

межуточная переменная ξ и малый параметр $\eta(\varepsilon)$ следующим образом [1]:

$$1 + x = \eta\xi, \quad X = \eta\xi/\mu, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \eta/\varepsilon \rightarrow \infty.$$

При фиксированном ξ главные по малому параметру η члены внешнего разложения (3.4)–(3.6) имеют вид

$$z = \varepsilon\zeta_0 + \varepsilon\varepsilon_1\xi_1 + \dots = \frac{1}{2} \varepsilon\eta\xi - \frac{\varepsilon}{4 \ln(1/\varepsilon)} \eta\xi \ln \eta\xi,$$

а главные члены внутреннего разложения (3.13)

$$z = \eta\xi\mu \left(\ln \xi\eta + \ln \frac{1}{\mu} \right)^{-1/2} = \mu \left(\ln \frac{1}{\mu} \right)^{-1/2} \eta\xi - \frac{1}{2} \mu \left(\ln \frac{1}{\mu} \right)^{-3/2} \eta\xi \ln \eta\xi.$$

Из условия сращивания внешнего и внутреннего разложений должно выполняться равенство коэффициентов при членах $\eta\xi$ и $\eta\xi \ln \eta\xi$. Таким образом, асимптотические разложения сращиваются, если

$$(3.14) \quad \varepsilon = 2\mu(\ln(1/\mu))^{-1/2} + \dots$$

Асимптотический закон расширения струи. Нетрудно видеть, что уравнение (3.11) допускает однопараметрическую группу инвариантных преобразований $x = cX$, $z = c^2Z$. Отсюда и из формул (3.12) и (3.13) получим однопараметрическую серию геометрически подобных асимптотик свободной поверхности при

$$(3.15) \quad Z'^2 \ln(Z/c^2) = c^2 - (9/16)c^2(\ln(x/c))^{-2} + \dots;$$

$$(3.16) \quad z = y^2/4 = cx(\ln(x/c))^{-1/2} + \dots$$

Длина каверны $1/\mu$ увеличится в c раз: $l_x = c/\mu$, отсюда при помощи формул (3.8) и (3.14) можно определить предельное выражение для силы F при $\mu \rightarrow 0$:

$$(3.17) \quad F = \pi\rho v_\infty^2 c^2 \mu^{-2} \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln(1/\varepsilon) \rightarrow 2\pi\rho v_\infty^2 c^2.$$

Полученный из теории тонкого тела асимптотический закон (3.15) помимо главной асимптотики Гуревича — Левинсона (3.17) [5, 8] позволяет определять следующие члены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Дж. Д. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.
2. Нестерук И. Г. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
3. Логвинович Г. В., Серебряков В. В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн. — В кн.: Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 32.
4. Garabedian P. R. Calculation of axially symmetric cavities and jets. — Pacific J. Math., 1956, v. 6, N 4.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
6. Эшли Х., Лендал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1969.
7. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. — М.: Мир, 1964.
8. Петров А. Г. Прямой вариационный метод расчета плоских и осесимметричных кавитационных течений. — ДАН СССР, 1981, т. 257, № 6.

Поступила 17/VI 1985 г.

УДК 532.539

УЕДИНЕННЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Гаврилов

(Новосибирск)

Теоретический анализ плоских уединенных волн на границе раздела двух жидкостей разной плотности чаще всего основан на уравнении Кортевега—де Вриза [1—3], при выводе которого кроме стандартного допущения теории длинных волн о ма-

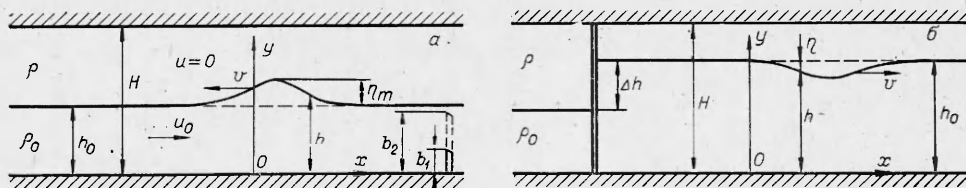
лости отношения глубины жидкости к длине волны используется дополнительное предположение об относительной малости амплитуды по сравнению с глубиной жидкости. Следовательно, уравнение Кортевега—де Вриза описывает только уединенные волны малой амплитуды. Некоторая экспериментальная информация о диапазоне применимости таких моделей содержится в [4]. Теоретический анализ уединенных внутренних волн, не содержащий ограничений на их амплитуду, выполнен в [5], где рассматриваются не только покоящиеся в невозмущенном состоянии, но и движущиеся относительно друг друга слои. Работа [5] получила хорошее экспериментальное подтверждение по скорости распространения волн [4]. Ниже приведены экспериментальные данные о форме уединенных внутренних волн, которые также очень хорошо согласуются с моделью [5].

Волны генерировались на границе раздела двух слоев несмешивающихся жидкостей разной плотности, ограниченных снизу горизонтальным дном, сверху — непроницаемой горизонтальной крышкой. Основные обозначения и схемы экспериментальных установок приведены на рис. 1, а, б. Здесь H — расстояние между дном и крышкой, h_0 — глубина невозмущенного нижнего слоя, h — глубина возмущенного нижнего слоя, $\eta = h - h_0$ — отклонение границы раздела от положения равновесия, η_m — амплитуда, v — скорость распространения уединенных волн, ρ и $\rho_0 < \rho$, u_0 и u — плотности и скорости нижнего и верхнего слоев соответственно. Используется неподвижная прямоугольная система координат x, y .

Для реализации в опытах уединенных волн в случае движущихся в невозмущенном состоянии жидкостей применялся, как и в [4], прямоугольный канал, длина рабочей части которого 250, ширина 18 и высота 6 см (рис. 1, а). Нижняя жидкость могла двигаться со скоростью u_0 , равномерно распределенной по вертикали в начальном сечении, а в верхней жидкости было лишь слабое циркуляционное движение, связанное с трением на границе раздела. В качестве рабочих жидкостей брали слабый раствор поваренной соли в дистиллированной воде ($\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$) и керосин ($\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$). Генерация волн осуществлялась барьером в виде вертикальной пластины, расположенным на выходе из канала и выступающим над дном на высоту b_1 . После установления стационарного режима течения с глубиной нижней жидкости h_0 барьер плавно перемещался до высоты b_2 вверх (при генерации волн в виде бугра) или вниз (при генерации волн в виде ямы), а затем возвращался в исходное положение.

Уединенные волны в случае первоначально покоящихся слоев изучались на другой экспериментальной установке (рис. 1, б). Она представляла собой трубу квадратного сечения 6×6 см длиной 330 см, разделенную непроницаемой перегородкой на две части. Слева и справа от перегородки глубина нижней жидкости разная. При кратковременном подъеме перегородки по обе стороны от нее распространяются уединенные волны. Если $h_0 \leq H/2$, то в положительном направлении оси x движется бугор, если $h_0 \geq H/2$ (рис. 1, б), то — яма (точное выражение для h_0 , при котором происходит смена типа волны, приведено в [4]). Скоростью движения перегородки и начальным перепадом уровня Δh на ней можно варьировать амплитуду генерируемых волн.

Волны измерялись двумя датчиками электропроводности, аналогичными использовавшимся в [6], которые располагались на расстоянии 75 и 100 см от генератора. На таком расстоянии уединенные волны успевали полностью сформироваться, а нежелательные коротковолновые возмущения, вызванные движением волнопродуктора, затухнуть. Скорость распро-



Р и с. 1

странения v измерялась по времени пробега гребнем (или впадиной) волны расстояния 25 см. Повторные измерения в одних и тех же условиях показали, что случайные погрешности оценок скоростей распространения и амплитуд волн имели коэффициенты вариации не более 1%.

Цель опытов — сопоставление расчетных (по модели [5]) и экспериментальных данных о форме и скорости распространения уединенных волн. При этом имело место согласование условий проведения расчетов и опытов по всем параметрам задачи, кроме вязкости жидкостей и поверхностного натяжения на границе раздела. Почти все теоретические работы по уединенным волнам, в том числе и [5], выполнены в рамках модели идеальной жидкости и без учета поверхностного натяжения. В опытах кинематические коэффициенты вязкости для воды 0,0108, для керосина 0,0162 см²/с, а коэффициент поверхностного натяжения 34 дин/см.

Поверхностное натяжение практически не влияет на длинные уединенные волны [6] и в то же время оказывается полезным в ряде отношений. Во-первых, оно позволяет получить резкий скачок плотности и тем самым идеально согласовать условия проведения опытов с математическими моделями. Во-вторых, оно эффективно подавляет неустойчивость Кельвина — Гельмгольца [7] (в условиях проведения опытов до разности скоростей между слоями около 19 см/с) и дает возможность выполнить исследования с движущимися друг относительно друга слоями. Быстро подавляются также нежелательные коротковолновые возмущения, вызванные движением волнопродуктора.

Вязкость жидкостей приводит к тому, что амплитуда, форма и скорость распространения волн меняются по мере удаления от источника, т. е. они, вообще говоря, оказываются нестационарными. Но для жидкостей со сравнительно слабой вязкостью (например, использовавшихся в опытах) в первом приближении на некотором ограниченном интервале времени применим следующий квазистационарный подход. Если задать из опыта закон изменения во времени какого-либо одного параметра уединенной волны, то другие ее параметры предсказываются теорией в рамках модели идеальной жидкости. Обычно, в том числе и в [5], свободный параметр — амплитуда волны. Она и задавалась из опытов. При сопоставлении с результатами расчетов брались средние значения амплитуды и скорости распространения на указанном выше участке между двумя датчиками.

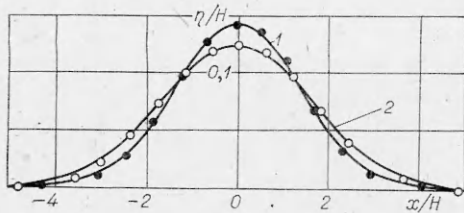
Результаты экспериментальной проверки модели [5] по скорости распространения волн приведены в [4]. Наблюдалось очень хорошее совпадение с теорией (в пределах указанной ранее погрешности измерений), тогда как модели, использующие разложение по двум малым параметрам, давали систематически завышенные значения v (до 10%). В данной работе экспериментальная информация по этому вопросу пополнена (в частности, рассмотрены волны, распространяющиеся в направлении, противоположном направлению скорости u_0); получено столь же хорошее совпадение с моделью [5].

На рис. 2—4 приведены типичные результаты экспериментальной проверки модели [5] по форме уединенных волн. Для волн в виде бугра в [5] получено

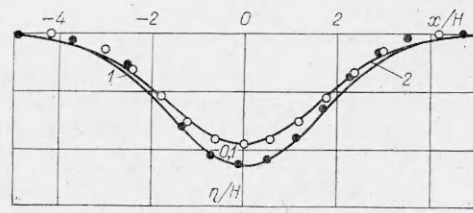
$$(1) \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \sqrt{\frac{(\bar{y} - y_2)^2 (y_4 - \bar{y}) (y_3 - \bar{y})}{y_6 (y_5 - \bar{y})}};$$

$$(2) \quad \bar{y} \simeq \frac{y_3 - y_2 \theta^2 \operatorname{th}^2 k \bar{x}}{1 - \theta^2 \operatorname{th}^2 k \bar{x}},$$

где $\bar{y} = h/H$, $\bar{x} = x/H$, $y_i (i = 2, \dots, 6)$, θ и k — некоторые безразмерные константы, определяемые значениями параметров задачи H , h_0 , η_m , ρ_0 , ρ и u_0 [5]. Для волн в виде ямы имеют место аналогичные выражения, отличающиеся лишь смыслом фигурирующих в них констант. Отметим, что формула (2) — приближенное решение (1), полученное в [5] при за-



Р и с. 2



Р и с. 3

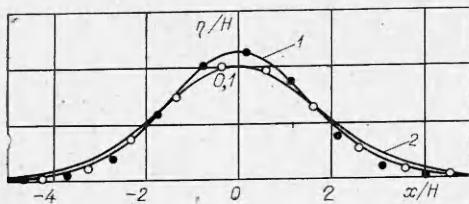
мене ($y_5 - \bar{y}$) на некоторую постоянную среднюю величину. Было интересно проверить, к каким погрешностям приводит такая замена в реальных условиях. Оказалось, что во всех рассмотренных случаях расхождение между точным (1) и приближенным (2) выражениями практически неразличимо в масштабе приводимых графиков. Линии на рис. 2—4 получены численным решением на ЭВМ уравнения (1).

На рис. 2 приведены данные для волн в виде бугра при $u_0 = u = 0$. Кривая 1 и зачерненные точки получены при $y_0 = h_0/H = 0,315$, а кривая 2 и светлые точки — при $y_0 = 0,35$. Экспериментально найденная скорость распространения оказалась в обоих случаях одинаковой: $\bar{v} = v/\sqrt{gH} = 0,235$ (g — ускорение силы тяжести). По расчету для кривой 1 $\bar{v} = 0,235$, а для 2 $\bar{v} = 0,234$.

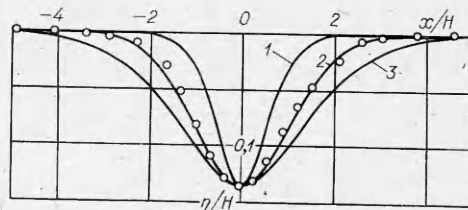
Рис. 3 иллюстрирует эволюцию одной и той же уединенной волны в виде ямы при $u_0 = u = 0$, $y_0 = 0,707$. Зачерненные и светлые точки и соответствующие им расчетные кривые 1 и 2 относятся к расстояниям от перегородки $x/H = 12,5$ и $16,7$. Из-за вязкого затухания амплитуда волны в опытах уменьшалась. Поэтому изменились и расчетные кривые, при получении которых использовались экспериментальные значения амплитуды. Между двумя указанными сечениями в расчетах и в опытах $\bar{v} = 0,233$.

На рис. 4 приведена аналогичная эволюция одной и той же уединенной волны в виде бугра в случае движущихся друг относительно друга слоев при $u_0/\sqrt{gH} = 0,0835$, $u = 0$, $y_0 = 0,442$. Для кривой 1 и зачерненных точек расстояние от барьера $x/H = -13,3$, для кривой 2 и светлых точек — $x/H = -17,5$. На этом отрезке в расчетах и в опытах $\bar{v} = -0,190$.

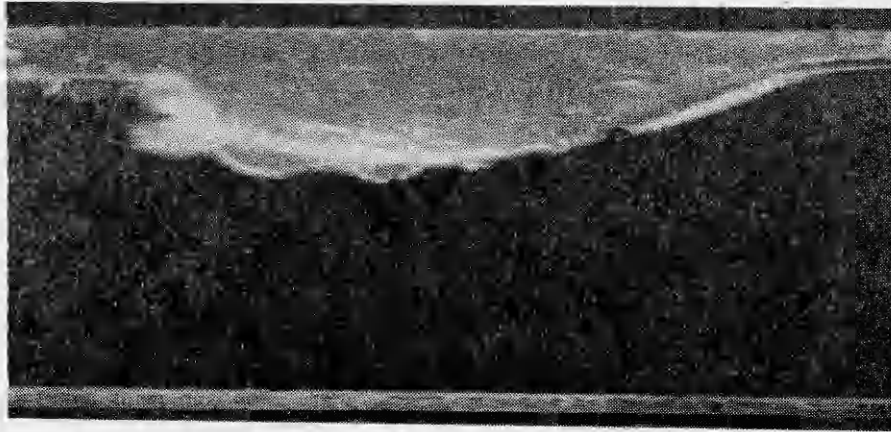
Из рис. 2—4 видно, что модель [5] достаточно хорошо согласуется с опытными данными при учете вязкости жидкостей на основе сформулированного выше квазистационарного подхода. Для получения достаточно простых конечных результатов в модели [5] используются условия «твердой крышки» на верхней границе слоев. Но эта модель дает достаточно точные результаты и при наличии свободной поверхности, если глубина верхнего слоя велика по сравнению с амплитудой волны, что иллюстрируется на рис. 5, где экспериментальные данные получены при $H = 4,75$ см, $u_0 = u = 0$, $y_0 = 0,737$. Кривая 1 соответствует модели [2], 2 — [5], 3 — [8]. Видно, что, когда глубина верхнего слоя всего в 2 раза больше амплитуды волны, модель [5] хорошо согласуется с экспериментальными данными, а модели [2] и [8] сильно расходятся с ними. Скорость



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

распространения \bar{v} в рассматриваемом примере в опытах равна 0,219, по [2] — 0,236, по [5] — 0,232, по [8] — 0,225.

Амплитуда уединенных волн на скачке плотности не может быть слишком большой (например, из-за неустойчивости Кельвина—Гельмгольца). Даже в случае покоящихся в невозмущенном состоянии слоев при прохождении волны может возникнуть столь большой сдвиг скорости, что поверхностного натяжения окажется недостаточно, чтобы подавить указанную неустойчивость. Такая ситуация показана на рис. 6, где представлена неустойчивая уединенная внутренняя волна в виде ямы, которая движется вправо. Неустойчивость, развивающаяся в зоне максимального сдвига скорости, сильно влияет на поведение волны в целом. В частности, ее задний фронт может обрушиться. Эта волна быстро рождается.

В заключение оценим амплитуду волны, при которой возникает неустойчивость Кельвина—Гельмгольца. Из законов сохранения расхода в каждом слое можно показать, что сдвиг скорости между слоями в сечении максимального отклонения границы раздела от положения равновесия

$$\Delta u = \frac{aHv}{(H-h_m)h_m}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu gh_m(H-h_m)}{(H-\mu h_m)}},$$

где $a = h_0 - h_m$; h_m — глубина нижней жидкости в этом сечении; формула для v взята из [4]. Видно, что предельное значение амплитуды волны, при котором возникает неустойчивость,

$$a_c = \Delta u_c \sqrt{h_m(H-h_m)(H-\mu h_m)/\mu gH^2}.$$

Как уже отмечалось, поверхностное натяжение подавляет развитие неустойчивости до разности скоростей $\Delta u_c = 19$ см/с. При этом максимальное возможное значение амплитуды волны $a_c = 1,58$ см. Оценка параметров волны, приведенной на рис. 6, дает значения $a = 1,8$ см, $\Delta u = 23$ см/с, которые превышают критические.

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову и В. И. Букрееву за инициативу постановки данных опытов и всестороннюю помощь в работе, а также О. А. Гавриловой за помощь в проведении численных расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peters A. S., Stoker J. J. Solitary waves in liquids having nonconstant density. — Comm. Pure Appl. Math., 1960, v. 13, N 1.
2. Kakutani T., Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid. — J. Phys. Soc. Japan, 1978, v. 45, N 2.

3. Miles J. W. On internal solitary waves. — *Tellus*, 1979, v. 31, N 5.
4. Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости. — *ПМТФ*, 1983, № 5.
5. Овсянников Л. В. Волновые движения сплошных сред. — Новосибирск: НГУ, 1985.
6. Букреев В. И., Гаврилов Н. В., Знобищев К. Р. Экспериментальное исследование волн в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984, вып. 64.
7. Thorpe S. A. Experiments on the instability of stratified shear flows immiscible fluids. — *J. Fluid Mech.*, 1969, v. 39, pt 1.
8. Keulegan G. H. Characteristics of internal solitary waves. — *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1953, v. 51, N 3.

Поступила 11/VII 1985 г.

УДК 532.593 : 539.3 : 550.3

РАЗВИТИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ДВИЖЕНИИ ОБЛАСТИ ДАВЛЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

А. Е. Букатов, А. А. Ярошенко

(Севастополь)

В линейной постановке изучаются трехмерные неустановившиеся изгибно-гравитационные волны, возникающие при движении области гармонически меняющихся со временем давлений по сплошной тонкой упругой пластинке, плавающей на поверхности однородной жидкости конечной глубины.

При отсутствии пластинки установившиеся пространственные волны, генерируемые движущейся областью периодических возмущений, изучались в [1, 2], а неустановившиеся — в [3—5]. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, образующихся при движении по пластинке постоянной нагрузки, рассматривалось в [6].

1. Пусть однородная идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины H покрыта тонкой упругой пластинкой. Начиная с момента времени $t = 0$ на поверхности пластинки действуют давления вида

$$(1.1) \quad p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x + vt, \quad v = \text{const.}$$

Исследуем развитие возбуждаемого волнового движения, предполагая, что до начала действия давлений (1.1) жидкость не возмущена, а поверхность пластинки — жидкость (прогиб пластинки) ζ горизонтальна.

Считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и возвышение поверхности пластинки — жидкость малыми, находим в системе координат x_1, y , связанной с движущейся со скоростью v областью давлений, для определения потенциала скорости φ уравнение Лапласа

$$(1.2) \quad \Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

с граничными и начальными условиями

$$(1.3) \quad D_1 \nabla^4 \zeta + \kappa_1 F \zeta + \zeta + (\varphi_t + v\varphi_x) \frac{1}{g} = -\frac{p}{\rho g} \quad (z = 0),$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad \varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0,$$

$$\bar{D}_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где ρ — плотность жидкости; E, h, ρ_1, μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки; ζ и φ при $z = 0$ связаны условием $\zeta_t = \varphi_z - v\zeta_x$. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.