовых переходов средний размер каждой фракции частиц остается неизменным, а изменяется число частиц во фракциях вследствие их перехода во фракции с другими размерами. Этот подход является наиболее часто применяемым при расчетах полидисперсных потоков. Количество решаемых уравнений прямо пропорционально числу фракций, на которое разбивается спектр частиц по размерам.

Достаточно часто среднеквадратичное отклонение размеров капель не превышает 5–10 % от некоторого среднего значения диаметра частицы [1]. Поэтому с целью упрощения математической модели полидисперсная система заменяется монодисперсной смесью со средним диаметром частиц, размер которых определяется из условия равенства концентраций реального и условного (монодисперсного) потоков. Монодисперсная среда удобна для построения математической модели, поэтому приведение реального распределения к некоторому эквивалентному монодисперсному распределению использовалось при описании газок капельных струй, например, в работах [4, 13, 14, 16]. Полидисперсные газок капельные затопленные струи численно изучались в работах [4, 12, 13, 15, 17]. Исследования выполнялись как для испаряющихся [5, 6, 9, 12–14, 16, 17], так и для неиспаряющихся [4–8, 10, 15] струй.

В работах [4, 5, 12–17] были получены данные по осредненной скорости капель и газа, пульсациям скорости несущей среды, турбулентной кинетической энергии газовой фазы, объемной концентрации капель и пара, распределению размера частиц и температуры газа. Разработанные методы расчета двухфазных струйных течений [4, 5, 12, 14, 16] основаны на использовании изотропного представления турбулентных пульсаций скорости несущей фаз. Только в работах [13, 15, 17] турбулентность газовой фазы рассчитывалась с использованием модели переноса реинольдсовых напряжений.

Анализируя вышеперечисленные работы, можно отметить, что к настоящему времени накоплена обширная информация по динамике двухфазных затопленных струй с твердыми и жидкими частицами. Однако в основном исследования проведены для больших удалений от сопла струи ( $x/(2R) > 20$ , где  $x$  — аксиальная координата и  $R$  — радиус среза трубы или сопла) и на автомодельном участке струи. Основной целью настоящей работы было исследование параметров двухфазного полидисперсного потока на начальном участке струи. Главное внимание в исследовании уделено экспериментальному и численному изучению структуры течения вертикальной двухфазной струи и турбулентности газовой и дисперсной фазы.

В экспериментальной части работы проведены одновременные измерения в плоском сечении потока осредненных и пульсационных скоростей газовой и дисперсной фаз при использовании измерительных алгоритмов (Particle Image Velocimetry/Particle Tracking Velocimetry/Interferometric Particle Imaging — PIV/PTV/IPI) разработки ИТ СО РАН. PIV метод позволял получать характеристики несущей фазы, а комбинация методов PTV/IPI давала возможность определять две компоненты скорости и размер полидисперсных частиц.

В части численного моделирования настоящая работа является продолжением работы [16], где была разработана модель расчета и выполнено численное моделирование турбулентной свободной струи с испаряющимися каплями. Модель основана на эйлеровом описании обеих фаз [18, 19], ее главное отличие от других численных моделей для газокпельных струй — введение в математическую модель дифференциальных уравнений для расчета пульсаций скорости капель. Это позволило провести расчет анизотропных пульсаций скорости дисперсной фазы. Экспериментально анизотропия компонент пульсаций скорости дисперсной фазы в аксиальном и радиальном направлениях, которая увеличивается с ростом инерционности частиц, исследовалась в [20], а численный расчет для воздушной струи с твердыми частицами был проведен в работе [21]. В настоящей работе исследование выполнено для двухфазной полидисперсной изотермической струи с использованием модели переноса реинольдсовых напряжений (second moment closure — SMC).

## 1. Описание экспериментальной установки

**1.1. Экспериментальный стенд.** Измерительная система, используемая в настоящей работе, собрана на базе измерительной системы «ПОЛИС» [22]. Схема экспериментального стенда показана на рис. 1, *a*. Для измерения параметров потока (скорости газа и капель и их размеров) использовалась комбинация методов анемометрии по изображениям

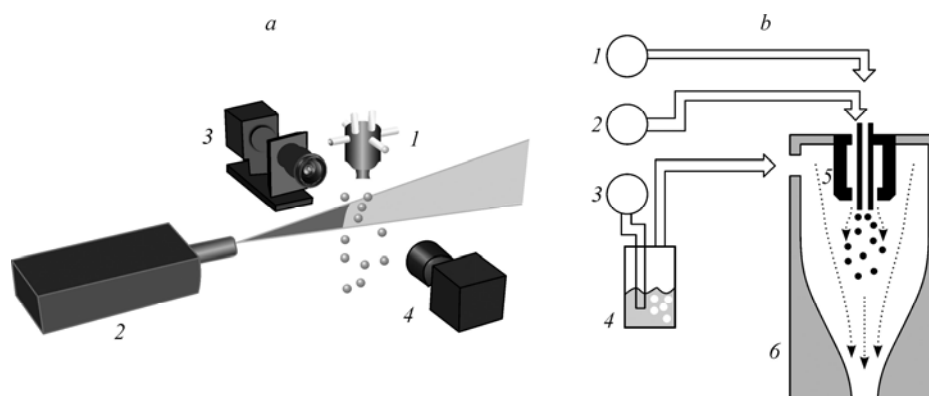


Рис. 1. Схемы экспериментального стенда (*a*) и соплового блока (*b*).  
*a*: 1 — сопло, 2 — лазер, 3, 4 — CCD-камеры; *b*: 1 — шприцевой насос, 2, 3 — расходомеры-регуляторы, 4 — генератор мелкодисперсного аэрозоля, 5 — форсунка, 6 — сопло.

частиц (PIV) и интерферометрический метод измерения диаметров частиц (PI). Основным преимуществом такого способа измерения является возможность одновременного определения параметров непрерывной и дисперсной фаз в одной области пространства. Световой нож толщиной 0,7 мм, формируемый лучом импульсного Nd:YAG лазера Quantel EverGreen (2) (энергия в импульсе 70 мДж, длина волны 532 нм), освещает центральное продольное сечение струи, истекающей из сопла (1). Рассеянный каплями воды и частицами-трассерами свет регистрируется на CCD-камеру Imrex (4) для PIV измерений и на CCD-камеру Imrex (3) для PI измерений, на которые установлена специальная оптика для формирования интерференционных картин от капель (разрешение камер — 4870×3240 пикселей). Все оборудование монтировалось на жесткой раме из оптических балок. Для возможности проведения измерений на различных расстояниях от среза сопла оно смещалось вдоль своей оси относительно лазера и камер. Для каждого режима течения, определяемого числом Рейнольдса и расстоянием от среза сопла, выполнялось 5000 мгновенных измерений.

Осесимметричная воздушная струя с добавлением капель воды формируется при помощи сопла 6 с поджатием, обеспечивающим ударный профиль скорости на выходе (профилированная внутренняя поверхность сопла имеет степень поджатия 11, диаметр на выходе — 15 мм). Форма сопла выбиралась согласно рекомендациям работы [8]. Основной поток воздуха подается в сопло от пневмотрассы, расход воздуха контролируется при помощи расходомера-регулятора 3. Для проведения измерений скорости газа методом PIV в воздух в качестве трассеров при помощи включенного в воздушный контур генератора аэрозоля на основе сопла Ласкина (4 на рис. 1, б) добавляются мелкодисперсные частицы водоглицеринового раствора (диаметр капель около 1 мкм) с малой массовой концентрацией. Внутри сопла установлена пневматическая форсунка 5 с подводом воздуха по периферии потока воды, которая генерирует полидисперсный аэрозоль. Воздух к форсунке для распыла жидкости подается от пневмотрассы, расход контролируется при помощи расходомера-регулятора 2 и составляет 20 % от основного потока воздуха через сопло. Дистиллированная вода подается к форсунке при помощи шприцевого насоса 1. Погрешность измерения расхода воздуха не превышает 1 %, погрешность измерения расхода воды — 5 %. В ходе измерений массовая концентрация дисперсной фазы изменялась от 3,5 до 7,5 % (расход воды поддерживался постоянным), а число Рейнольдса газовой фазы варьировалось в диапазоне 6700 — 14500.

**1.2. Описание PIV/PTV/PI методик измерения.** Измерение скорости методом PIV осуществляется по перемещению взвешенных в потоке частиц за известный интервал времени [22, 23]. Для этого в поток добавляются с малой массовой концентрацией частицы-трассеры малого размера. Выделенное сечение потока освещается тонким световым ножом. Для измерения одного мгновенного распределения скорости это сечение освещается двумя последовательными световыми импульсами, регистрируемыми на два кадра цифровой камеры. Далее выполняется обработка полученных пар изображений при помощи адаптивного кросскорреляционного алгоритма, на выходе которого получают значения скорости в плоскости светового ножа, расположенные на регулярной сетке. За счет подбора параметров фильтрации (фильтрация по отношению сигнал/шум) удалось исключить влияние присутствующих на PIV изображении образов капель воды на рассчитываемые статистические характеристики. Погрешность измерений составляет 0,1 пикселя, т.е. 1 % максимальной скорости в измерительной области.

Метод PI основан на анализе параметров интерференционной картины, формируемой отраженным и однократно преломленным сферической каплей светом [24]. Для этого, аналогично PIV измерениям, сечение потока освещается световым ножом, рассеянный каплями свет регистрируется цифровой камерой с расфокусированным объективом. Диаметр капли пропорционален частоте полос на наблюдаемой интерференционной картине от капли. В настоящей работе применялась специальная оптика, позволяющая

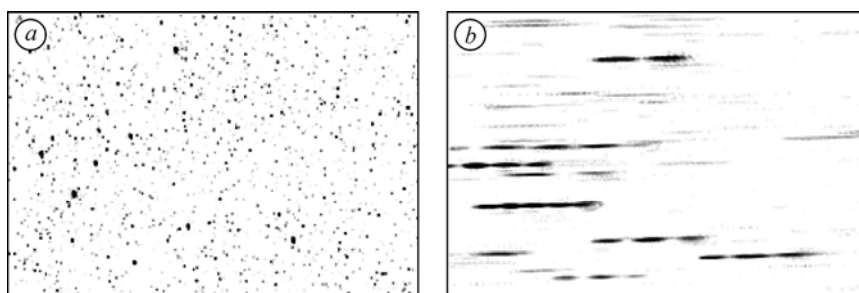


Рис. 2. Пример пары исходных изображений (яркость инвертирована), полученных при помощи метода PIV (a) и IPI (b).

получить образы капель в виде тонких полос (шириной 3 пикселя и длиной 200 пикселей, см. рис. 2, b), при этом сохраняется информация о частоте интерференционных полос и повышается отношение сигнал/шум. Вычисление расстояния перемещения образов капель в заданном интервале времени позволяет получить их скорость в направлении, перпендикулярном к направлению, вдоль которого вытянут образ капли. В продольном направлении неопределенность определения перемещения слишком высока из-за большого размера образа. Диапазон измеряемых диаметров капель составляет 10–200 мкм, погрешность измерения диаметра — 1,5 мкм, погрешность измерения скорости капель — 5 % от диапазона измеряемых скоростей.

Так как в измерительной области одновременно с каплями воды присутствуют мелкодисперсные капли-трассеры высокой счетной концентрации, то на IPI изображениях наблюдаются в виде слабого фоновых сигнала образы частиц-трассеров. Для стабильной работы алгоритма поиска образов капель и вычисления частоты интерференционных полос необходимо подавлять этот фон. Для этого из IPI изображения перед обработкой вычитался фоновый сигнал, а найденные алгоритмом образы капель фильтровались по критерию яркости. Таким образом, алгоритм работал более надежно и отсеивал зашумленные образы капель, но пропускал существенное число образов капель воды, что привело к увеличению погрешности измерений характеристик капель из-за меньшего объема статистики.

Пример пары изображений, полученных при помощи методов PIV и IPI в один момент времени, показан на рис. 2 (инвертированные фрагменты изображений). На рис. 2, a наблюдаются мелкие частицы-трассеры и капли воды в небольшой численной концентрации, на рис. 2, b видны интерференционные картины от капель воды. На рис. 3 приведены функции плотности вероятности (Probability Density Function — PDF)

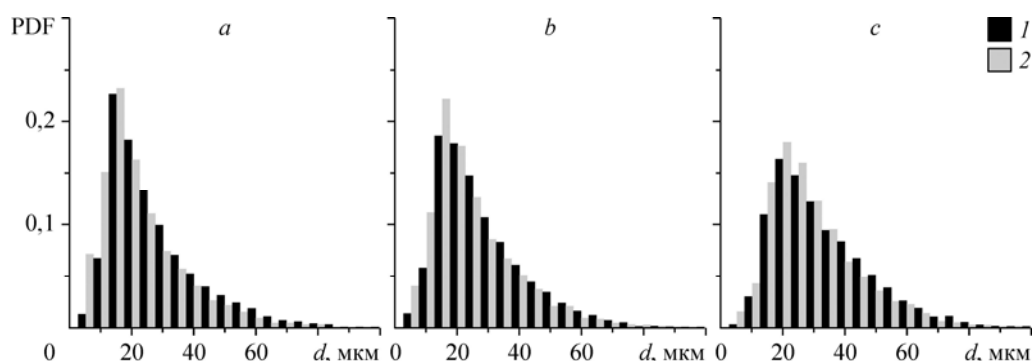


Рис. 3. Распределение капель по размерам по длине струи при  $x/(2R) = 1,5$  (a), 4 (b), 7 (c).  $Re = 11000$ ;  $r/R = 0$  (1), 1 (2).

распределения капель по размерам в трех сечениях от среза сопла ( $x/(2R) = 1,5, 4$  и  $7$ ), измеренные при помощи метода IPI. Высота столбика гистограммы соответствует отношению количества капель данного диапазона размеров к общему количеству зарегистрированных капель. Измерения проводились с осреднением по области потока размером  $1 \times 1 \times 1$  мм. Отметим, что для данного эксперимента нижней границей измеряемых методом IPI размеров частиц является размер 10 мкм. Из анализа рис. 3 видно, что распределение капель по размерам на оси струи и в слое смешения при  $r/R = 1$  близко к равномерному. Исключение составляет приосевая область струи на рис. 3, *a* и *b*, где в слое смешения присутствует заметно большее количество самых мелких частиц. По мере удаления от среза сопла (см. рис. 3, *c*) распределение для этого диапазона размеров капель становится более равномерным.

## 2. Математическая модель

В работе рассматривалась задача о распространении воздушной турбулентной струи с распыленными полидисперсными каплями воды (рис. 1). Объемная концентрация дисперсной фазы мала ( $\Phi_1 = M_{L1}\rho/\rho_L < 10^{-4}$ ), частицы достаточно мелкие ( $d_1 < 50$  мкм), поэтому можно пренебречь эффектами их столкновений друг с другом, дроблением и коагуляцией [25]. Здесь  $M_{L1}$  — начальная массовая концентрация капель,  $\rho$  — плотность газа и индексы  $1$  и  $L$  относятся к начальной величине и к жидкой фазе, соответственно. Модель основана на использовании кинетического уравнения функции плотности вероятности распределения координат, скорости и температуры частиц [18, 19].

**2.1. Система осредненных уравнений газовой фазы.** Для описания динамики осесимметричного полидисперсного двухфазного потока используется система Reynolds Averaged Navier–Stokes Equations (RANS) уравнений, записанных с учетом обратного влияния частиц на процессы переноса в газе (индексы  $f$  фракций частиц здесь и далее опущены):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_i} &= -\frac{\partial(P + \langle u_i u_i \rangle)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \langle u_i u_j \rangle \right) - \sum_{f=1}^3 \left\{ \frac{(U_i - U_{Li}) \Phi \rho_L}{\tau} \right\}, \\ \rho &= P / (R_g T), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $U_i, \langle u_i \rangle$  — компоненты осредненной скорости и ее пульсаций,  $x_i$  — проекции на оси координат,  $\Phi$  и  $d$  — объемная концентрация и размер капель рассматриваемой фракции,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости газа,  $2k = \langle u_i u_i \rangle$  — турбулентная кинетическая энергия газовой фазы,  $P$  — давление,  $R_g$  — удельная газовая постоянная,  $\tau = \rho_L d^2 / (18\mu W)$  — время динамической релаксации частицы с учетом отклонения от закона обтекания Стокса;  $W = 1 + \text{Re}_L^{2/3} / 6$ , где  $\text{Re}_L = d \sqrt{(U - U_L)^2 + (V - V_L)^2} / \nu$  — число Рейнольдса дисперсной фазы, построенное по межфазной скорости, индекс  $L$  соответствуют параметрам капли.

Все уравнения системы (1) записаны с учетом влияния дисперсной фазы на процессы переноса импульса в газовом потоке.

**2.2. Модель переноса рейнольдсовых напряжений.** Для моделирования турбулентности газа применялась известная модель переноса рейнольдсовых напряжений [26],

первоначально разработанная для однофазного потока. Уравнения для расчета компонент тензора рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации турбулентности имеют вид

$$\frac{\partial (U_j \langle u_i u_j \rangle)}{\partial x_j} = P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + T_{ij} + V_{ij} - S_{u_i u_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] - S_{\varepsilon}. \quad (3)$$

В правую часть уравнения (2) входят следующие слагаемые:  $P_{ij}$  — генерация  $\langle u_i u_j \rangle$  градиентами средних скоростей и интенсивность переноса энергии от осредненного движения к пульсационному,  $\phi_{ij}$  — перераспределяющий член, который описывает обмен энергией между отдельными составляющими  $u_i u_j$  вследствие наличия корреляции давление–скорость деформации,  $\varepsilon_{ij}$  — диссипация или скорость передачи энергии от крупномасштабных вихрей мелкомасштабным,  $T_{ij}$  — диффузионное слагаемое,  $V_{ij}$  — молекулярная диффузия,  $S_{u_i u_j}$ ,  $S_{\varepsilon}$  — обратное влияние дисперсной фазы на турбулентность газа и скорость ее диссипации, соответствующие слагаемые имеют вид, представленный в работе [15].

Генерация турбулентности определяется по зависимости

$$P_{ij} = - \left( \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right).$$

Перераспределяющий член  $\phi_{ij}$  состоит из «медленного»  $\phi_{ij(1)}$  и «быстрого»  $\phi_{ij(2)}$  составляющих и определяется по модели [26], разработанной первоначально для однофазного потока, но модифицированной [15] для двухфазного течения:

$$\phi_{ij} = \phi_{ij(1)} + \phi_{ij(2)} + \phi_{ij}^{pp}. \quad (4)$$

Для первых двух слагаемых уравнения (4) в работе [26] предлагаются следующие зависимости:

$$\phi_{ij(1)} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right), \quad (5)$$

$$\phi_{ij(2)} = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{1}{3} P \delta_{ij} \right) - C_3 \left( D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) - C_4 k \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

где  $P = P_{kk} / 2$  и  $D_{ij} = u_j u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + u_i u_k \frac{\partial U_k}{\partial x_j}$ . Последнее слагаемое  $\phi_{ij}^{pp}$  описывает влияние дисперсной фазы на «медленное» перераспределяющее слагаемое и имеет вид [15]

$$\phi_{ij}^{pp} = -\frac{1}{2} S_{u_k u_k} \left\{ C_{f1} b_{ij}^{pp} + C_{f2} \left[ \left( b_{ij}^{pp} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( b_{kk}^{pp} \right)^2 \delta_{ij} \right] \right\}, \quad (7)$$

здесь  $C_{f1} = C_{f2} = 1$ ,  $b_{ij}^{pp} = \frac{S_{u_i u_j}}{S_{u_k u_k}} - \frac{1}{3} \delta_{ij}$  — тензор анизотропных напряжений, учитывающий обратное влияние частиц на газ. Влияние дисперсной фазы на турбулентность несущей фазы имеет вид [15]

$$S_{u_i u_j} = u_{I,i} S_{u_j} + u_{I,j} S_{u_i},$$

где  $u_{L,i}S_{u_j} = -\frac{1}{V_\Omega} \left\langle \sum_{\Omega} m_L u_{L,i} \left( \frac{dU_{L,i}}{dt} - \frac{1}{\rho_L} \frac{\partial P}{\partial x_j} - g_i \right) \right\rangle$ ,  $V_\Omega$  — текущий контрольный объем

и  $u_i^I = |U_i - U_{L,i}|$  — интенсивность пульсаций несущей среды на межфазной границе.

Для расчета диссипативного слагаемого  $\varepsilon_{ij}$  в работе [26] используется изотропное представление:

$$\varepsilon_{ij} \equiv -\frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon. \quad (8)$$

Слагаемое  $T_{ij}$  определяет турбулентные диффузионные процессы и записывается в виде [27]

$$T_{ij} = C_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \langle u_k u_l \rangle \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right], \quad C_S = 0,22. \quad (9)$$

Выражение для молекулярной диффузии имеет следующий вид:

$$V_{ij} = \nu \frac{\partial^2 \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (10)$$

Обратное влияние дисперсной фазы на скорость диссипации энергии турбулентности имеет вид [15]

$$S_\varepsilon = \frac{C_{\varepsilon 3} \varepsilon}{2k} S_{u,u_j}, \quad C_{\varepsilon 3} = 1,8.$$

В уравнении (3)  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left( \partial \sqrt{k} / \partial x_l \right)^2$  — полная скорость диссипации турбулентной кинетической энергии. Константы  $C_1 - C_4$ ,  $C_\varepsilon$  и  $C_{\varepsilon 2}$  в уравнениях (5), (6) определяются по работе [26]. Константа  $C_{\varepsilon 1}$  в уравнении (3) определяется по соотношению  $C_{\varepsilon 1} = 1,44 + \beta_1 + \beta_2$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — параметры, учитывающие растяжение струи и ограничивающие чрезмерный рост масштаба длины в слое смешения [26] соответственно.

**2.3. Система осредненных уравнений фракции полидисперсного потока.** В осесимметричном случае система уравнений имеет вид (здесь и далее индексы фракции  $f$  опущены для упрощения формы записи)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_L U_{Lj})}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho_L \Phi U_{Lj} U_{Li})}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho_L \Phi \langle u_{Li} u_{Lj} \rangle)}{\partial x_j} &= \\ &= \Phi (U_i - U_{Li}) \frac{\rho_L}{\tau} + \Phi \rho_L g - \frac{1}{\tau} \frac{\partial (\rho_L D_{Lij} \Phi)}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $D_{Lij} = \langle u_i u_j \rangle T_{LP}$  — тензор турбулентной диффузии частиц,  $T_{LP}$  — время взаимодействия капли с турбулентным вихрем газовой фазы. Для определения  $T_{LP}$  используется модель [28], учитывающая эффекты инерционности и пересечения траекторий.



**2.4. Уравнения вторых моментов пульсаций скорости.** Уравнения для моментов пульсации скорости  $\langle u_{Li}u_{Lj} \rangle$  имеют вид

$$\begin{aligned} & \underbrace{U_{Lk} \frac{\partial \langle u_{Li}u_{Lj} \rangle}{\partial x_k}}_I + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Phi \langle u_{Li}u_{Lj}u_{Lk} \rangle \right) \right\}}_{II} + \underbrace{\langle u_{Li}u_{Lk} \rangle \frac{\partial U_{Lj}}{\partial x_k} + \langle u_{Lj}u_{Lk} \rangle \frac{\partial U_{Li}}{\partial x_k}}_{III} = \\ & = \underbrace{\frac{2}{\tau} \left( f_u \langle u_i u_j \rangle - \langle u_{Li}u_{Lj} \rangle \right)}_{IV}. \end{aligned} \quad (12)$$

В системе уравнений (12) учитывается конвективный перенос пульсаций скорости (I), диффузия (II), генерация пульсаций из градиента осредненного движения дисперсной фазы (III) и межфазное взаимодействие (IV). Для определения диффузионного члена в (12) привлекается следующее алгебраическое уравнение для третьих моментов [29]

$$\langle u_{Li}u_{Lj}u_{Lk} \rangle = -\frac{1}{3} \left( D_{Lkn} \frac{\partial \langle u_{Li}u_{Lj} \rangle}{\partial x_n} + D_{Ljn} \frac{\partial \langle u_{Li}u_{Lk} \rangle}{\partial x_n} + D_{Lin} \frac{\partial \langle u_{Lj}u_{Lk} \rangle}{\partial x_n} \right).$$

### 3. Граничные условия и метод численной реализации

Распределения осредненных и турбулентных параметров несущей и дисперсной фаз во входном сечении были взяты из предварительно измеренных на расстоянии  $x/(2R) = 1,5$  от среза сопла экспериментальных профилей. Ближе к этому сечению, по данным работ [11, 25], происходит образование устойчивого газокapelного потока и влиянием дробления капelь можно пренебречь.

На оси струи задавались условия симметрии (отсутствие радиальных потоков импульса, теплоты и турбулентных характеристик в газовой и дисперсной фазах)

$$V = V_L = \frac{\partial Z}{\partial r} = 0, \quad Z = U, \langle u^2 \rangle, \langle v^2 \rangle, \langle uv \rangle, \langle u_L^2 \rangle, \langle v_L^2 \rangle, \langle u_L v_L \rangle.$$

На внешней границе струи для компонент осредненной и флуктуационной скоростей газовой фазы выполняются условия

$$U = V = \langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = \langle uv \rangle = 0.$$

Граничные условия для осредненных аксиальной, радиальной компонент скорости и их пульсационных составляющих и температуры дисперсной фазы на внешней границе струи имеют вид [21]

$$\frac{\partial U_L}{\partial r} = -\frac{2}{\tau \langle v_L^2 \rangle} q_L v_T \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_w, \quad V_L = \left( -\frac{2}{\pi} \langle v_L^2 \rangle \right)^{1/2}, \quad \frac{\partial \langle u_L^2 \rangle}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \langle v_L^2 \rangle}{\partial r} = -V_L / \tau,$$

где  $q_L$  — коэффициент вовлечения частиц в пульсационное движение газовой фазы [21].

Граничные условия для дисперсной фазы на внешней границе струи получены в предположении, что частицы, пересекающие границу струи, не возвращаются в поток (так называемое условие «поглощающей стенки» [21]). Граничные условия в крайнем расчетном сечении вниз по потоку состояли в задании нулевых производных параметров в продольном направлении.

Численное решение было получено с использованием метода контрольных объемов на разнесенных сетках. Для конвективных слагаемых дифференциальных уравнений применялся алгоритм QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics).

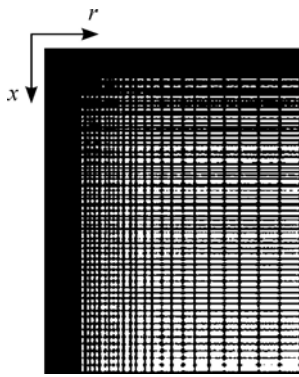


Рис. 4. Расчетная сетка.

Для диффузионных потоков были использованы центральные разности. Коррекция поля давления осуществлялась по конечно-объемному согласованному алгоритму SIMPLEC (Semi-Implicit Pressure-Linked Equation Corrected). Применялась неравномерная расчетная сетка со сгущением расчетных узлов в районах среза сопла и оси струи (см. рис. 4). В радиальном направлении использовалось преобразование координат с тем, чтобы вычислительная область оставалась прямоугольной. Длина расчетной области составляла  $50R$ . Расчеты проводились на сетке  $256 \times 100$  контрольных объемов.

Дальнейшее увеличение их числа не оказывает существенного влияния на результаты численных расчетов.

На первом этапе проводилось сопоставление с известными экспериментальными данными [30]. Было получено хорошее согласование с данными измерений для аксиальных и радиальных осредненных и пульсационных скоростей воздуха и рейнольдсовых напряжений по длине и по сечению струи. Это послужило базисом при проведении численных расчетов существенно более сложного случая двухфазной затопленной струи.

#### 4. Исследование газок капельной затопленной струи

Все измерения и расчеты были проведены для полидисперсной газок капельной струи, вытекающей из сопла диаметром  $2R = 15$  мм, при опускном режиме течения. Число Рейнольдса для газовой фазы варьировалось в диапазоне  $Re = 2RU_{m1} / \nu = (0,68 - 1,45) \times 10^4$ , среднемассовая скорость потока газа на его срезе  $U_{m1} = 6,4 - 13,8$  м/с, начальная суммарная массовая концентрация водяных капель изменялась в диапазоне  $M_{L1} = 0 - 0,08$  и их объемная доля  $\Phi < 10^{-4}$ , диаметр частиц составлял  $d = 0 - 50$  мкм. Методы измерения PTV/PI позволяли идентифицировать капли в четырех интервалах размеров:  $d = 10 - 15$ ,  $15 - 20$ ,  $25 - 35$  и  $35 - 50$  мкм. Соответственно расчеты были также выполнены для четырех групп частиц со средними размерами:  $d = 10, 20, 30$  и  $40$  мкм. Температура газок капельного потока на срезе сопла  $T_1 = T_{L1} = 293$  К, а температура окружающего воздуха в затопленном пространстве  $T_e = 293$  К. Расчет начинался с расстояния  $x/(2R) = 1,5$ , где измерения проводились наиболее близко к срезу сопла.

С целью упрощения математической модели непрерывная функция распределения капель по размерам заменяется гистограммой и вводится понятие классов капель, аналогично [1]. Признаком принадлежности частицы к классу является ее диаметр. Классы капель обозначаются индексом  $f$  ( $f = 1, 2, 3$  и  $4$ ). Массовая доля капель каждой фракции составляет:  $M_{L1}^{f=1} = 0,3$ ,  $M_{L1}^{f=2} = 0,5M_{L1}$ ,  $M_{L1}^{f=3} = 0,1M_{L1}$ ,  $M_{L1}^{f=4} = 0,1M_{L1}$  (см. рис. 5).

В работе проведены измерения и численные расчеты осредненных и пульсационных скоростей фаз, рейнольдсовых напряжений в газовой фазе, размера и концентрации капель.

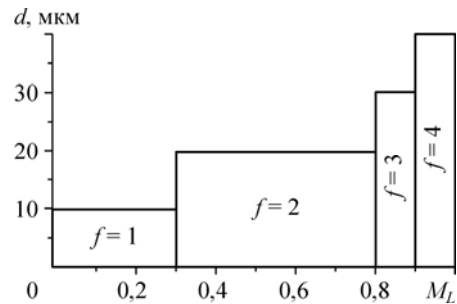


Рис. 5. Гистограмма распределения капель по размерам и фракциям при проведении численных расчетов.

Рис. 6. Изменение осредненных аксиальных скоростей фаз вдоль оси газокapельной струи при  $Re = 11000$ .

Символы соответствуют измерениям: 1 — газ,  $d = 10$ –15 (2), 15–25 (3), 25–35 (4), 35–50 (5) мкм; линии соответствуют расчетам: сплошные — газовой фазе, штриховые — капельной фазе с диаметром капель  $d = 10$  (2), 20 (3), 30 (4), 40 (5) мкм.  $M_{LI} = 0,05$ ;  $2R = 15$  мм.

#### 4.1. Осредненные характеристики двухфазной струи.

Изменения осредненных аксиальных скоростей газа и частиц вдоль оси двухфазной струи при  $Re = 11000$  приведены на рис. 6. В начальном сечении при  $x/(2R) = 1,5$  осредненная аксиальная скорость капель меньше соответствующего значения несущей фазы. Это связано с особенностью формирования струйного потока: при движении в сужающейся части сопла (см. рис. 2, *b*) газ разгоняется быстрее капель. Далее по мере продвижения от среза сопла происходит ускорение капель за счет сил инерции (струя нисходящая), и уже при  $x/(2R) = 4$  частицы опережают газ на всей длине измерительного и расчетного объемов. Этот эффект ранее уже отмечался в экспериментальных работах для газокapельных [8, 9, 16] и газодисперсных струй [20, 21]. Аксиальная скорость газа затухает быстрее, чем скорость капель, и этот эффект усиливается с ростом размера капель, как и следовало ожидать. Частицы наименьшего размера ( $d = 10$  мкм) с малой инерционностью имеют скорость, наиболее близкую к скорости воздуха.

На рис. 7 показано изменение осредненной скорости фаз по сечению струи в нескольких сечениях от среза сопла ( $x/(2R) = 1,5$  (а), 4 (b), 7 (c)). Заметим, что профили скорости

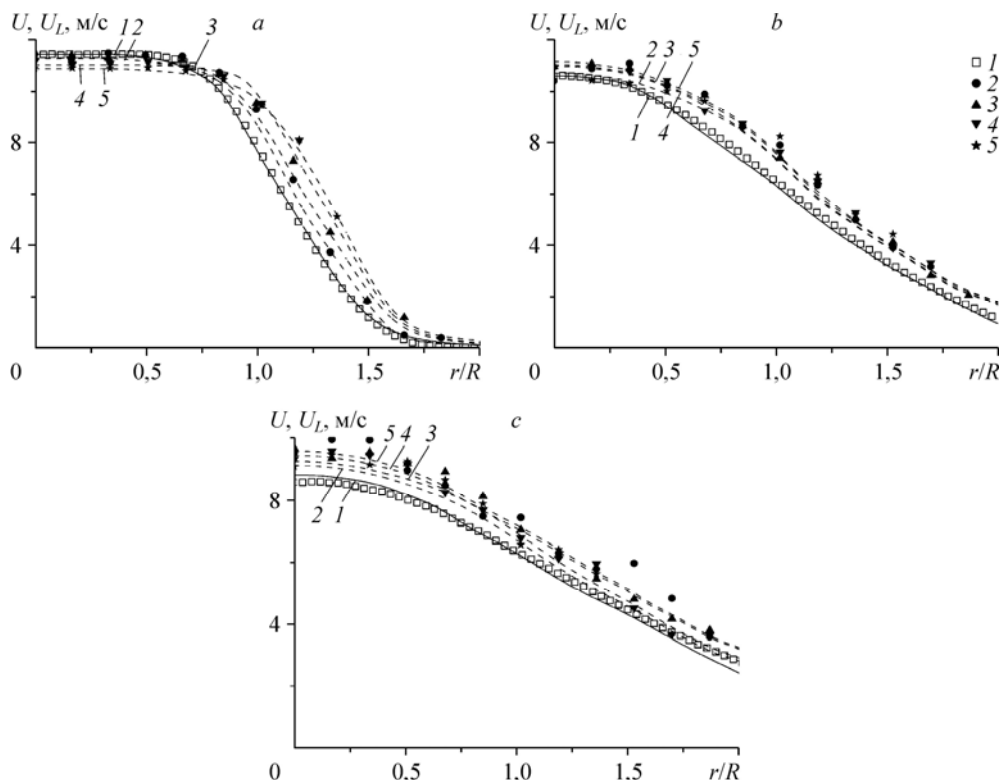


Рис. 7. Профили осредненных аксиальных скоростей фаз по сечению газокapельной струи при  $Re = 11000$  на расстояниях от среза сопла  $x/(2R) = 1,5$  (а), 4 (b), 7 (c).

Обозначения и условия проведения численных расчетов соответствуют данным рис. 6.

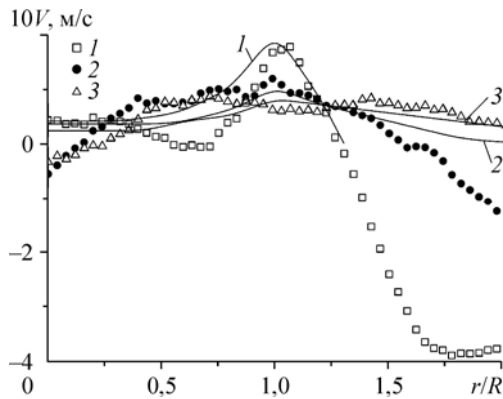


Рис. 8. Распределения по радиусу струи осредненной радиальной скорости газа.  $Re = 1100$ ,  $M_{LI} = 0,05$ ,  $x/(2R) = 1,5$  (1), 4 (2), 7 (3).

газовой фазы и частиц в области среза сопла ( $x/(2R) = 1,5$ ) близки к равномерному, что означает наличие потенциального ядра (см. рис. 7, а) [2]. В начальном сечении при  $x/(2R) = 1,5$  для измерений характерным является наличие относительной скорости между газом и частицами разных размеров. При этом в приосевой зоне в экспериментах наблюдается меньшее значение скорости капель по сравнению со скоростью газа, тогда как во внешней зоне струи характерным является превышение скорости частиц; оба этих эффекта усиливаются с увеличением размера капель. По мере продвижения вниз по потоку при  $x/(2R) = 4$  равномерный профиль трансформируется в струйный, и это происходит ближе, чем для струи, вытекающей из трубы [2]. Вниз по потоку в измерениях наблюдается ускорение капель относительно газа, и здесь их скорость становится выше соответствующего значения для газовой фазы по всему радиусу струи (см. рис. 7, b и 7, c). Аналогично течению в области вблизи выхода из сопла, в измерениях на расстояниях  $x/(2R) = 4$  (рис. 7, b) во внешней области струи наибольшая аксиальная скорость капель получена для самых крупных капель ( $d = 35-50$  мкм), а на оси — для самых мелких ( $d = 10-15$  мкм). В сечении  $x/(2R) = 7$  (рис. 7, c) максимальная величина скорости частиц наблюдается для самых мелких капель ( $d = 10-15$  мкм), а самые крупные капли ( $d = 35-50$  мкм) имеют скорость, наиболее близкую по величине к газовой фазе. В расчетах получена несколько иная картина: в сечениях  $x/(2R) = 4$  (рис. 7, b) наибольшая скорость у частиц размером  $d = 20$  мкм, минимальная — у капель размером  $d = 10$  мкм. Для сечения  $x/(2R) = 7$  (рис. 7, c) максимальная скорость за счет действия сил инерции характерна для самых инерционных частиц, а наименьшая также у капель размером  $d = 10$  мкм.

Эволюция по длине струи профилей радиальной компоненты скорости газа в двухфазной струе приведена на рис. 8. Величина радиальной скорости газа как в измерениях, так и в расчетах имеет положительную величину, что связано с расширением струи при смешении с окружающим затопленным пространством. Исключение составляют экспериментальные данные при  $x/(2R) = 1,5$  и 4, где в сдвиговом слое получена отрицательная величина скорости газа. Удовлетворительное согласие расчетных данных с экспериментом наблюдается только для больших удалений от среза сопла при  $x/(2R) = 7$ , где уже начинается переход к автомодельному участку.

**4.2. Турбулентные параметры газовой и дисперсной фаз.** Профили аксиальных пульсаций скорости газа и капель по сечению двухфазной струи показаны на рис. 9. По данным, представленным на этих рисунках, можно сделать следующие выводы. В приосевой зоне интенсивность продольных пульсаций газа заметно ниже соответствующего значения для капель. Это связано с особенностью используемого устройства для формирования струйного течения (сопло с поджатием). Максимальные величины пульсаций скорости газа и частиц характерны для сдвигового слоя смешения струи и положение максимума по мере продвижения от среза сопла смещается от оси струи. Это отмечается для всех расстояний от среза сопла (рис. 9, а-с). Показана сильная зависимость аксиальных пульсаций скоростей дисперсной фазы от ее размера. Наибольшая интенсивность аксиальных флуктуаций скорости капель наблюдается у крупных частиц,

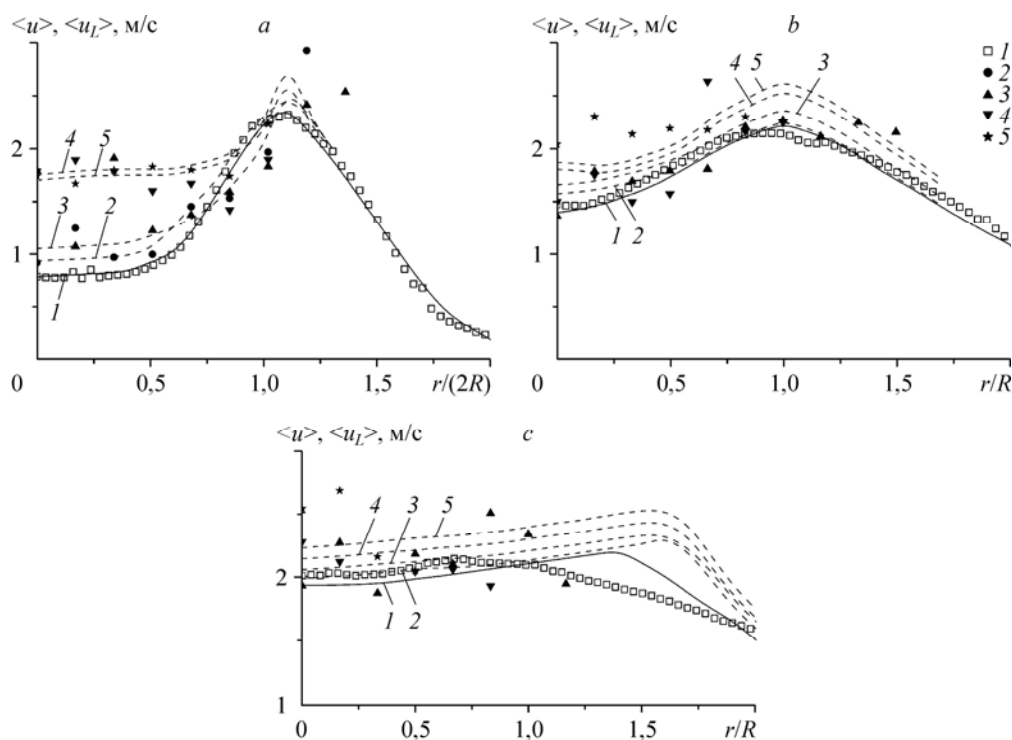


Рис. 9. Профили аксиальных флуктуаций скоростей фаз по сечению газокapельной струи при  $Re = 11000$  на расстояниях от среза сопла  $x/(2R) = 1,5$  (a), 4 (b), 7 (c).

Обозначения и условия проведения численных расчетов соответствуют данным рис. 6.

и их величина превышает соответствующее значение для газов. Получено качественное согласование экспериментальных и расчетных данных. Аналогичные результаты по превышению аксиальных флуктуаций скорости капель соответствующих несущей фазы были получены экспериментально для течения воздуха с твердыми частицами в работе [31].

В ближней к срезу сопла области интенсивность флуктуаций скорости капель заметно выше соответствующего значения для газа (см. рис. 9, a). Вероятнее всего, это объясняется условиями течения внутри сужающейся части сопла, где присутствует градиент скорости, а также подавляются пульсации газовой фазы. Далее по мере продвижения вдоль оси струи для расчетных данных характерно, что амплитуда аксиальных турбулентных флуктуаций скорости капель выше, чем у газовой фазы. Это явление связано не только с собственной неизотропностью турбулентности пульсаций газовой фазы, но и обусловлено дополнительной генерацией турбулентности при движении дисперсной фазы в поле градиента осредненной аксиальной скорости дисперсной фазы. Капли хорошо вовлекаются в пульсационное движение газа и отбирают часть энергии турбулентных вихрей несущей среды. Увеличение размера, наоборот, вызывает рост интенсивности пульсаций дисперсной фазы по мере развития струи. Максимальные измеренные и рассчитанные значения интенсивности турбулентных пульсаций для газа и капель располагаются в зоне сдвигового слоя смешения.

На рис. 10 приведены распределения поперечных пульсаций скорости дисперсной и газовой фаз по сечению струи. С ростом размера капель интенсивность радиальных флуктуаций меньше скорости пульсаций газа. Это объясняется сравнительно слабым вовлечения частиц в пульсационное движение газа при росте размера дисперсной фазы.

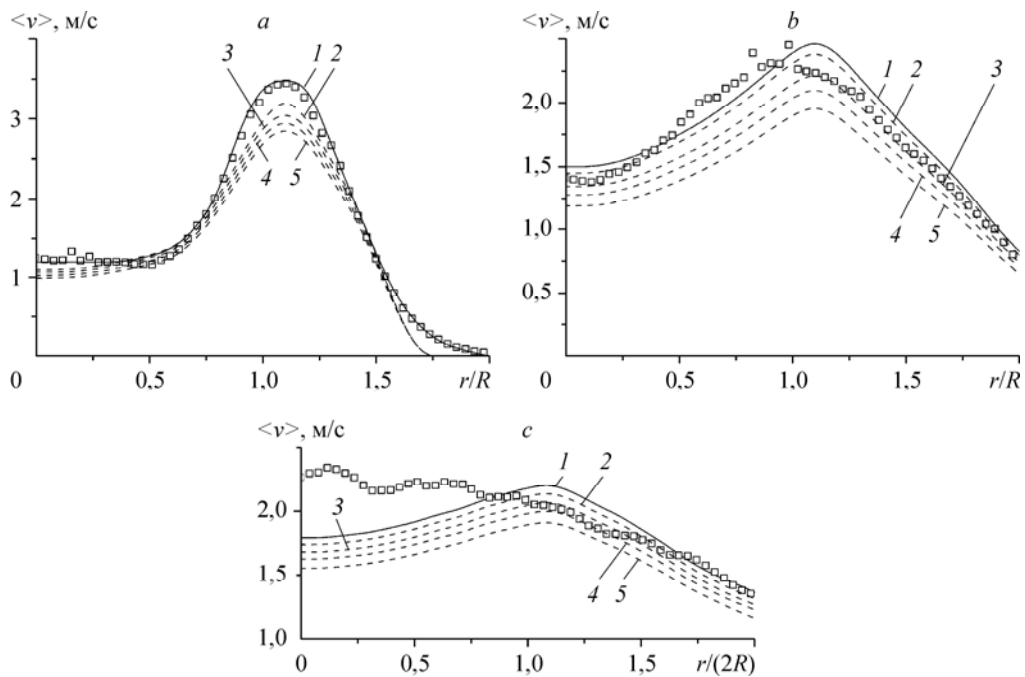


Рис. 10. Поперечные распределения радиальных пульсаций скоростей газа и капель по сечению газок капельной струи при  $Re = 11000$  на различных расстояниях от среза сопла:  $x/(2R) = 1,5$  (a), 4 (b) и 7 (c).

Символы — измерения для газовой фазы; линии соответствуют расчетам: сплошные — газовой фазе, штриховые — капельной фазе с диаметром каплей  $d = 10$  (2), 20 (3), 30 (4), 40 (5) мкм.  $M_{L1} = 0,05$ ;  $2R = 15$  мм.

Частицы хуже вовлекаются в крупномасштабное пульсационное движение газа и отбирают меньше энергии турбулентных вихрей несущей фазы. Наблюдается существенное воздействие частиц на структуру турбулентного струйного течения.

Показана значительная неизотропность аксиальных и радиальных пульсаций скорости несущей фазы и частиц. Это наблюдается как по длине, так и по сечению двухфазной струи, что согласуется с данными измерений и расчетов [16, 20, 21].

Профили турбулентных касательных напряжений в газовой фазе представлены на рис. 11. По мере продвижения по длине струи от среза сопла величина реynольдсовых напряжений снижается за счет смешения с окружающим затопленным пространством.

### Заключение

Проведено экспериментальное и численное исследование структуры свободной газок капельной струи. Измерения выполнены с использованием современных измерительных методов цифровой трассерной визуализации PIV/PTV/PI. Численное моделирование проведено с помощью

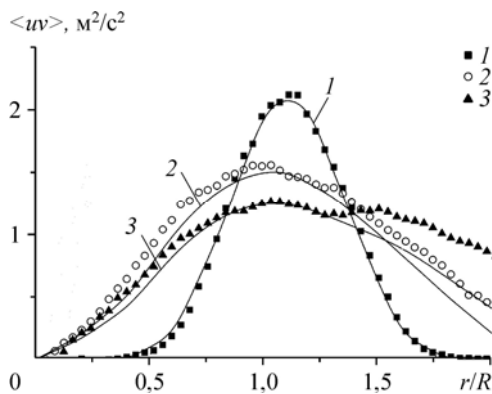


Рис. 11. Радиальные профили реynольдсовых напряжений в газовой фазе по длине полидисперсной струи при  $Re = 11000$ .

Символы — эксперимент, линии — расчет;  $x/(2R) = 1,5$  (1), 4 (2), 7 (3).

RANS уравнений в эйлеровом приближении. Турбулентность газовой фазы описывалась с применением модели переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений.

Экспериментально и численно показана существенная неизотропность аксиальных и радиальных пульсаций скорости газа и частиц как по длине, так и по сечению газодисперсионной струи. Наблюдается сильная зависимость аксиальных пульсаций скоростей дисперсионной фазы от ее размера вблизи среза сопла. Показана необходимость учета механизма дополнительной генерации турбулентности в дисперсионной фазе для корректного моделирования процессов переноса в свободных сдвиговых двухфазных течениях.

Отметим удовлетворительное согласие между экспериментальными и расчетными данными для несущей и дисперсионной фаз как для осредненных, так и для флуктуационных параметров.

### Список литературы

1. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 172 с.
2. Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 716 с.
3. Sirignano W.A. Fluid dynamics of sprays – 1992 freeman scholar lecture // ASME. J. Fluids Eng. 1993. Vol. 115. P. 345–378.
4. Зуев Ю.В., Лепешинский И.А., Советов В.А. Экспериментальное и численное исследование газодисперсионной полидисперсионной турбулентной струи // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 63–68.
5. Sommerfeld M. Analysis of isothermal and evaporating turbulent spray by phase-Doppler anemometry and numerical calculation // Int. J. Heat Fluid Flow. 1998. Vol. 19. P. 173–186.
6. McDonnell V.G., Samuelsen G.S. An experimental data base for computational fluid dynamics non-reacting methanol sprays // ASME. J. Fluids Eng. 1995. Vol. 117. P. 145–153.
7. Ferrand V., Bazile R., Boree J. Measurements of concentration per size class in a dense polydispersed jet using planar laser-induced fluorescence and phase Doppler techniques // Exp. Fluids. 2001. Vol. 31. P. 597–607.
8. Ferrand V., Bazile R., Boree J., Sharnay G. Gas-droplets turbulent velocity correlations and two-phase interaction in an axisymmetric jet laden with partly responsive droplets // Int. J. Multiphase Flow. 2003. Vol. 29. P. 195–217.
9. Chen Y.-C., Starner S.H., Masri A.R. A detailed experimental investigation of well-defined, turbulent evaporating spray jets of acetone // Int. J. Multiphase Flow. 2006. Vol. 32. P. 389–412.
10. Terfous A., Helmaoui M., Hazzab A., Ghenaïm A. Measurement of liquid particle concentrations in a free jet flow // Chemical Eng. Processing. 2009. Vol. 48. P. 348–355.
11. Babinsky E., Sojka P.E. Modeling drop size distribution // Progr. Energy Combust. Sci. 2002. Vol. 28. P. 303–329.
12. Зуев Ю.В., Лепешинский И.А. Двухфазная многокомпонентная турбулентная струя с фазовыми переходами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 5. С. 130–138.
13. Chen X.Q., Pereira J.F.C. Computation of turbulent evaporating spray with well-specified measurements: a sensitivity study on droplet properties // Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. Vol. 39. P. 441–454.
14. Галицейский Б.М., Шустрова В.Ю. Двухфазные турбулентные струйные течения с фазовыми превращениями // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 7. С. 79–93.
15. Beishuizen N.A., Naud B., Roekaerts D. Evaluation of a modified Reynolds stress model for turbulent dispersed two-phase flows including two-way coupling // Flow, Turbulence Combust. 2007. Vol. 79. P. 321–341.
16. Пахомов М.А., Терехов В.И. Моделирование турбулентной двухфазной струи с испаряющимися каплями // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 3. С. 102–113.
17. Amani E., Nobari M.R.H. Systematic tuning of dispersion models for simulation of evaporating sprays // Int. J. Multiphase Flow. 2013. Vol. 48. P. 11–31.
18. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Осаждение частиц из турбулентного потока // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 5. С. 96–104.
19. Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // Phys. Fluids A. 1991. Vol. 3. P. 446–456.
20. Prevost F., Boree J., Nuglish H.J., Sharnay G. Measurements of fluid/particle correlated motion in the far field of an axisymmetric jet // Int. J. Multiphase Flow. 1996. Vol. 22. P. 686–701.
21. Деревич И.В. Гидродинамика и тепломассоперенос частиц при турбулентном течении газозвеси в трубе и осесимметричной струе // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40, № 1. С. 86–99.
22. Raffel M., Willert C., Kompenhans J. Particle Image Velocimetry. Berlin : Springer, 1998. 253 p.
23. Токарев М.П., Маркович Д.М., Бильский А.В. Адаптивные алгоритмы обработки изображений частиц для расчета мгновенных полей скорости // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 3. С. 109–131.

24. **Бильский А.В., Ложкин Ю.А., Маркович Д.М.** Интерферометрический метод измерения диаметров капель // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18, № 1. С. 1–13.
25. **Lin S.P., Reitz R.D.** Drop and spray formation from a liquid jet // Ann. Rev. Fluid Mech. 1998. Vol. 30. P. 85–105.
26. **Shima N.** Low-Reynolds-number second-moment closure without wall-reflection redistribution terms // Int. J. Heat Fluid Flow. 1998. Vol. 19. P. 549–555.
27. **Daly B.J., Harlow F.H.** Transport equations in turbulence // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. P. 2634–2649.
28. **Oesterle B., Zaichik L.I.** Time scales for predicting dispersion of arbitrary-density particles in isotropic turbulence // Int. J. Multiphase Flow. 2006. Vol. 32. P. 838–849.
29. **Zaichik L.I.**, A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. P. 1521–1534.
30. **Panchapakesan N.R., Lumley J.L.** Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Pt. 1. Air jet // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 246. P. 197–223.
31. **Вараксин А.Ю.** Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455.

*Статья поступила в редакцию 20 октября 2013 г.*