

УДК 622.233.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРОГИБА СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА УДАРНОЙ СИЛЫ

А.А. Битюрин

*Ульяновский государственный технический университет
denjgy0706@yandex.ru*

Осуществляется математическое моделирование величины прогиба ступенчатого стержня при продольном ударе о жесткую преграду. Дается краткий вывод формулы расчета величины прогиба стержня при продольной сжимающей нагрузке в случае начального эксцентриситета ударной силы. Методом Тимошенко рассчитывается величина критической сжимающей нагрузки для ступенчатого стержня с прямолинейной продольной осью. Далее моделируется величина прогиба стержня, имеющего эксцентриситет продольной нагрузки, в зависимости от величины начальной скорости.

Ключевые слова: удар, устойчивость, деформация, моделирование, скорость.

Введение

Динамические задачи расчета на устойчивость в работах [2], [4], [7]–[12], [14] реализовывались в основном для идеальных стержней с прямолинейной осью, нагруженных продольной сжимающей силой, проходящей строго через центр тяжести поперечного сечения. В реальных же условиях к элементам конструкций, воспринимающих в процессе эксплуатации динамическую продольную нагрузку, чаще всего эта нагрузка приложена не строго по центру сечения, а с некоторым эксцентриситетом, что оказывает значительное влияние на поведение всей конструкции. Учет так называемого «несовершенства» систем важен, прежде всего, с практической точки зрения, так как позволяет приблизить расчетную схему к реальным условиям. В этом случае решение поставленной задачи несколько усложняется, однако пренебрежение подобными факторами будет приводить к преждевременному износу конструкции в процессе эксплуатации, частым поломкам, а иногда и к аварийной ситуации. Необходимо также учитывать, что всякого рода динамические нагрузки, в том числе и продольные, чаще всего имеют случайный характер, и точно предсказать их возникновение не всегда представляется возможным. Все это подчеркивает важность поставленной задачи и вызывает необходимость ее правильного решения. Использование в реальных конструкциях стержней с переменной продольной жесткостью, выраженной главным образом в изменении площади поперечного сечения, вносит в решение поставленной задачи новые затруднения.

Ниже приводится математическая модель расчета прогиба ступенчатого физически однородного стержня при его продольном ударе об абсолютно жесткую преграду в случае, когда ударная сила приложена с некоторым эксцентриситетом. На основе решения волнового уравнения методом Даламбера с применением графоаналитического метода характеристик строится диаграмма относительной продольной деформации, с помощью которой рассчитывается величина эквивалентной продольной сжимающей

нагрузки. Далее определяется величина критической силы для прямолинейного участка стержня методом Тимошенко [14] и с применением подхода, изложенного в [5], определяется величина прогиба рассматриваемого стержня в зависимости от величины предупредной скорости.

1. Построение математической модели

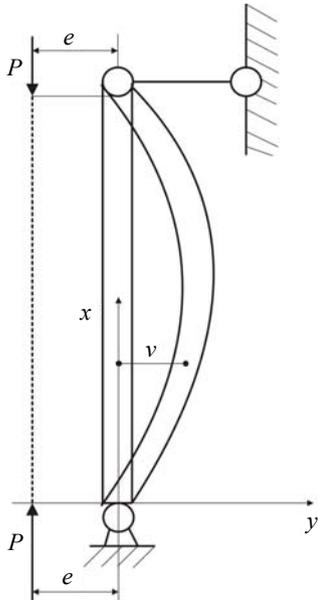


Рис. 1. Шарнирно опертый стержень под действием эксцентрично приложенных сил

Рассмотрим стержень, шарнирно опертый по концам и подвергающийся действию сил P , точка приложения которых отстоит от центра тяжести сечения на расстоянии e . Предполагается, что плечо e лежит в плоскости наименьшей жесткости стержня (рис. 1).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня [5] получит вид

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -P(v + e) \quad (1)$$

или

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = -k^2 e, \quad (2)$$

где $k^2 = P/EI$.

Здесь v – прогиб стержня в сечении с координатой x ; I – момент инерции поперечного сечения стержня; E – модуль упругости.

Общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$v = A \cos kx + B \sin kx. \quad (3)$$

Сюда надо присоединить частное решение $v = -e$; полное решение получает вид

$$v = A \cos kx + B \sin kx - e. \quad (4)$$

Удовлетворяя граничным условиям задачи $v = 0$ при $x = 0, l$, находим:

$$A = e, \quad B = e \operatorname{tg} \frac{kl}{2}. \quad (5)$$

Решение (4) теперь можно представить в следующем виде [5]:

$$v = e \left(\cos kx + \frac{kl}{2} \sin kx - 1 \right), \quad (6)$$

или

$$v = e \left[\frac{\cos \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right]. \quad (7)$$

Стрела прогиба равна при $x = l/2$

$$\vartheta^* = e \left(\frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} - 1 \right) = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{КР}}}}} - 1 \right). \quad (8)$$

Отметим, что и здесь зависимость между ϑ^* и P будет нелинейной и что при $P \rightarrow P_{\text{КР}}$ получим $\vartheta^* \rightarrow \infty$ [5].

Если такого же типа нагружению подвергается стержень с одним зашпеленным концом и другим свободным концом (рис. 2), то уравнение (1) получит вид

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = P(e + \vartheta^* - v) \quad (9)$$

или

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = k^2(e + \vartheta^*). \quad (10)$$

Подчиняя решение условиям $v = 0, dv/dx = 0$ при $x = 0$, найдем

$$v = (e + \vartheta^*)(1 - \cos kx). \quad (11)$$

Полагая $x = l$, получим

$$\vartheta^* = e \left(\frac{1}{\cos kl} - 1 \right) = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{КР}}}}} - 1 \right). \quad (12)$$

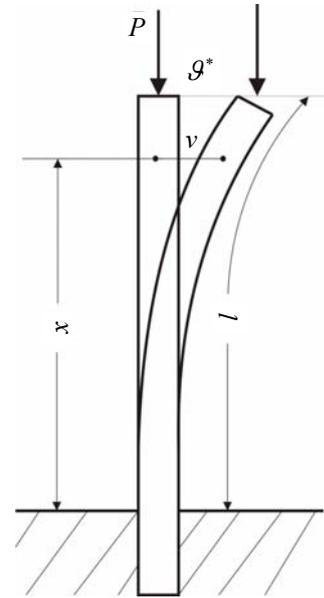


Рис. 2. Стержень с зашпеленным концом под действием эксцентрично приложенной нагрузки

Зависимость между ϑ^* и P оказалась точно той же, что и в случае шарнирно опертых концов [5].

Далее рассмотрим процесс продольного удара ступенчатого физически однородного стержня о жесткую преграду (рис. 3). Длина начального участка ступенчатого стержня равна l_1 , конечного участка l_2 , масса обоих участков m_1 . Длина и масса третьего участка, представляющего собой отдельный стержень, равны соответственно $l_3 = l - (l_1 + l_2)$ и m_2 . Предударная скорость стержневой системы V_0 , общая ее длина равна l . Все участки состоят из одного материала. Используется волновая модель продольного удара [1, 3, 15].

Движение поперечных сечений участков стержня описывается волновым дифференциальным уравнением, составленным для каждого из участков в отдельности [1, 3, 15]:

$$\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (13)$$

где $u_i(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения участка i ; x – координата сечения; t – время; a – скорость распространения продольной волны деформации. Для решения уравнения (13) методом Даламбера задаются необходимые начальные и граничные условия [1, 3, 15].

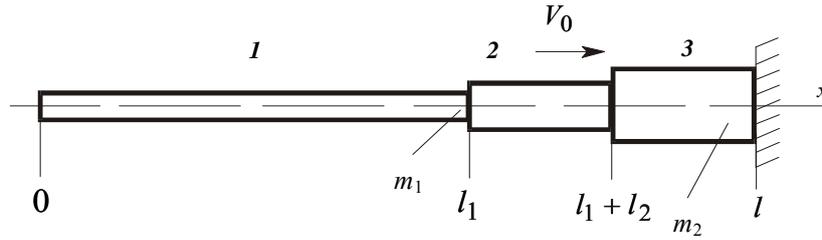


Рис. 3. Схема удара ступенчатого физически однородного стержня о жесткую преграду при неударяющих связях

Пусть в момент времени $T = t_i$ построена диаграмма относительной продольной деформации (рис. 4, а) $\tilde{\epsilon}$ для начального участка произвольного многоступенчатого стержня. Величину продольной силы P_i на рассматриваемом участке, в соответствии с законом Гука [6, 13] и используя данные диаграммы, представим в виде

$$P_i = EA \frac{V_0}{a} (\tilde{\epsilon}_i - \tilde{\epsilon}_{i-1}). \quad (14)$$

Для определения эквивалентной продольной нагрузки, приложенной в торце рассматриваемого участка ступенчатого стержня (рис. 4, б), можно воспользоваться зависимостью (15), представленной в [13].

$$P_{\text{экв}} = \left[P_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + P_2 \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + \dots + P_i \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + P_n \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

В формулах (14) и (15) A – площадь поперечного сечения, $\tilde{\epsilon}_i$ – относительная продольная деформация на i -м отрезке данного участка многоступенчатого стержня; b_1, b_2, b_i, b_n – координаты приложения продольных сил P_i на этом участке. Тогда, подставляя в (15) правую часть (14) после ряда преобразований, получим

$$P = P_{\text{экв}} = EA \frac{V_0}{a} \left[\begin{aligned} & \tilde{\epsilon}_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\epsilon}_2 - \tilde{\epsilon}_1) \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + \dots \\ & + (\tilde{\epsilon}_i - \tilde{\epsilon}_2) \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\epsilon}_n - \tilde{\epsilon}_i) \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \end{aligned} \right]. \quad (16)$$

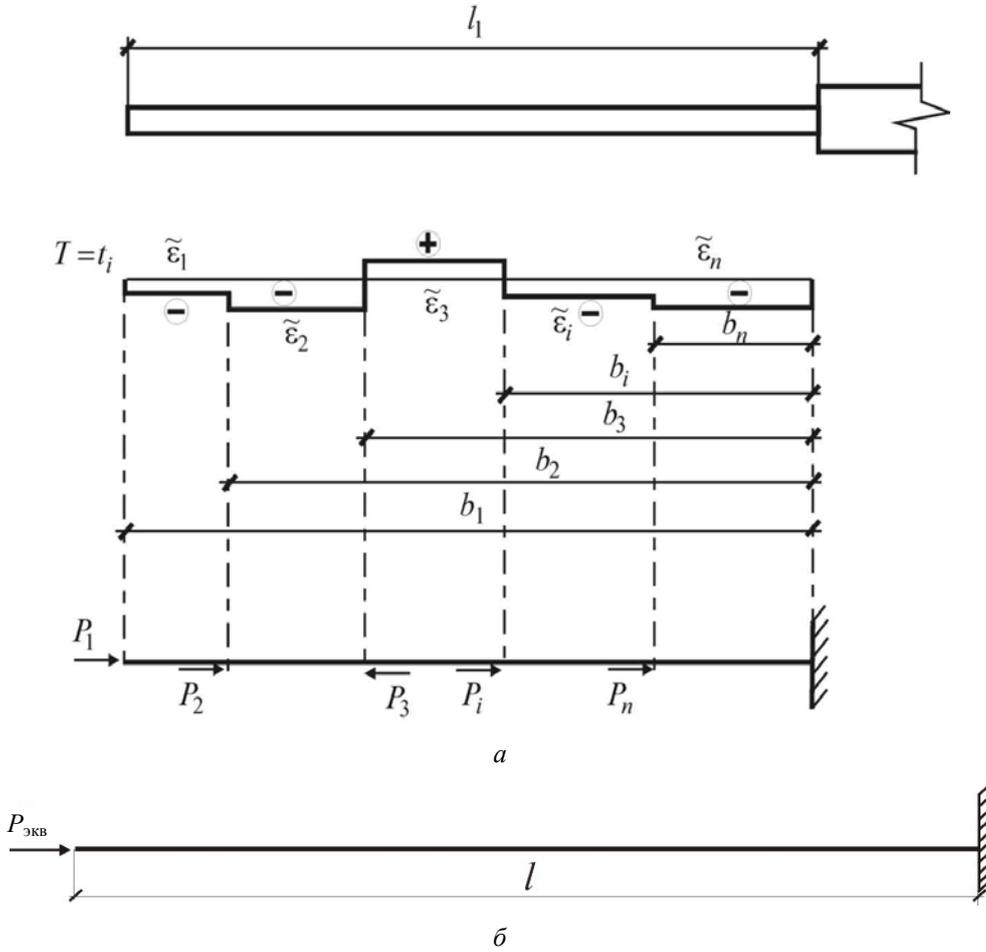


Рис. 4

Для краткости последующих записей введем обозначение:

$$\left[\tilde{\epsilon}_1 \left(\frac{b_1}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\epsilon}_2 - \tilde{\epsilon}_1) \left(\frac{b_2}{l_1} \right)^2 + \dots + (\tilde{\epsilon}_i - \tilde{\epsilon}_{i-1}) \left(\frac{b_i}{l_1} \right)^2 + (\tilde{\epsilon}_n - \tilde{\epsilon}_{n-1}) \left(\frac{b_n}{l_1} \right)^2 \right] = \zeta. \quad (17)$$

Расчет величины критической ударной нагрузки $P_{кр}$ осуществляется методом Тимошенко [14]. Сумма потенциальной энергии деформации и изменения потенциала нагрузки представляет собой полную энергию упругой системы \mathcal{E} , которая представляется в виде [14]:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx, \quad (18)$$

где l – длина рассматриваемого участка; M – изгибающий момент, вызванный действием внешней продольной силы P и прогибом участка v в сечении с координатой x .

Учитывая, что при продольном изгибе потенциальная энергия деформации равна работе внешней сжимающей нагрузки, находим значение критической продольной силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l \frac{m^2 dx}{EI}}, \quad (19)$$

где m – единичный момент, отвечающий силе $P = 1$.

При возможном отклонении стержня от равновесного положения первая вариация от полной энергии должна быть равна нулю: $\delta\mathcal{E} = 0$. Примем, что изогнутая ось стержня в случае потери устойчивости может быть представлена в виде ряда [14]

$$v = f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 + \dots + f_n\gamma_n = \sum_{i=1}^{i=n} f_i\gamma_i. \quad (20)$$

Здесь под γ_i понимаются функции x , удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи. Подставим (20) в выражение для полной энергии (18). Тогда полная энергия окажется зависящей от параметров f_i . Вариации $\delta\mathcal{E}$ можно представить при этом как сумму вариаций, соответствующих возможным изменениям параметров f_i [14]:

$$\delta\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta f_i} \delta f_i.$$

Так как рассматриваемые изогнутые состояния являются равновесными, то вариация должна быть равна нулю [14]:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta f_i} \delta f_i = 0. \quad (21)$$

Но вариации δf_i можно считать независимыми друг от друга, поэтому равенство (21) будет иметь место, если каждый из множителей при δf_i будет равен нулю [14]:

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta f_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

Энергия, в соответствии с (18), должна являться квадратичной функцией параметров f_i . Подставляя выражение (20) в формулу (19), получим значение критической сжимающей силы $P_{\text{кр}}$. Сравнивая значение этой силы с величиной, полученной по формуле (16), получим значение критической предупредительной скорости.

Представим упругую линию рассматриваемого участка ступенчатого стержня (рис. 4, б) в случае потери устойчивости, в первом приближении в виде отрезка квадратичной параболы [14]:

$$v = fx^2. \quad (23)$$

Координата x отсчитывается от границы между первым и вторым участками ступенчатого стержня (рис. 4, а). Изгибающий момент в сечении, лежащем на расстоянии x от границы между этими участками, будет равен $[-P(v_l - v)]$, где через v_l обозначено отклонение свободного торца первого участка. Нетрудно убедиться в том, что это выражение удовлетворяет геометрическим граничным условиям, прогиб v и угол поворота dv/dx обращаются в нуль для точки $x = 0$.

Вычислим величину критической сжимающей силы $P_{кр}$ по формуле (15) в пределах первого участка стержня, учитывая, что единичный момент $m = f(l_1^2 - x^2)$ [14]:

$$P_{кр} = \frac{\int_0^{l_1} 4f^2 x^2 dx}{\int_0^{l_1} \frac{f^2 (l_1^2 - x^2) dx}{EI}} = 2,5 \frac{EI}{l_1^2}. \quad (24)$$

Далее, подставляя в формулу (12) вместо P – правую часть (16) с учетом (17), вместо $P_{кр}$ – правую часть (24), получим

$$\vartheta^* = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{V_0 \zeta}{10a} \left(\frac{8l_1}{d} \right)}} - 1 \right). \quad (25)$$

2. Пример

Рассмотрим продольный удар о жесткую преграду ступенчатого физически однородного стержня, длина начального участка которого $l_1 = 0,6l$, длины второго и третьего участков равны: $l_2 = l_3 = 0,2l$. Соотношение площадей соседних участков

$$\tilde{A} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = 0,5.$$

На основе решения дифференциального уравнения (13) и с применением метода характеристик [1] построена диаграмма относительной продольной деформации (рис. 5).

Рассчитаем величину стрелы прогиба на первом участке в момент времени $t = 2,4l/a$ (на отрезке $0,2l < x < 0,4l$ $\tilde{\epsilon} = -0,57$, на отрезке $0,4l < x < 0,6l$ $\tilde{\epsilon} = -0,69$, рис. 5). Примем эксцентриситет приложения ударной силы $e = 0,2d$, предупредительную скорость $V_0 = 2 \cdot 10^{-3} a$, отношение длины первого участка стержня к его

диаметру $l_1/d = 15$. Параметр ζ при $t = 2,4l/a$ в соответствии с (17) будет равен 0,277. Имеющиеся данные подставляем в (25), получим $\vartheta^* = 0,997d$. Полученное значение прогиба, как видно, оказалось практически равным диаметру рассматриваемого участка стержня при существующем эксцентриситете ударной нагрузки и пятикратной величине начального эксцентриситета. Аналогичным путем можно рассчитать величину стрелы прогиба ϑ^* в любой момент времени в процессе удара.

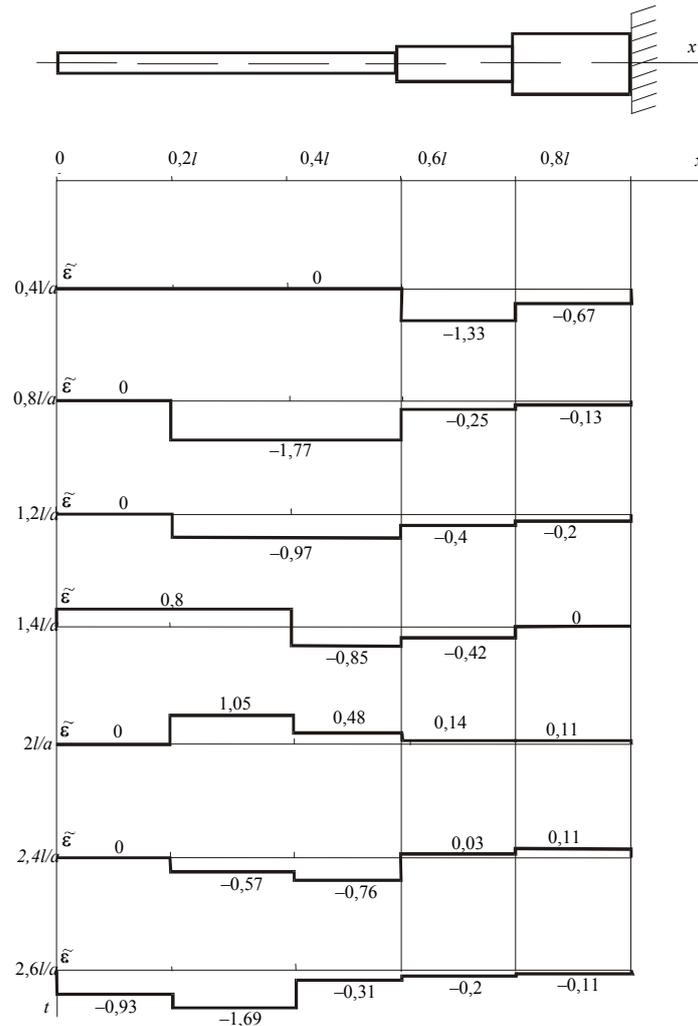


Рис. 5. Диаграмма относительной продольной деформации

3. Вывод

Используя математическую модель, изложенную выше и основанную на подходе, изложенном в [5], а также волновую модель продольного удара и энергетический метод Тимошенко для расчета критической нагрузки, можно легко рассчитать величины стрел прогибов стержней самой различной конфигурации. Это позволяет предсказать

поведение рассматриваемой конструкции в целом в процессе ее эксплуатации в условиях динамических продольных нагрузок, имеющих начальный эксцентриситет. Необходимо отметить, что с помощью формулы (25) можно определить значение критической предупредительной скорости, при которой рассматриваемый участок стержня, будучи изначально прямолинейным, теряет устойчивое состояние и изменяет свою форму. В этом случае аргумент косинуса станет равным $\frac{\pi}{2}$, в связи с чем знаменатель формулы (25) становится равным нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алимов О.Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах / О.Д. Алимов, В.К. Манжосов, В.Э. Еремьянц. – М.: Наука, 1985. – 354 с.
- [2] Алтуфов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
- [3] Битюрин А.А. Моделирование продольного удара однородных стержней при неударяющих связях / А.А. Битюрин, В.К. Манжосов // Вестник УлГТУ. – 2005. – № 3 – С. 23–25.
- [4] Вольмир А.С. Исследование процесса выпучивания стержней при ударе / А.С. Вольмир, И.Г. Кильдебексов // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 2 – Вып. 10. – С. 61–67.
- [5] Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. – М.: ГИТТЛ, 1962. – 880 с.
- [6] Дарков А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 2003. – 641 с.
- [7] Лаврентьев М.А. Динамические формы потери устойчивости упругих систем / М.А. Лаврентьев, А.Ю. Ишлинский // Доклады АН СССР. – 1949. – Т. 65. – № 6. – С. 43–50.
- [8] Малый В.И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе / В.И. Малый // Известия АН СССР. МТТ. – 1972. – № 4. – С. 138 – 144.
- [9] Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы / В.И. Малый // Известия АН СССР. МТТ. – 1973. – № 4. – С. 181–186.
- [10] Малый В.И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы / В.И. Малый // Известия АН СССР. МТТ. – 1975. – № 1. – С. 52–61.
- [11] Малышев Б.М. Устойчивость стержня при ударном сжатии / Б.М. Малышев // Известия АН СССР. МТТ. – 1966. – № 4. – С. 137–142.
- [12] Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
- [13] Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Михеев. – Киев.: Наукова Думка, 1989. – 732 с.
- [14] Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
- [15] Битюрин А.А. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду / А.А. Битюрин, В.К. Манжосов – Ульяновск.: УлГТУ, 2009. – 164 с.

Bityurin A.A.

MATHEMATICAL MODELING OF THE MAGNITUDE OF THE DEFLECTION OF A STEP-ROD WITH A VIEW OF THE ECCENTRICITY OF THE IMPACT FORCES

Mathematical modeling of the shoulder rod deflection under longitudinal impact upon a rigid obstacle is carried out. A brief derivation of the formula for calculation of the rod bending in case of eccentric impact forces is given. The value of the critical compression load is calculated by Timoshenko method. The rod deflection value with the eccentricity of the longitudinal load depending on the size of the initial speed is calculated.

Keywords: Blow; Stability; Deformation; Simulation; Speed.

Статья поступила 29 января 2012 г.