

УДК 532.5:532.517.4

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КРИВОЙ НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА

Ю. Н. Григорьев<sup>\*,\*\*</sup>, И. В. Ершов<sup>\*,\*\*\*</sup>

\* Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

\*\* Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

\*\*\* Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин),  
630008 Новосибирск, Россия

E-mails: grigor@ict.nsc.ru, i\_ershov@ngs.ru

Построена асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости сверхзвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. С использованием в качестве исходной математической модели уравнений двухтемпературной вязкой газовой динамики в рамках классической линейной теории устойчивости получена спектральная задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка. Единые для всех сдвиговых течений преобразования системы выполнялись по классической схеме Линя. Задача сведена к алгебраическому секулярному уравнению с характерным разделением на “вязкую” и “невязкую” части, которое решалось численно. Показано, что рассчитанные таким образом кривые нейтральной устойчивости хорошо согласуются с полученными ранее результатами прямого численного решения исходной спектральной задачи. В частности, при увеличении уровня возбуждения критическое число Рейнольдса увеличивается, а нейтральная кривая смещается в область больших волновых чисел. Это подтверждается также решением асимптотического уравнения для критического числа Рейнольдса при числе Маха  $M \leq 4$ .

Ключевые слова: линейная теория устойчивости, колебательно-возбужденный газ, кривая нейтральной устойчивости, критическое число Рейнольдса.

DOI: 10.15372/PMTF20170101

**Введение.** В теории гидродинамической устойчивости в период ее становления в 40–50-х гг. XX в. использовались исключительно асимптотические методы. Первые результаты, главным образом, для пограничного слоя на плоской пластине представлены в работе [1]. Дальнейшее совершенствование аналитических подходов позволило выявить ряд общих закономерностей в области гидродинамической устойчивости и перехода к турбулентности, а также получить близкие к реальным оценки критических параметров некоторых течений. Однако асимптотические методы имеют ряд ограничений, прежде всего по диапазону параметров течений — числам Маха и Рейнольдса, фазовым скоростям и длинам волн возмущений. Как правило, в работах, основанных на использовании асимптотических методов, содержится ряд предположений, проверка обоснованности которых выходила за рамки теории.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00274а).

© Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., 2017

С развитием вычислительных методов появилась возможность прямого численного решения задач линейной теории устойчивости для востребованных на практике течений без ограничений на их параметры. Начало новому направлению положили исследования, выполненные в 60-е гг. XX в. И. М. Меком, ссылки на работы которого имеются в [1–3]. Эти и другие численные исследования отодвинули на второй план использование асимптотических приближений, однако способствовали совершенствованию ставших классическими аналитических методов, прежде всего уточнению границ области их применимости, а также отказу от необоснованных предположений. Поэтому проверенные аналитические результаты излагаются в монографиях по теории гидродинамической устойчивости и используются для сопоставления с результатами численных и экспериментальных исследований.

Необходимость решения новых задач гидродинамической устойчивости течений, например оптически активных или термически неравновесных молекулярных газов [4, 5], также стимулирует обобщение классических результатов [1], в первую очередь приближенных оценок критических чисел Рейнольдса, на ранее не рассматривавшиеся среды и течения. В настоящей работе строится асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости сверхзвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. Следует отметить, что спектральная задача для плоского течения Куэтта с двумя краевыми условиями в рамках асимптотической теории ранее не исследовалась даже для случая совершенного газа.

Основные этапы вывода секулярного уравнения, единые для всех сдвиговых течений, совпадают с предложенными в работах [1, 6]. Асимптотическое разложение исходной системы по малому параметру  $1/Re$  выделяет “вязкие” и “вязкие” линейно независимые решения. При  $Re \rightarrow \infty$  два линейно независимых “вязких” решения строились методом Фробениуса на основе асимптотического разложения в окрестности критического слоя. Для “вязких” решений система после ряда упрощений была приведена к системе шестого порядка, аналогичной системе Дана — Линя [1]. Входящие в нее уравнения импульсов и температур сводились к уравнениям Эйри. В результате “вязкие” решения были представлены через обобщенные функции Эйри нулевого, первого и второго порядков. Секулярное уравнение было получено из алгебраической системы шестого порядка, упрощенной на основе асимптотик функций Эйри. Использование функций Эйри позволило выразить “вязкую” часть уравнения через табулированную функцию Титьенса и ее производную, которые обычно используются в асимптотических теориях устойчивости [1–3]. Рассчитанные на основе полученного уравнения кривые нейтральной устойчивости хорошо согласуются с результатами прямого численного решения исходной спектральной задачи [4]. Увеличение уровня возбуждения приводит к увеличению критического числа Рейнольдса и смещению нейтральной кривой в область больших волновых чисел.

Построение асимптотической линейной теории и выполненные в работе численные расчеты завершают цикл работ авторов по исследованию устойчивости сверхзвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа [4, 7–9].

Значение данной работы состоит также в том, что полностью без дополнительных упрощающих предположений восстановлен вывод секулярного уравнения, так как и в работах по устойчивости [6, 10], и в монографиях [1–3] случай сжимаемых течений рассматривается достаточно кратко. При этом большая часть промежуточных результатов имеет универсальный характер и может быть использована для исследования других сдвиговых течений колебательно-возбужденного газа.

**1. Исходные уравнения.** Рассматривается линейная устойчивость плоского вязкого течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. Исходная система уравнений двухтемпературной гидродинамики [4] линеаризуется относительно равновесного стационарного

решения

$$U_s(y) = y, \quad T_s(y) = 1 + \frac{(\gamma - 1) \text{Pr} M^2}{2} (1 - y^2), \quad T_{v,s}(y) = 0, \\ \rho_s(y) = \frac{1}{T_s(y)}, \quad p_s(y) = \frac{1}{\gamma M^2}, \quad (1)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$U_s(0) = 0, \quad U_s(1) = 1, \quad T_s(1) = 1, \quad \left. \frac{dT_s}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $U_s$  — скорость несущего потока;  $\rho_s$  — плотность;  $p_s$  — давление;  $T_s, T_{v,s}$  — статическая (поступательная) и колебательная температуры газа.

В силу линейной формы профиля скорости среднего течения (1) уравнение неразрывности в системе уравнений двухтемпературной гидродинамики [4] удовлетворяется тождественно. Уравнение Ландау — Теллера в этой системе также выполняется тождественно, поскольку для рассматриваемого равновесного стационарного решения (1)  $\gamma_v \equiv 0$  и  $T_v = 0$ . При этом из уравнений импульсов и уравнения состояния при выполнении граничных условий (2) следует, что  $\rho_s T_s = 1$  и давление  $p_s = 1/(\gamma M^2)$ . Из уравнения энергии следует, что для температуры несущего потока  $T_s$  справедливо уравнение

$$\frac{d^2 T_s}{dy^2} + (\gamma - 1) \text{Pr} M^2 = 0,$$

из решения которого с граничными условиями (2) находим искомый профиль.

Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \rho_s \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) + \hat{u}_y \frac{\partial \rho_s}{\partial y} &= 0, \\ \rho_s \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial x \partial y} \right), \\ \rho_s \left( \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \hat{u}_y}{\partial y^2} \right), \\ \rho_s \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) + \gamma(\gamma - 1) M^2 p_s \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) &= \\ &= \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} \right) + \frac{\gamma_v \rho_s (\hat{T}_v - \hat{T})}{\tau} + \frac{2\gamma(\gamma - 1) M^2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right) \frac{dU_s}{dy}, \\ \gamma_v \rho_s \left( \frac{\partial \hat{T}_v}{\partial t} + U_s \frac{\partial \hat{T}_v}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_{v,s}}{\partial y} \right) &= \frac{20}{33} \frac{\gamma \gamma_v}{\text{Re Pr}} \left( \frac{\partial^2 \hat{T}_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_v}{\partial y^2} \right) - \frac{\gamma_v \rho_s (\hat{T}_v - \hat{T})}{\tau}, \\ \gamma M^2 \hat{p} &= \rho_s \hat{T} + \hat{p} T_s \end{aligned}$$

( $\text{Re} = \rho_0 h U_0 / \eta$ ,  $M = U_0 / \sqrt{\gamma R T_0}$ ,  $\text{Pr} = \eta c_V / \lambda$  — числа Рейнольдса, Маха и число Прандтля несущего потока соответственно).

Периодические по  $x$  возмущения рассматривались в виде бегущих плоских волн

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{q}(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \mathbf{q}(x, y, t) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{p}, \hat{T}, \hat{T}_v, \hat{p}), \quad \mathbf{q}(y) = (u, \alpha v, \rho, \theta, \theta_v, p).$$

Здесь  $\alpha$  — волновое число вдоль периодической переменной  $x$ ;  $c = c_r + ic_i$  — комплексная фазовая скорость;  $i$  — мнимая единица;  $\mathbf{q}(y)$  — вектор амплитуд возмущений. Подставляя  $\mathbf{q}(x, y, t)$  в линеаризованную систему, для амплитуд возмущений получаем уравнения

$$D\rho + \alpha \rho'_s v + \rho_s \sigma = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - \rho_s D u - \alpha \rho_s v U'_s - i \alpha \varepsilon &= 0, \\ \frac{\alpha}{\text{Re}} \Delta v - \alpha \rho_s D v - \varepsilon' &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \Delta \theta - \rho_s D \theta - \alpha \rho_s v T'_s - (\gamma - 1) \sigma + \frac{2\gamma(\gamma - 1) M^2}{\text{Re}} (u' + i \alpha^2 v) U'_s + \frac{\gamma v \rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) &= 0, \\ \frac{20\gamma\gamma_v}{33 \text{Re Pr}} \Delta \theta_v - \gamma_v \rho_s D \theta_v - \alpha \gamma_v \rho_s v T'_s - \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) &= 0, \quad \gamma M^2 p = \rho_s \theta + \rho T_s, \end{aligned}$$

где

$$D = i \alpha (U_s - c), \quad \sigma = \alpha (v' + i u), \quad \varepsilon = p - \frac{\sigma}{\text{Re}} \left( \alpha_1 + \frac{1}{3} \right), \quad \Delta = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2,$$

штрих означает дифференцирование по переменной  $y$ . Система линейных уравнений (3) имеет восьмой порядок и вместе с однородными граничными условиями

$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=0} = v|_{y=1} = \theta|_{y=0} = \theta|_{y=1} = \theta_v|_{y=0} = \theta_v|_{y=1} = 0 \quad (4)$$

определяет спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений  $c$ , а число Маха  $M$  и волновое число  $\alpha$  служат параметрами. Решения системы для больших чисел Рейнольдса  $\text{Re}$  строятся в виде асимптотических рядов

$$\mathbf{q}(y) = \mathbf{q}_0(y) + \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{q}_1(y) + \dots$$

В нулевом приближении получается система уравнений для невязких возмущений, рассматривавшаяся в работе [8], в которой, в частности, показано, что данная система сводится к линейному уравнению второго порядка для возмущения давления. Поэтому нулевое приближение позволяет найти только два линейно независимых решения, остальные шесть решений находятся из системы (3).

**2. Асимптотика “невязких” решений в окрестности особой точки.** Уравнение для возмущения давления рассматривается в несамосопряженной форме

$$p'' - \frac{T_s}{W^2} \left( \frac{W^2}{T_s} \right)' p' - \alpha^2 \left( 1 - \frac{M^{*2} W^2}{T_s} \right) p = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} W &= U_s - c, \quad M^{*2} = m^2 M^2, \quad m^2 = m_r^2 + i m_i^2, \\ m_r^2 &= \frac{R_1(1 + \gamma_v + \alpha \tau c_i) + \Delta^2}{R_1^2 + \Delta^2}, \quad m_i^2 = -\frac{\gamma_v}{\gamma} \frac{(\gamma - 1) \Delta}{R_1^2 + \Delta^2}, \\ R_1 &= 1 + \gamma_v / \gamma + \alpha \tau c_i, \quad \Delta = \alpha \tau (U_s - c_r). \end{aligned}$$

Для рассматриваемых ниже нейтральных возмущений  $c \equiv c_r$ . Поскольку для нейтральных возмущений также необходимо выполнение первого условия Рэлея  $c_r \in [0; 1]$  [8], то  $y = c$  является регулярной особой точкой уравнения (5). Его решения в окрестности особой точки находятся методом Фробениуса [11, 12]. Далее нижним индексом  $c$  обозначаются значения переменных в точке  $y_c$ , где фазовая скорость равна скорости невозмущенного потока (в критическом слое). Для линейного профиля скорости  $y_c = c$ .

Введем новую независимую переменную  $\eta = y - y_c = y - c$  и представим уравнение (5) в виде

$$p'' - a(\eta) p' - \alpha^2 b(\eta) p = 0, \quad a(\eta) = \frac{T_s}{\eta^2} \left( \frac{\eta^2}{T_s} \right)', \quad b(\eta) = 1 - \frac{M^{*2} \eta^2}{T_s}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) будем искать в форме обобщенного степенного ряда [11]

$$p(\eta) = \eta^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k, \quad c_0 \neq 0. \quad (7)$$

Разложим коэффициенты (6) в степенные ряды по переменной  $\eta$  в окрестности особой точки  $y_c = c$ :

$$a(\eta) = 2\eta + A\eta^2 + (A^2 + 2B)\eta^3 + \dots, \quad b(\eta) = 1 - \frac{m_{rc}^2 M^2}{T_{sc}} \eta^2 + \frac{m_{rc}^2 M^2 T'_{sc}}{T_{sc}^2} \eta^3 + \dots,$$

$$A = -\frac{T'_{sc}}{T_{sc}}, \quad B = -\frac{T''_{sc}}{2T_{sc}}.$$

С учетом полученных разложений подставляем (7) в (6) и приравняем к нулю выражения для коэффициентов при каждой степени  $\eta^k$ . Из равенства нулю коэффициента при низшей степени  $\eta^{\rho-2}$  для показателя  $\rho$  получаем определяющее уравнение [11]

$$\rho(\rho - 1)c_0 - 2\rho c_0 = 0. \quad (8)$$

Поскольку  $c_0 \neq 0$ , уравнение (8) имеет два корня:  $\rho_1 = 3$ ,  $\rho_2 = 0$ . Так как  $\rho_1 \neq \rho_2$ ,  $\rho_1 - \rho_2 = 3$  (целое число), в соответствии с [12] два линейно независимых решения (6) имеют вид

$$p_1(\eta) = \eta^3 \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} \eta^k, \quad p_2(\eta) = C p_1(\eta) \ln(\eta) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} \eta^k.$$

Без ограничения общности можно положить  $c_0 = 1$ . Подставляя  $p_1(\eta)$  с показателем  $\rho_1 = 3$  в уравнение (6) и приравнявая к нулю коэффициенты при последовательных степенях  $\eta^k$ , получаем рекуррентные выражения для коэффициентов  $\{c_k^{(1)}\}$ . В результате имеем

$$p_1(\eta) = \eta^3 + \frac{3A}{4} \eta^4 + \frac{6(A^2 + 2B) + \alpha^2}{10} \eta^5 + \dots$$

Подстановка  $p_2(\eta)$  в (6) позволяет отделить сингулярную часть, а для неизвестных коэффициентов  $\{c_k^{(2)}\}$  получить рекуррентные уравнения. В результате второе решение записывается в виде [2]

$$p_2(\eta) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha^2}{6} A p_1(\eta) \ln(\eta) - \frac{\alpha^2}{2} \eta^2 - \\ \quad - \frac{\alpha^2}{12} \left( 2B + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{A^2}{12} + \frac{m_{rc}^2 M^2}{T_{sc}} \right) \eta^4 + \dots, & \eta > 0, \\ 1 - \frac{\alpha^2}{6} A p_1(\eta) (\ln(\eta) - i\pi) - \frac{\alpha^2}{2} \eta^2 - \\ \quad - \frac{\alpha^2}{12} \left( 2B + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{A^2}{12} + \frac{m_{rc}^2 M^2}{T_{sc}} \right) \eta^4 + \dots, & \eta < 0. \end{cases}$$

Остальные “невязкие” решения с использованием решений для возмущения давления представим в виде

$$u_{кн}(\eta) = -\frac{T_s}{\alpha\eta} \left( \frac{p'_k}{\alpha\eta} + \alpha p_k \right), \quad v_{кн}(\eta) = \frac{ip'_k T_s}{\alpha^2 \eta},$$

$$\theta_{кн}(\eta) = \frac{T_s}{\alpha^2 \eta^2} \left[ p'_k T'_s + (\gamma - 1) \alpha^2 \eta^2 M^2 p_k \left( 1 - \frac{\tau \gamma v}{\gamma + \gamma_v + i\gamma \tau \alpha \eta} \right) \right],$$

$$\theta_{v,kH}(\eta) = \frac{iT_s}{\alpha\eta} \left( \frac{\alpha v_{kH} T_s'}{T_s} - \frac{i\gamma(\gamma-1)\tau\alpha\eta M^2 p_k T_s}{\gamma + \gamma_v + i\gamma\tau\alpha\eta} \right), \quad k = 1, 2.$$

**3. Асимптотика “вязких” решений.** Для нахождения “вязких” решений необходимо преобразовать и упростить систему (3), как это сделано в [2, 6]. В первую очередь объединим уравнения импульсов таким образом, чтобы исключить слагаемые с флуктуацией давления. Уравнение для возмущения поперечной скорости  $v$  умножим на  $i\alpha$  и вычтем из предварительно продифференцированного уравнения для возмущения продольной скорости  $u$ . В результате из двух уравнений импульсов следует

$$\frac{1}{\text{Re}} [\Delta u' - i\alpha^2 \Delta v] - (\rho_s Du)' - (\alpha \rho_s v U_s')' - i\alpha^2 \rho_s Dv = 0. \quad (9)$$

Поскольку в полученном уравнении третьего порядка отсутствует слагаемое с объемной вязкостью (коэффициент  $\alpha_1$ ), прогнозируемый диссипативный эффект определяется только релаксацией колебательной моды.

Использованный в [6, 10] подход к оценке членов в системе (3) для случая пограничного слоя представляется несколько искусственным, поэтому, как и в работе [2], уравнение (9) упростим, оставив в нем только ведущие слагаемые, как обычно делается в математических работах по спектральной теории [12, 13]. Остальные уравнения заимствуем из [6], сохраняя релаксационные слагаемые в уравнениях для температур. Получаем следующую систему:

$$v' + iu - i(y-c) \frac{\theta}{T_s} = 0; \quad (10)$$

$$u''' - i\alpha \text{Re}(y-c) \frac{u'}{T_s} = 0; \quad (11)$$

$$\theta'' - i\alpha \text{Pr} \text{Re}(y-c) \frac{\theta}{T_s} + \frac{\gamma_v \text{Pr} \text{Re}}{\gamma\tau T_s} (\theta_v - \theta) = 0; \quad (12)$$

$$\theta_v'' - \frac{33}{20} i\alpha \text{Pr} \text{Re}(y-c) \frac{\theta_v}{T_s} - \frac{33 \text{Pr} \text{Re}}{20\gamma^2\tau T_s} (\theta_v - \theta) = 0. \quad (13)$$

Упрощенная таким образом система, как и исходная, имеет восьмой порядок. Если перейти к совершенному газу при  $\theta_v = \theta$ , система трансформируется в “вязкую” систему Дана — Линя шестого порядка [6].

Уравнение импульсов (11) преобразуем следующим образом. Введем новые независимую [14] и зависимую [6] переменные

$$Y = \left( \frac{3}{2} \int_c^y \sqrt{\frac{t-c}{T_s}} dt \right)^{2/3}, \quad U(Y) = u' \sqrt{\frac{dY}{dy}}. \quad (14)$$

Выражая через них входящие в уравнение (11) производные, получаем

$$u'(y) = U(Y) \left( \frac{dY}{dy} \right)^{-1/2},$$

$$u'''(y) = \frac{d^2U}{dy^2} \left( \frac{dY}{dy} \right)^{3/2} - \frac{U(Y)}{2} \left( \frac{dY}{dy} \right)^{3/2} \left[ \frac{d^3Y}{dy^3} - \frac{3}{2} \left( \frac{d^2Y}{dy^2} \right)^2 \left( \frac{dY}{dy} \right)^{-1} \right].$$

Подставляя эти выражения в (11), находим

$$\frac{d^2U}{dY^2} \left( \frac{dY}{dy} \right)^{3/2} - U \left[ i\alpha \text{Re} \frac{y-c}{T_s} \left( \frac{dY}{dy} \right)^{-1/2} + P(Y) \right] = 0,$$

где

$$P(Y) = \frac{1}{2} \left( \frac{dY}{dy} \right)^{3/2} \left[ \frac{d^3 Y}{dy^3} - \frac{3}{2} \left( \frac{d^2 Y}{dy^2} \right)^2 \left( \frac{dY}{dy} \right)^{-1} \right], \quad \frac{dY}{dy} = \sqrt{\frac{y-c}{YT_s}}.$$

Полагая  $\text{Re} \gg 1$ , можно пренебречь слагаемым  $P(Y)$  (см. [6]). В результате получаем

$$\frac{d^2 U}{dY^2} - i\alpha \text{Re} Y U = 0.$$

Введя новую независимую переменную  $\zeta = (\alpha \text{Re})^{1/3} Y$ , получаем уравнение Эйри [14]

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} - i\zeta U = 0. \quad (15)$$

Линейно независимые решения (15) можно представить в нескольких эквивалентных формах, например с помощью функций Эйри первого и второго рода  $Ai_{1,2}(z)$  [14]. В рассматриваемом случае удобно использовать обобщенные функции Эйри первого и второго рода  $A_k(z, p)$  [2], для которых имеется ряд соотношений:

$$\begin{aligned} A_k(z, 0) &= A_k(z) \equiv Ai_k(z), & A_k(z, -1) &= Ai'_k(z), \\ A_k(z, 1) &= \int_{\infty}^z A_k(t) dt, & A_k(z, 2) &= \int_{\infty}^z A_{k,1}(t) dt; \\ A_k(z, p-3) - zA_k(z, p-1) + (p-1)A_k(z, p) &= 0, & k &= 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

В монографиях по гидродинамической устойчивости (см., например, [1, 2] и др.) решения (15) записываются через функции Ханкеля первого и второго рода  $H_{1/3}^{(1,2)}$ . Это позволяет для расчета кривых нейтральной устойчивости использовать табулированные функции Титьенса. Соотношения, связывающие функции Ханкеля и обобщенные функции Эйри, имеют вид [2]

$$\begin{aligned} Ai_1(z e^{i\pi/6}) &= \frac{12^{-1/6} i}{2} \left( \frac{2z^{3/2}}{3} \right)^{1/3} H_{1/3}^{(1)} \left( \frac{2z^{3/2}}{3} \right), \\ Ai_2(z e^{i\pi/6}) &= \frac{i}{2} e^{2\pi i/3} \left( \frac{2z^{3/2}}{3} \right)^{1/3} H_{1/3}^{(2)} \left( \frac{2z^{3/2}}{3} \right). \end{aligned}$$

С учетом однородности линейного уравнения (15) два его решения можно записать в виде

$$U_{1,2}(\zeta) = A_{1,2}(i\zeta). \quad (17)$$

Из (14), (17) для производной продольной скорости вязких возмущений следует

$$u'_{1,2}(y) = A_{1,2}(i\zeta) \left( \frac{dY}{dy} \right)^{-1/2}.$$

При переходе в (15) к независимой переменной  $\zeta$  для дифференциалов имеем

$$dy = \left( \frac{dy}{dY} \right) \frac{d\zeta}{(\alpha \text{Re})^{1/3}} = \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right) d\zeta.$$

Интегрируя  $u'_{1,2}(y)$ , получаем выражение

$$u_{1,2\text{в}}(y) = \int_{\infty}^{\xi} \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right)^{3/2} A_{1,2}(i\zeta) d\zeta = \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right)^{3/2} A_{1,2}(i\zeta, 1), \quad (18)$$

в котором при переходе к последнему равенству из-под знака интеграла, как и в работе [6], вынесены медленно меняющиеся функции.

Для того чтобы получить решения для возмущений поперечной скорости из уравнения (10), построим решения уравнений для возмущений температур (12), (13), выполнив следующие преобразования. В случае рассматриваемых двухатомных газов можно принять  $33/(20\gamma) \approx 1$ . Складывая и вычитая (12), (13), переходим к уравнениям для новых переменных

$$\theta_+ = \theta + \theta_v \frac{\gamma_v}{\gamma}, \quad \theta_- = \theta - \theta_v.$$

Соответственно обратный переход осуществляется по формулам

$$\theta = \frac{\gamma\theta_+ - \gamma_v\theta_-}{\gamma + \gamma_v}, \quad \theta_v = \frac{\gamma(\theta_+ + \theta_-)}{\gamma + \gamma_v}. \quad (19)$$

Для  $\theta_+$  получаем уравнение

$$\theta_+'' - i\alpha \text{Pr Re}(y - c) \frac{\theta_+}{T_s} = 0, \quad (20)$$

решение которого аналогично решению уравнения импульсов (11). Путем замены переменных

$$Y_\theta = \left( \frac{3}{2} \text{Pr}^{1/2} \int_c^y \sqrt{\frac{t-c}{T_s}} dt \right)^{2/3} = Y \text{Pr}^{1/3}, \quad \Theta = \theta_+ \sqrt{\frac{dY_\theta}{dy}}$$

получаем уравнение

$$\frac{d^2\Theta}{dY_\theta^2} - i\alpha \text{Re} Y_\theta \Theta = 0,$$

совпадающее с точностью до обозначений с уравнением для  $U(Y)$ . Это позволяет записать два линейно независимых решения (20) в виде

$$\theta_{+1,2}(\zeta_\theta) = A_{1,2}(i\zeta_\theta) \sqrt{\frac{dy}{dY_\theta}}, \quad \zeta_\theta = (\alpha \text{Re})^{1/3} Y_\theta = \zeta \text{Re}^{1/3}. \quad (21)$$

Аналогичным образом строятся решения для функции  $\theta_-$ . Далее ограничимся решениями для ее мнимой части  $\tilde{\theta}_- = \theta_- - \bar{\theta}_-$  (черта означает комплексное сопряжение). Уравнение для  $\tilde{\theta}_-$  имеет вид

$$\tilde{\theta}_-'' - 2i\alpha \text{Pr Re}(y - c) \frac{\tilde{\theta}_-}{T_s} = 0 \quad (22)$$

и отличается от (20) постоянным множителем в коэффициенте. Решениями (22) являются функции

$$\tilde{\theta}_{-1,2}(\zeta_\theta) = A_{1,2}(i\sqrt[3]{2}\zeta_\theta) \sqrt{\frac{dy}{dY_\theta}}, \quad \zeta_\theta = (\alpha \text{Re})^{1/3} Y_\theta = (2 \text{Pr})^{1/3} \zeta. \quad (23)$$

Из (19), (21), (23) получаем приближенное решение для возмущения статической температуры

$$\theta_{1,2\text{в}} = \frac{1}{\gamma + \gamma_v} \sqrt{\frac{dy}{dY_\theta}} \left( \gamma A_{1,2}(i\zeta_\theta) - \frac{\gamma_v}{\sqrt[3]{2}} A_{1,2}(i\sqrt[3]{2}\zeta_\theta) \right). \quad (24)$$



С использованием (24) из системы (10)–(13) можно исключить уравнение для возмущения колебательной температуры, понизив порядок системы до шестого.

Сокращенная система имеет два тривиальных решения:  $u = v = \theta = \theta_v = 0$  и  $u = 1$ ,  $v = -iy$ ,  $\theta = \theta_v = 0$ . Вместо них в качестве решений исходной системы (3) будем рассматривать невязкие решения

$$V_k(y) = [u_{kH}(y), v_{kH}(y), \theta_{kH}(y)]^*, \quad k = 1, 2 \quad (25)$$

(знак “\*” означает вектор-столбец решений).

Далее строим два линейно независимых решения для возмущений поперечной скорости. Полагая в выражении (10)  $\theta = 0$ ,  $u \neq 0$  и интегрируя его, находим

$$v_{1,2B}^{(1)}(y) = -i \int_{\infty}^{\zeta} \frac{dy}{dY} d\xi \int_{\infty}^{\xi} \left( \frac{dY}{d\zeta} \right)^2 \left( \frac{dy}{dY} \right)^{3/2} A_{1,2}(i\nu) d\nu = -i \left( \frac{dy}{dY} \right)^{5/2} \left( \frac{dY}{d\zeta} \right)^2 A_{1,2}(i\zeta, 2). \quad (26)$$

Как и в (18), для перехода к записи через  $A_1(i\nu, 2)$  из подынтегральных выражений вынесены функции, медленно меняющиеся по сравнению с функцией  $H_{1/3}^{(1)}(2\sqrt{z^3}/3)$ .

Интегрируя (10) при  $u = 0$ ,  $\theta \neq 0$ , получаем

$$v_{1,2B}^{(2)}(y) = \frac{i(y-c)}{(\gamma + \gamma_v)T_s} \left( \frac{dY_\theta}{d\zeta_\theta} \right) \sqrt{\left( \frac{dy}{dY_\theta} \right)^3} \left( \gamma A_{1,2}(i\zeta_\theta, 1) - \frac{\gamma_v}{\sqrt{2}} A_{1,2}(i\sqrt[3]{2}\zeta_\theta, 1) \right). \quad (27)$$

В результате линейно независимые решения упрощенной “вязкой” системы принимают вид

$$\begin{aligned} V_3(y) &= [u_{1B}(y), v_{1B}^{(1)}(y), 0]^*, & V_4(y) &= [0, v_{1B}^{(2)}(y), \theta_{1B}]^*, \\ V_5(y) &= [u_{2B}(y), v_{2B}^{(1)}(y), 0]^*, & V_6(y) &= [0, v_{2B}^{(2)}(y), \theta_{2B}]^*. \end{aligned} \quad (28)$$

**4. Секулярное уравнение.** Для перехода к спектральной задаче необходимо потребовать, чтобы линейная комбинация независимых решений (25), (28) удовлетворяла однородным граничным условиям (4). Это выполняется при условии

$$c_1 V_1(0) + c_2 V_2(0) + c_3 V_3(0) + c_4 V_4(0) + c_5 V_5(0) + c_6 V_6(0) = 0; \quad (29)$$

$$c_1 V_1(1) + c_2 V_2(1) + c_3 V_3(1) + c_4 V_4(1) + c_5 V_5(1) + c_6 V_6(1) = 0. \quad (30)$$

Однородная система (29), (30) имеет нетривиальные решения  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$  в случае равенства нулю ее определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{1H}(0) & u_{2H}(0) & u_{1B}(0) & 0 & u_{2B}(0) & 0 \\ v_{1H}(0) & v_{2H}(0) & v_{1B}^{(1)}(0) & v_{1B}^{(2)}(0) & v_{2B}^{(1)}(0) & v_{2B}^{(2)}(0) \\ \theta_{1H}(0) & \theta_{2H}(0) & 0 & \theta_{1B}(0) & 0 & \theta_{2B}(0) \\ u_{1H}(1) & u_{2H}(1) & u_{1B}(1) & 0 & u_{2B}(1) & 0 \\ v_{1H}(1) & v_{2H}(1) & v_{1B}^{(1)}(1) & v_{1B}^{(2)}(1) & v_{2B}^{(1)}(1) & v_{2B}^{(2)}(1) \\ \theta_{1H}(1) & \theta_{2H}(1) & 0 & \theta_{1B}(1) & 0 & \theta_{2B}(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

Для дальнейшего упрощения выполним оценку элементов определителя (31) по порядку величины. Из приведенных в п. 2 выражений для “невязких” решений следует, что при  $y = 0, 1$  они ограничены и при  $M \leq 4$  на обеих границах можно положить

$$u_{kH} \sim v_{kH} \sim \theta_{kH} \sim O(1), \quad k = 1, 2.$$

В отличие от ограниченных “вязких” решений “вязкие” решения (28) выражаются через обобщенные функции Эйри, аргументы которых на обеих границах достаточно велики. Действительно, в граничных точках имеют место оценки

$$\zeta|_{y=0} \sim \left(\frac{\alpha \operatorname{Re}}{T_s(0)}\right)^{1/3} c \sim O(10); \quad (32)$$

$$\zeta|_{y=1} \sim \left(\frac{\alpha \operatorname{Re}}{T_s(y^*)}\right)^{1/3} (1-c)^{3/2} \sim O(10^2), \quad (33)$$

где использованы взятые из численных расчетов нейтральных кривых [4] характерные значения  $\alpha \sim 2$ ,  $\operatorname{Re} \sim 10^6$ ,  $c \sim 10^{-2}$ . Оценки (32), (33), в свою очередь, позволяют использовать для оценки “вязких” элементов в определителе (31) универсальную асимптотическую формулу [2] для обобщенных функций Эйри

$$A_{\pm}(x, p) \simeq \frac{(\pm 1)^p}{2\sqrt{\pi}} x^{-(2p+1)} e^{\pm\eta}, \quad \eta = \frac{2}{3} x^{3/2} \quad (34)$$

( $A_1(x, p) \sim A_-(x, p)$ ;  $A_2(x, p) \sim A_+(x, p)$ ).

Из (34) следует, что определяющую роль в оценке играет экспоненциальный множитель. Для удобства анализа необходимо нормировать столбцы определителя, соответствующие “вязким” решениям  $V_3, \dots, V_6$ , таким образом, чтобы их максимальные элементы имели порядок  $O(1)$ , как элементы первых двух столбцов. Для этого в соответствии с (34) умножим данные столбцы в (31) на нормирующие множители

$$N_3 \sim \zeta^3(0) e^{\eta(0)}, \quad N_4 \sim \zeta(0) e^{\eta(0)}, \quad N_5 \sim \zeta^3(1) e^{-\eta(1)}, \quad N_6 \sim \zeta(1) e^{-\eta(1)}.$$

При этом в столбцах  $V_3, V_4$  элементы, вычисляемые на верхней границе при  $y = 1$ , будут экспоненциально малы. В столбцах  $V_5, V_6$  экспоненциально малыми будут элементы, вычисляемые на нижней границе при  $y = 0$ . Пренебрегая этими элементами, определитель (31) представим в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{1\text{H}}(0) & u_{2\text{H}}(0) & \tilde{u}_{1\text{B}}(0) & 0 & 0 & 0 \\ v_{1\text{H}}(0) & v_{2\text{H}}(0) & \tilde{v}_{1\text{B}}^{(1)}(0) & \tilde{v}_{1\text{B}}^{(2)}(0) & 0 & 0 \\ \theta_{1\text{H}}(0) & \theta_{2\text{H}}(0) & 0 & \tilde{\theta}_{1\text{B}}(0) & 0 & 0 \\ u_{1\text{H}}(1) & u_{2\text{H}}(1) & 0 & 0 & \tilde{u}_{2\text{B}}(1) & 0 \\ v_{1\text{H}}(1) & v_{2\text{H}}(1) & 0 & 0 & \tilde{v}_{2\text{B}}^{(1)}(1) & \tilde{v}_{2\text{B}}^{(2)}(1) \\ \theta_{1\text{H}}(1) & \theta_{2\text{H}}(1) & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_{2\text{B}}(1) \end{vmatrix} = 0$$

(знак “ $\sim$ ” означает перенормированные ненулевые элементы).

Рассмотрим преобразованную подсистему (30) при  $y = 1$ . В силу однородности входящие в эту систему неизвестные можно перенормировать таким образом, чтобы исключить неизвестное решение  $c_2$ . В новых переменных подсистема принимает вид

$$\begin{aligned} C_1 u_{1\text{H}}(1) + C_5 \tilde{u}_{2\text{B}}(1) &= -u_{2\text{H}}(1), \\ C_1 v_{1\text{H}}(1) + C_5 \tilde{v}_{2\text{B}}^{(1)}(1) + C_6 \tilde{v}_{2\text{B}}^{(2)}(1) &= -v_{2\text{H}}(1), \\ C_1 \theta_{1\text{H}}(1) + C_6 \tilde{\theta}_{2\text{B}}(1) &= -\theta_{2\text{H}}(1). \end{aligned} \quad (35)$$

Подсистему при  $y = 0$  также представим в перенормированном виде

$$\begin{aligned} C_1 u_{1\text{H}}(0) + C_3 \tilde{u}_{1\text{B}}(0) &= -u_{2\text{H}}(0), \\ C_1 v_{1\text{H}}(0) + C_3 \tilde{v}_{1\text{B}}^{(1)}(0) + C_4 \tilde{v}_{1\text{B}}^{(2)}(0) &= -v_{2\text{H}}(0), \end{aligned} \quad (36)$$

$$C_1\theta_{1\text{H}}(0) + C_4\tilde{\theta}_{1\text{B}}(0) = -\theta_{2\text{H}}(0).$$

Поскольку в подсистему (36) неизвестные  $C_5, C_6$  не входят, для получения секулярного уравнения из подсистемы (35) определим коэффициент  $C_1$ :

$$C_1 = \Delta_1(1)/\Delta(1),$$

где

$$\Delta(1) = \tilde{u}_{2\text{B}}(1)\tilde{\theta}_{2\text{B}}(1) \begin{vmatrix} u_{1\text{H}}(1) & 1 & 0 \\ v_{1\text{H}}(1) & \tilde{v}_{2\text{B}}^{(1)}/\tilde{u}_{2\text{B}}(1) & \tilde{v}_{2\text{B}}^{(2)}(1)/\tilde{\theta}_{2\text{B}}(1) \\ \theta_{1\text{H}}(1) & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(1) = \tilde{u}_{2\text{B}}(1)\tilde{\theta}_{2\text{B}}(1) \begin{vmatrix} -u_{2\text{H}}(1) & 1 & 0 \\ -v_{2\text{H}}(1) & \tilde{v}_{2\text{B}}^{(1)}/\tilde{u}_{2\text{B}}(1) & \tilde{v}_{2\text{B}}^{(2)}(1)/\tilde{\theta}_{2\text{B}}(1) \\ -\theta_{2\text{H}}(1) & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$C_1 = \frac{v_{2\text{H}}(1) - u_{2\text{H}}(1)\tilde{v}_{2\text{B}}^{(1)}/\tilde{u}_{2\text{B}}(1) + \theta_{2\text{H}}(1)\tilde{v}_{2\text{B}}^{(2)}(1)/\tilde{\theta}_{2\text{B}}(1)}{-v_{1\text{H}}(1) + u_{1\text{H}}(1)\tilde{v}_{2\text{B}}^{(1)}/\tilde{u}_{2\text{B}}(1) + \theta_{1\text{H}}(1)\tilde{v}_{2\text{B}}^{(2)}(1)/\tilde{\theta}_{2\text{B}}(1)}. \quad (37)$$

После нормировки столбцов, исключая экспоненциальные множители, входящие в асимптотики функций Эйри (34), в соотношения перенормированных элементов в (37) входят степенные множители. Действительно, из (34) и выражений для нормирующих множителей следует

$$\tilde{v}_{2\text{B}}^{(1)}/\tilde{u}_{2\text{B}}(1) \sim \zeta^{-2}, \quad \tilde{v}_{2\text{B}}^{(2)}(1)/\tilde{\theta}_{2\text{B}}(1) \sim \zeta^{-2},$$

откуда с учетом (33) имеем

$$C_1 = -\frac{v_{2\text{H}}(1)}{v_{1\text{H}}(1)} + O[(\alpha \text{Re})^{-2/3}]. \quad (38)$$

Из (38) следует, что на верхней границе  $y = 1$  с точностью до  $O[(\alpha \text{Re})^{-2/3}]$  для возмущения поперечной скорости выполняется требуемое условие непротекания (4).

Из первого и третьего уравнений подсистемы (36) находим соответственно

$$C_3 = -\frac{C_1 u_{1\text{H}}(0) + u_{2\text{H}}(0)}{\tilde{u}_{1\text{B}}(0)}, \quad C_4 = -\frac{C_1 \theta_{1\text{H}}(0) + \theta_{2\text{H}}(0)}{\tilde{\theta}_{1\text{B}}(0)}. \quad (39)$$

Подставляя (38), (39) во второе уравнение подсистемы (36), получаем искомое секулярное уравнение

$$C_1 v_{1\text{H}}(0) + v_{2\text{H}}(0) - \frac{C_1 u_{1\text{H}}(0) + u_{2\text{H}}(0)}{u_{1\text{B}}(0)} v_{1\text{B}}^{(1)}(0) - \frac{C_1 \theta_{1\text{H}}(0) + \theta_{2\text{H}}(0)}{\theta_{1\text{B}}(0)} v_{1\text{B}}^{(2)}(0) = 0, \quad (40)$$

записанное через ненормированные “вязкие” решения.

Выразим входящие в (40) отношения “вязких” решений через табулированные функции типа функций Титьенса [2, 3, 6]. В частности, выполняя в (18), (26) замену переменной  $Z = -\zeta$ , получаем

$$\frac{v_{1\text{B}}^{(1)}(0)}{u_{1\text{B}}(0)} = iZ \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right) \left( -\frac{A_1(-Z, 2)}{Z A_1(-Z, 1)} \right) = iZ \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right) F(Z), \quad (41)$$

где  $F(Z)$  — функция Титъенса, для которой в [2, 6] приведены таблицы. Как и в работе [6], введем вспомогательную функцию

$$\tilde{G}(Z) = -\frac{A_1(-Z, 1)}{ZA_1(-Z)},$$

которая может быть выражена через функцию Титъенса и ее производную и также табулирована в [6].

Отношение “вязких” решений (24), (27) представим в виде

$$\frac{v_{1B}^{(2)}(0)}{\theta_{1B}(0)} = -\frac{ic}{T_s} \left( \frac{dy}{dY_\theta} \right) \left( \frac{dY_\theta}{d\zeta_\theta} \right) J, \quad (42)$$

где

$$J = \frac{\gamma A_1(i\zeta_\theta, 1) - \gamma_v A_1(i\sqrt[3]{2}\zeta_\theta, 1)/\sqrt{2}}{\gamma A_1(i\zeta_\theta) - \gamma_v A_1(i\sqrt[3]{2}\zeta_\theta)/\sqrt[3]{2}}. \quad (43)$$

Для того чтобы представить выражение (43) через функции  $F(Z)$ ,  $\tilde{G}(Z)$ , преобразуем его следующим образом:

$$J = \left[ \left( \gamma - \frac{\gamma_v}{\sqrt{2}} \right) A_1(i\zeta_\theta, 1) - \frac{\gamma_v}{\sqrt{2}} \int_{i\zeta_\theta}^{i\zeta_\theta/\sqrt[3]{2}} A_1(\zeta) d\zeta \right] / \left[ \left( \gamma - \frac{\gamma_v}{\sqrt[3]{2}} \right) A_1(i\zeta_\theta) - \gamma_v \frac{A_1(i\sqrt[3]{2}\zeta_\theta) - A_1(i\zeta_\theta)}{\sqrt[3]{2}} \right].$$

Далее интеграл в числителе выразим по формуле левых прямоугольников, а разность в знаменателе — по формуле конечных приращений Лагранжа:

$$J = \frac{(\gamma - \gamma_v/\sqrt{2})A_1(i\zeta_\theta, 1)}{(\gamma - \gamma_v/\sqrt[3]{2})A_1(i\zeta_\theta)} \frac{1 - \gamma_v(\gamma\sqrt{2} - \gamma_v)^{-1}\zeta_\theta(\sqrt[3]{2} - 1)A_1(\zeta_\theta)/A_1(\zeta_\theta, 1)}{1 - \gamma_v(\gamma\sqrt[3]{2} - \gamma_v)^{-1}\zeta_\theta(\sqrt[3]{2} - 1)A_1'(\zeta_\theta)/A_1(\zeta_\theta)}. \quad (44)$$

С помощью рекуррентной формулы (16) при  $p = 2$  производную от функции Эйри первого рода запишем в виде

$$A_1(\zeta_\theta, -1) \equiv A_1'(\zeta_\theta) = \zeta_\theta A_1(\zeta_\theta, 1) - A_1(\zeta_\theta, 2).$$

Отношение обобщенных функций Эйри в знаменателе представим следующим образом:

$$\frac{\zeta_\theta A_1(\zeta_\theta, 1) - A_1(\zeta_\theta, 2)}{A_1(\zeta_\theta, 1)} = \frac{\zeta_\theta A_1(\zeta_\theta, 1)}{A_1(\zeta_\theta, 1)} \left( 1 - \frac{A_1(\zeta_\theta, 2)}{\zeta_\theta A_1(\zeta_\theta, 1)} \right).$$

Подставляя полученное выражение в (44) и выполняя замену  $Z_\theta = -\zeta_\theta$ , получаем искомое выражение для  $J$  через функции  $F(Z_\theta)$ ,  $\tilde{G}(Z_\theta)$ :

$$J = \frac{(\gamma\sqrt{2} - \gamma_v)Z_\theta[\tilde{G}(Z_\theta) - \gamma_v(\gamma\sqrt{2} - \gamma_v)^{-1}(\sqrt[3]{2} - 1)Z_\theta]}{\sqrt[6]{2}(\gamma\sqrt[3]{2} - \gamma_v)\{1 + (\sqrt[3]{2} - 1)(\gamma\sqrt[3]{2} - \gamma_v)^{-2}Z_\theta^3\tilde{G}(Z_\theta)[1 - F(Z_\theta)]\}}$$

или в форме  $J = -Z_\theta J_1(Z_\theta)$ . В результате равенство (42) принимает вид

$$\frac{v_{1B}^{(2)}(0)}{\theta_{1B}(0)} = \frac{ic}{T_s} \left( \frac{dy}{dY_\theta} \right) \left( \frac{dY_\theta}{d\zeta_\theta} \right) Z_\theta J_1(Z_\theta). \quad (45)$$

В случае совершенного газа, когда возбуждение колебательных мод отсутствует и  $\gamma_v = 0$ , в упрощенной системе релаксационные слагаемые обращаются в нуль и она переходит в систему Дана — Линя. При этом, как и в [6], имеем

$$\frac{v_{1\text{B}}^{(2)}(0)}{\theta_{1\text{B}}(0)} = \frac{ic}{T_s} \left( \frac{dy}{dY_\theta} \right) \left( \frac{dY_\theta}{d\zeta_\theta} \right) Z_\theta \tilde{G}(Z_\theta).$$

Преобразуя множитель в формуле (41):

$$\tilde{M} = Z \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right) \Big|_{y=0} = -(\alpha \text{Re})^{1/3} Y \frac{1}{(\alpha \text{Re})^{1/3}} Y^{1/2} \frac{\sqrt{T_s}}{\sqrt{-c}} = -Y^{3/2} \frac{\sqrt{T_s}}{\sqrt{-c}},$$

с учетом (14) получаем

$$\tilde{M} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{T_s}}{\sqrt{-c}} \int_0^c \sqrt{\frac{t-c}{T_s(t)}} dt.$$

Как и в работе [6], для множителя  $\tilde{M}$  имеем

$$\tilde{M} = (1 + \lambda) \frac{c}{U_s'},$$

где

$$1 + \lambda = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{T_s}}{c^{3/2}} \int_0^c \sqrt{\frac{t-c}{T_s(t)}} dt.$$

Из (41) получаем

$$\frac{v_{1\text{B}}^{(1)}(0)}{u_{1\text{B}}(0)} = i(1 + \lambda)cF(Z). \quad (46)$$

Покажем, что справедливо равенство

$$Z \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right) \Big|_{y=0} = Z_\theta \left( \frac{dy}{dY_\theta} \right) \frac{dY_\theta}{d\zeta_\theta} \Big|_{y=0}.$$

Действительно, так как  $Z_\theta = \text{Pr}^{1/3} Z$ , имеем

$$Z_\theta \left( \frac{dy}{dY_\theta} \right) \frac{dY_\theta}{d\zeta_\theta} \Big|_{y=0} = \text{Pr}^{1/3} Z \frac{1}{\text{Pr}^{1/3}} \frac{dy}{dY} \left( \frac{dY}{d\zeta} \right) = Z \frac{dY}{d\zeta} \left( \frac{dy}{dY} \right) \Big|_{y=0}. \quad (47)$$

Для преобразования невязких членов секулярного уравнения введем обозначения

$$u_{\text{H}}(0) = C_1 u_{1\text{H}}(0) + u_{2\text{H}}(0), \quad v_{\text{H}}(0) = C_1 v_{1\text{H}}(0) + v_{2\text{H}}(0), \quad \theta_{\text{H}}(0) = C_1 \theta_{1\text{H}}(0) + \theta_{2\text{H}}(0). \quad (48)$$

Из приведенных в п. 2 выражений для функций невязких возмущений продольной и поперечной скоростей и температуры следует отношение

$$\frac{\theta_{\text{H}}(0)}{u_{\text{H}}(0)} = (\gamma - 1) \text{M}^2 \Delta(0) \left[ c + \frac{iv_{\text{H}}(0)}{u_{\text{H}}(0)} \right], \quad \Delta(0) = 1 - \frac{\tau\gamma_v}{\gamma + \gamma_v - i\gamma\alpha\tau c}.$$

С учетом соотношений (45)–(47) секулярное уравнение принимает вид

$$\frac{v_{\text{H}}(0)}{u_{\text{H}}(0)} = \frac{i(1 + \lambda)c\{F(Z) + [(\gamma - 1)\text{M}^2 c^2 \Delta(0)/T_s(0)]J_1\}}{1 + [(\gamma - 1)\text{M}^2 c \Delta(0)/T_s(0)](1 + \lambda)cJ_1}. \quad (49)$$

Введя обозначение  $P = C_1 p_1 + p_2$ , из выражений для невязких решений и (48) получаем

$$u_{\text{н}}(0) = \frac{T_s(0)}{\alpha c} \left( -\frac{P'}{\alpha c} + \alpha P \right), \quad v_{\text{н}}(0) = \frac{T_s(0)}{i\alpha^2 c} P'.$$

Пусть  $\Pi(0) = P'(0)/(\alpha^2 P(0))$ , тогда отношение в левой части (49) можно записать в виде

$$\frac{v_{\text{н}}(0)}{u_{\text{н}}(0)} = \frac{\Pi(0)}{i(1 - \Pi(0)/c)}.$$

Отсюда следует

$$\Pi(0) = \frac{c}{1 - ic[v_{\text{н}}(0)/u_{\text{н}}(0)]^{-1}}.$$

В результате секулярное уравнение (49) преобразуется к виду

$$\Pi(0) = -c \frac{F(Z) + K J_1(Z_\theta)}{(1 + \lambda)^{-1} - F(Z)}, \quad (50)$$

где

$$K = \frac{(\gamma - 1) M^2 c^2 \Delta(0)}{T_s(0)}.$$

**5. Асимптотики секулярного уравнения.** В работах [3, 15] и других функции  $F(Z)$ ,  $\tilde{G}(Z)$  табулированы до значений  $Z \leq 10$ . В расчетах, проведенных в настоящей работе, потребовалось решение секулярного уравнения для больших значений  $Z$ . Для этого необходимо построить асимптотику правой части уравнения (50) при  $Z \rightarrow \infty$ .

При больших значениях аргумента асимптотика функции Титьенса имеет вид [1]

$$F(Z) \approx (Z^{3/2} e^{-\pi/4} - 5/4)^{-1}. \quad (51)$$

Введя переменную  $q = Z^{-3/2}/\sqrt{2}$ , с точностью до членов  $O(q^2)$  получаем

$$F(Z) \approx q + iq(1 + 5q/2).$$

Для вспомогательной функции  $\tilde{G}(Z_\theta)$  имеет место выражение [6]

$$\tilde{G}(Z_\theta) = \frac{F(Z_\theta)}{1 - F(Z_\theta) - Z_\theta F'(Z_\theta)}.$$

Продифференцировав выражение (51), находим

$$\tilde{G}(Z_\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}} \left[ q + iq \left( 1 + \frac{3q}{2\sqrt{\text{Pr}}} \right) \right].$$

С учетом полученных асимптотик секулярное уравнение для больших значений  $Z$  запишем в искомой форме

$$\Pi(0) = -c(1 + \lambda)q \{ 1 + i + 2qi(1 + \lambda) + q[5i/2 + K \text{Pr}^{-1/2}(1 + i)] \}. \quad (52)$$

В теории кривой нейтральной устойчивости представляет интерес приближенная оценка критического числа Рейнольдса рассматриваемого течения. Для сжимаемого пограничного слоя на пластине такая оценка получена в [1, 3], где в явном виде представлена зависимость для критического числа Рейнольдса  $\text{Re}_{cr}$  от параметров невозмущенного течения.

Как и в работе [1], рассмотрим диапазон небольших сверхзвуковых чисел Маха  $M \leq 4$ . При этом правая часть уравнения (50) упрощается. Действительно,  $1 + \lambda \leq 1,1$ , что позволяет в первом приближении пренебречь величиной  $\lambda$  в силу ее малости по сравнению

с единицей. Кроме того, из численных расчетов нейтральной кривой [4] следует, что вдоль нее характерное значение фазовой скорости нейтральных возмущений равно  $c \approx 0,1 \div 0,2$ . При этом

$$K = \frac{(\gamma - 1) M^2 c^2 \Delta(0)}{T_s(0)} \approx 0,020 \div 0,075.$$

Поскольку  $F(Z) \sim J_1(Z\theta)$ , вторым слагаемым в числителе (50) можно пренебречь. В результате получаем приближенное секулярное уравнение

$$\Pi(0) = \frac{F(Z)}{1 - F(Z)} = \frac{1}{1 - F(Z)} - 1 = \hat{F}(Z) - 1, \quad (53)$$

где  $\hat{F}(Z)$  — модифицированная функция Титьенса, таблицы которой также приведены в литературе (см., например, [15]). Разделив в полученном уравнении действительную и мнимую части, получаем систему

$$\Pi_r(0) = \hat{F}_r(Z) - 1, \quad \Pi_i(0) = \hat{F}_i(Z).$$

Функция  $\hat{F}_i(Z)$  имеет колоколообразную форму, и ее максимальное значение  $\hat{F}_i(Z) = 0,58$  соответствует значению аргумента  $Z = 3,24$ . Этому значению соответствует также значение  $\hat{F}_r(Z) = 1,46$ . Ветви функции  $\hat{F}_i(Z)$  определяют нижнюю и верхнюю ветви нейтральной кривой, точка слияния которых на плоскости  $(\text{Re}, \alpha)$  соответствует значению  $\text{Re}_{cr}$ . Поэтому систему для оценки критического числа Рейнольдса можно записать в виде

$$\Pi_r(0) = 0,46, \quad \Pi_i(0) = 0,58. \quad (54)$$

Система (54) позволяет вычислить неизвестные критические значения фазовой скорости  $c_{cr}$  и волнового числа  $\alpha_{cr}$ . Переход в системе (54) к более простым соотношениям, как это сделано в [1], невозможен, поскольку волновые числа на нейтральной кривой не являются малыми и равны  $\alpha \approx 2,4 \div 2,7$ . Использование асимптотики только по малости  $c_{cr}$  не приводит к значительному упрощению левых частей (54). После нахождения решения системы (54)  $(c_{cr}, \alpha_{cr})$  приближенное значение критического числа Рейнольдса вычисляется по формуле

$$\text{Re}_{cr} = \left[ \frac{\alpha_{cr}}{3,24^3} \left( \frac{3}{2} \int_0^c \sqrt{\frac{c-y}{T_s(y)}} dy \right)^2 \right]^{-1} = \frac{3,24^3 T_s(0)}{\alpha_{cr} c_{cr}^3}, \quad (55)$$

где значение интеграла в знаменателе для данного профиля температуры определено с точностью до четвертого знака после запятой.

Представляет интерес получение дальних асимптотик ветвей кривой нейтральной устойчивости, как это сделано в классических работах [2, 6]. Секулярное уравнение (53) представим в виде [10]

$$(u + 1) + iv = \frac{1}{1 - F(Z)} = \hat{F}(Z) = \hat{F}_r(Z) + i\hat{F}_i(Z). \quad (56)$$

При  $Z \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическое представление

$$\hat{F}(Z) = 1 + i \frac{1}{\sqrt{2Z^3}}. \quad (57)$$

При убывании аргумента  $Z$  на правой ветви  $\hat{F}_i(Z)$  увеличивается до максимального значения  $\hat{F}_i(3,24) = 0,58$ , после чего на левой ветви  $\hat{F}_i(Z)$  монотонно убывает, обращаясь в нуль при  $Z = 2,294$ . Как показано выше, с большой точностью выполняется соотношение

$$\alpha \text{Re} = Z^3 \left[ \frac{3}{2} \int_0^c \sqrt{\frac{c-y}{T_s(y)}} dy \right]^{-2} = \frac{Z^3 T_s(0)}{c^3}. \quad (58)$$

Из (58) для нижней ветви нейтральной кривой следует

$$\text{Re}_d = \frac{2,294^3}{\alpha c^3} T_s(0).$$

При  $Z \rightarrow \infty$  из (56), (57) получаем  $u = 0$ ,  $v = 1/\sqrt{2Z^3}$  и для верхней ветви имеем асимптотическое выражение

$$\alpha \text{Re} = \frac{T_s(0)}{2vc^3}.$$

При  $c \rightarrow 0$  асимптотическая оценка мнимой “невязкой” части секулярного уравнения (54) дает приближенную зависимость  $v \sim \pi A c \sim c$ , с учетом которой для верхней ветви получаем

$$\text{Re}_u \sim \frac{T_s(0)}{2\alpha c^5}.$$

Для получения дальних асимптотик на плоскости  $(\alpha, \text{Re})$  необходимо определить зависимость  $c \approx \alpha^k$  при  $c \rightarrow 0$ . Однако согласно численным расчетам, в отличие от результатов для пограничного слоя [1, 6] и несжимаемого течения Пуазейля [2], при изменении числа Рейнольдса в пределах трех порядков  $\text{Re} = 10^5 \div 10^8$  волновое число вдоль нейтральной кривой остается немалым, порядка  $O(1)$ . Поэтому получить явную оценку из анализа “невязкой” части секулярного уравнения не удастся. Из анализа вычисленных нейтральных кривых [4] следует, что  $c \approx 2 \cdot 10^{-3} \alpha^4$ . В результате удается получить только промежуточные асимптотики для чисел Рейнольдса  $\text{Re} = 10^5 \div 10^8$ :

— для нижней ветви нейтральной кривой

$$\text{Re}_d \sim \frac{2,294^3}{8\alpha^{13}} 10^9 T_s(0),$$

— для верхней ветви

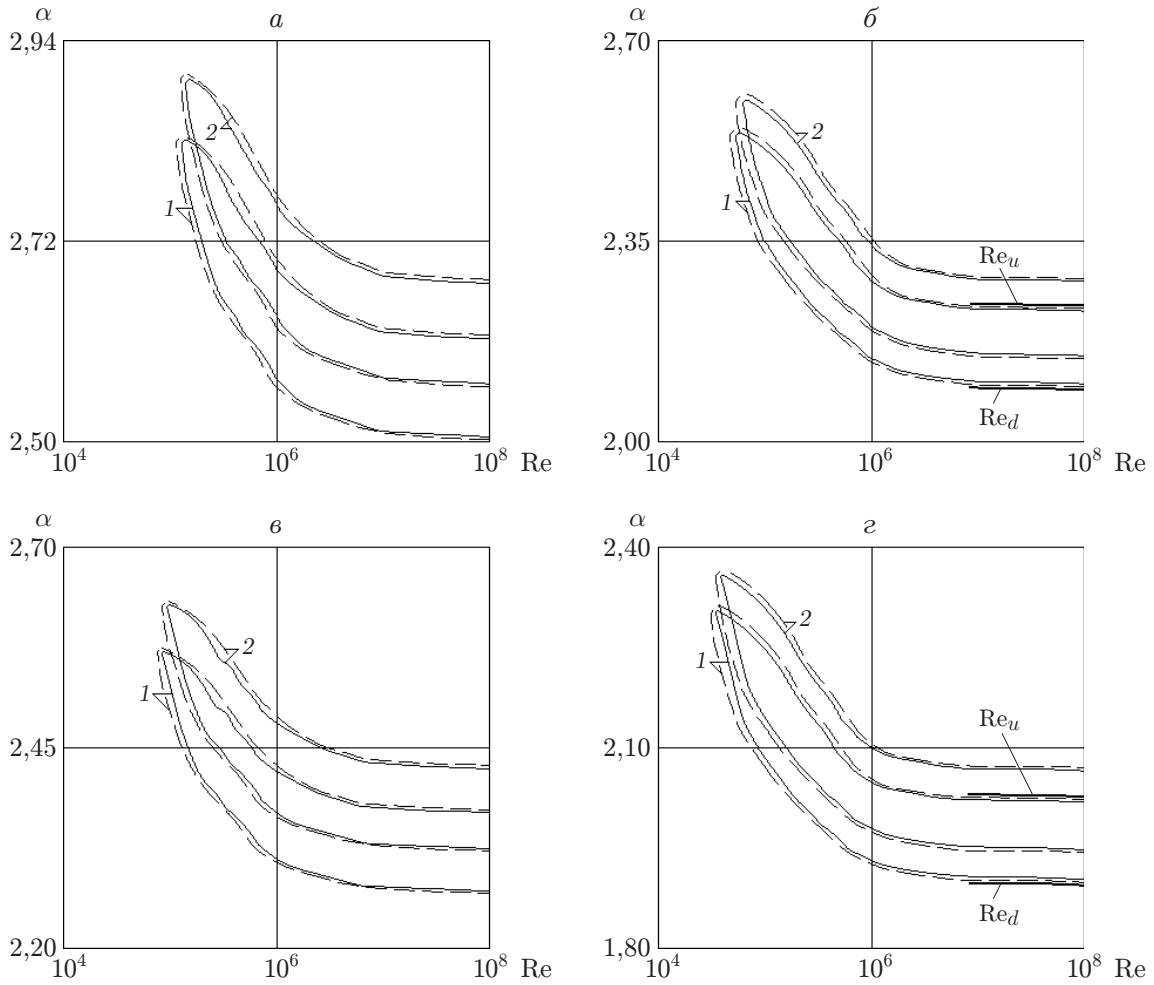
$$\text{Re}_u \sim \frac{T_s(0)}{256\alpha^{21}} 10^{15}.$$

**6. Численные расчеты нейтральных кривых.** Секулярное уравнение (50) имеет структуру, аналогичную структуре уравнений, рассматривавшихся, например, в работах [6, 10]. Левая “невязкая” часть (50) зависит от фазовой скорости  $c$  и волнового числа  $\alpha$ , правая “вязкая” часть выражается через табулированные функции переменной  $Z$  и также зависит от  $c$ . Поэтому координаты точки на кривых нейтральной устойчивости  $\text{Re}(\alpha, \gamma_v, M)$  на плоскости  $(\text{Re}, \alpha)$  рассчитывались в той же последовательности, что и в [6, 10].

Для фиксированных значений параметров режима (числа Маха  $M$  и степени колебательной неравновесности  $\gamma_v$ ) задавалось очередное значение фазовой скорости  $c$  в интервале  $c = [0; 1]$  с шагом  $\Delta c = 10^{-3}$ . Интеграл в правой части (50) рассчитывался по формуле Симпсона [16]. Действительные и мнимые значения правой части рассчитывались для  $Z = [0; 10]$  с помощью таблиц [6], для  $Z = [10; 50]$  — с помощью асимптотической формулы (52). В обоих случаях выбирался табличный шаг  $\Delta Z = 0,04$  [6].

После расчета массивов правой части вычислялись массивы левой части уравнения (50) для заданного значения  $c$  в зависимости от волнового числа  $\alpha = [1; 3]$  с шагом  $\Delta \alpha = 0,001$ . Рассчитанные массивы правой и левой частей сравнивались до получения равенства с точностью до  $10^{-8}$ , если оно достигалось при фиксированном значении  $c$ . Далее





Кривые нейтральной устойчивости  $Re(\alpha)$  для мод I ( $a, в$ ) и II ( $б, г$ ) при  $\tau = 1$ :  
 $a, б$  —  $M = 3$ ,  $в, г$  —  $M = 4$ ; штриховые линии — расчет по уравнению (50), сплошные — прямой численный расчет исходной спектральной задачи (3), (4); 1 —  $\gamma_v = 0$ , 2 —  $\gamma_v = 0,667$

расчет повторялся для очередного значения фазовой скорости. В результате были сформированы массивы значений волновых чисел  $\bar{\alpha}_k$ , фазовых скоростей  $\bar{c}_k$  и переменной  $\bar{Z}_k$ , соответствующие точкам на нейтральной кривой. С использованием формулы

$$Re_k(\bar{\alpha}_k) = \frac{\bar{Z}_k^3}{\bar{\alpha}_k} \left( \frac{3}{2} \int_0^{\bar{c}_k} \sqrt{\frac{\bar{c}_k - y}{T_s(y)}} dy \right)^{-2},$$

полученной путем замены независимой переменной в уравнении (15), вычислялись значения числа Рейнольдса  $Re_k$  на нейтральной кривой. Нейтральные кривые для мод I и II определяются по интервалам значений фазовой скорости на них. В случае  $\bar{c}_k \in (0,5; 1,0)$  точки принадлежат кривой нейтральной устойчивости моды I, в случае  $\bar{c}_k \in (0; 0,5)$  точки соответствуют кривой нейтральной устойчивости моды II.

На рисунке в полулогарифмических координатах приведены результаты расчетов кривых нейтральной устойчивости для совершенного и колебательно-возбужденного газа для чисел Маха  $M = 3, 4$  соответственно. В области  $Re \approx 10^8$  отмечены асимптотические значения для нижней  $Re_d$  и верхней  $Re_u$  ветвей нейтральной кривой. Видно, что при относи-

Критические значения чисел Рейнольдса  $Re_{cr}$  и волновых чисел  $\alpha_{cr}$  для мод I и II

$\gamma_v$	$Re_{cr}$						$\alpha_{cr}$					
	Расчет по уравнениям (3), (4)		Расчет по уравнению (50)		Расчет по уравнению (55)		Расчет по уравнениям (3), (4)		Расчет по уравнению (50)		Расчет по уравнению (55)	
	M = 3	M = 4	M = 3	M = 4	M = 3	M = 4	M = 3	M = 4	M = 3	M = 4	M = 3	M = 4
Мода I												
0	123 900	82 703	112 000	74 800	—	—	2,835	2,570	2,842	2,576	—	—
0,667	137 303	91 650	124 100	82 800	—	—	2,901	2,628	2,910	2,639	—	—
Мода II												
0	50 060	33 415	44 700	29 700	41 200	27 400	2,546	2,307	2,552	2,314	2,597	2,354
0,667	56 061	37 421	50 100	33 400	—	—	2,603	2,359	2,610	2,365	—	—

тельно небольших числах Маха асимптотические кривые удовлетворительно согласуются с результатами, полученными для исходной спектральной задачи. В частности, отчетливо виден диссипативный эффект колебательной релаксации.

Следует отметить, что при переходе к асимптотической теории расширяется область неустойчивости и уменьшаются критические числа Рейнольдса. Видно также, что предельные значения  $Re_d$  и  $Re_u$  хорошо согласуются с расчетными кривыми.

В таблице сравниваются критические значения числа Рейнольдса и волнового числа, полученные при численном решении исходной спектральной задачи (3), (4) и секулярного асимптотического уравнения (50). Видно, что для обеих мод значения  $Re_{cr}$ , вычисленные по асимптотической теории, приблизительно на 9 ÷ 10 % меньше соответствующих значений, полученных при численном решении спектральной задачи (3), (4). Отклонение значения  $Re_{cr}$ , полученного из решения упрощенной системы (54), находится в тех же пределах, что можно считать хорошим приближением, по крайней мере для совершенного газа.

**Заключение.** Для сверхзвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа построены асимптотические решения спектральной задачи линейной теории устойчивости. Исходная постановка рассматривалась для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка. Найденные решения универсальны для двумерных возмущений любых плоских сдвиговых течений молекулярных газов. В отсутствие возбуждения колебательных мод имеет место непрерывный переход к течению сжимаемого совершенного газа, устойчивость течения которого не исследовалась в рамках сверхзвуковой асимптотической теории.

В работе получено и решено секулярное уравнение для случая течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в области с двумя непроницаемыми границами. На основе решения секулярного уравнения построены асимптотические кривые нейтральной устойчивости данного течения, удовлетворительно согласующиеся с результатами прямого численного решения исходной спектральной задачи.

В работе получена система для упрощенного расчета критических чисел Рейнольдса, решения которой также удовлетворительно согласуются как с численными расчетами в полной постановке, так и с решениями асимптотического секулярного уравнения.

Расчеты, проведенные авторами данной работы в рамках построенной теории, подтверждают наличие в молекулярном газе диссипативного эффекта, обусловленного релаксацией колебательных мод, и завершают цикл исследований устойчивости сверхзвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа.

Авторы выражают благодарность С. А. Гапонову за плодотворную дискуссию, в частности, за предложенную идею перенормировки “вязких” решений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Линь Цзя-Цзяо.** Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. **Drazin P. G.** Hydrodynamic stability / P. G. Drazin, W. H. Reid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
3. **Гапонов С. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
4. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 2. Вязкая задача // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 2. С. 64–75.
5. **Гордиец Б. Ф.** Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры / Б. Ф. Гордиец, А. И. Осипов, Л. А. Шелепин. М.: Наука, 1980.
6. **Reshotko E.** Stability of the compressible laminar boundary layer: PhD thesis / California Inst. Technology. California, 1960.
7. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 57–73.
8. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 1. Невязкая задача // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 80–93.
9. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Критические числа Рейнольдса в сверхзвуковом течении Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 20–32.
10. **Dunn D. W., Lin C. C.** On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid // J. Aeronaut. Sci. 1955. V. 22, N 7. P. 455–477.
11. **Трикоми Ф.** Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
12. **Наймарк М. Н.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
13. **Тамаркин Я. Д.** О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пг.: Типография М. П. Фроловой, 1917.
14. **Фок В. А.** Проблемы дифракции и распространения радиоволн. М.: Сов. радио, 1970.
15. **Miles J. W.** The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. P. 593–610.
16. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 10/VII 2015 г.,  
в окончательном варианте — 21/XII 2015 г.*