

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О СИММЕТРИЧНОМ УДАРЕ ВОЛНОЙ ПО БАЛКЕ ЭЙЛЕРА

А. А. Коробкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Методом нормальных мод решена задача о симметричном ударе волной по балке Эйлера. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой. Исследуется начальная стадия удара, когда гидродинамические нагрузки очень высоки, а балка смочена только частично. Течение жидкости и размер смоченной части тела определяется с помощью подхода Вагнера одновременно с расчетом прогиба балки. Демонстрируются особенности разработанного численного алгоритма, указан критерий его устойчивости. Кроме непосредственного решения задачи, рассмотрены два приближенных подхода, в рамках которых размер области контакта определяется без учета деформаций пластины.

Введение. Рассматривается плоская нестационарная задача об ударе идеальной несжимаемой жидкостью по упругой пластине конечной длины. В начальный момент ($t' = 0$) слабоискривленная граница жидкости касается пластины в ее центре ($x' = 0, y' = 0$), скорость всех жидких частиц равна V и направлена по нормали к недеформированной поверхности пластины (рис. 1, а). Начальное положение свободной границы предполагается симметричным относительно оси Oy' . Нижняя сторона пластины плоская, поперечное сечение пластины не зависит от продольной координаты x' . Максимальная толщина пластины h предполагается намного меньше ее длины $2L$ и ширины плоской стороны b . Пластина шарнирно закреплена на концах, ее упругие деформации описываются уравнением Эйлера. В модели Эйлера только изгибающие напряжения в продольном направлении принимаются во внимание. Срезающие напряжения и напряжения в поперечном направлении предполагаются малыми. При $t' > 0$ происходит удар жидкостью по пластине. Ударная стадия, в течение которой гидродинамические нагрузки очень высоки, заканчивается в тот момент, когда пластина окажется полностью смоченной. Для слабоискривленной жидкой границы, что соответствует удару в мост катамарана достаточно длинной волной, продолжительность ударной стадии мала.

Гидродинамические нагрузки при ударе быстро нарастают со временем и затем затухают. Чтобы оценить длительность ударной стадии, заметим, что начальная форма свободной границы вблизи ее вершины может быть аппроксимирована параболической

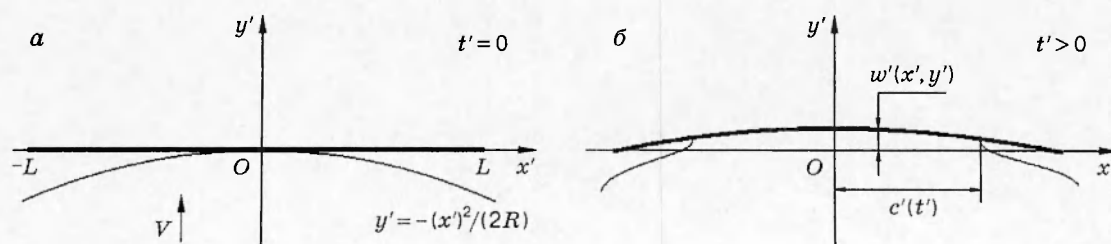


Рис. 1

$y' = -x'^2/(2R)$, где R — радиус кривизны невозмущенной жидкой границы в начале координат. Штрихом помечаются размерные переменные. Для слабоискривленной свободной границы отношение $\varepsilon = L/R$ мало. Пренебрегая деформацией жидкой границы при ударе и принимая вертикальную скорость волны постоянной, найдем, что пластина будет полностью смочена в момент T_1 , когда $-L^2/(2R) + VT_1 = 0$. Величина $T = L^2/(RV)$ принимается за масштаб времени при исследовании ударной стадии. Фактическая длительность стадии будет меньше за счет дополнительного подъема свободной границы навстречу пластине (рис. 1, б), но будет иметь тот же порядок, что и T .

Особенность задачи состоит в том, что изгиб упругой пластины вызывается гидродинамическими нагрузками, область приложения которых $-c'(t') < x' < c'(t')$ расширяется со временем, а их амплитуда сама зависит от упругих деформаций. Задача является связанной: течение жидкости и деформации тела в общем случае надо определять одновременно. В то же время надо определять и размер смоченной части тела, который является важной характеристикой процесса. Расчет функции $c'(t')$ связан со значительными трудностями и обычно проводится приближенно [1]. В настоящей работе предлагается метод одновременного расчета гидродинамических (поле скоростей и распределение давления), упругих (изгибающие напряжения и деформации) и геометрических (размер области контакта и форма свободной границы) характеристик удара упругих тел по жидкости.

Требуется определить деформацию упругой пластины, распределение изгибающих напряжений, распределение давления вдоль пятна контакта, а также положение точек контакта при следующих предположениях:

- 1) жидкость идеальная и несжимаемая;
- 2) течение жидкости плоское, потенциальное и симметричное относительно оси Oy' ;
- 3) начальный радиус кривизны свободной границы в точке контакта R намного больше, а максимальная толщина пластины h намного меньше длины пластины $2L$;
- 4) пластина моделируется балкой Эйлера, ее краевые точки шарнирно закреплены;
- 5) внешние массовые силы и силы поверхностного натяжения отсутствуют.

Масштабы изменения гидродинамических переменных выбираются такими же, как и для недеформируемой пластины: L — масштаб длины; V — масштаб скорости; VL — масштаб потенциала скоростей; $\rho VL/T$ — масштаб давления, где ρ — плотность жидкости; масштаб времени T определен выше. Масштаб упругих деформаций W заранее не фиксируется. Указания по его выбору даны ниже. Масштаб изгибающих напряжений в пластине принимается равным hEW/L^2 , где E — модуль Юнга. В дальнейшем используются безразмерные переменные, обозначения которых отличаются отсутствием штриха.

Постановка задачи. При анализе задачи удобно использовать такую подвижную деформированную систему координат x_1, y_1 , что $x_1 = x$, $y_1 = y + \varepsilon(x^2/2 - t)$, и представить потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$ в виде $\varphi(x, y, t) = y - t^2/2 + \varphi_1(x_1, y_1, t)$, где $\varphi_1(x_1, y_1, t)$ — потенциал возмущенного движения жидкости при ударе. В новой системе координат начальное положение свободной границы соответствует горизонтальной линии $y_1 = 0$, а положение упругой пластины описывается уравнением $y_1 = \varepsilon y_B(x_1, t)$, где $y_B(x_1, t) = x_1^2/2 + \varepsilon w(x_1, t) - t$, $\varepsilon = W/(L\varepsilon)$, функция $w(x, t)$ задает амплитуду упругого прогиба пластины в точке с координатой x в момент времени t . Уравнение движения жидкости и краевые условия принимают более сложный вид, однако нетрудно проверить, что все новые слагаемые в этих уравнениях, а также все нелинейные слагаемые имеют при себе коэффициент ε , что позволяет формально ими пренебречь при условии $\varepsilon \ll 1$. Отброшенные члены будут иметь порядок $O(\varepsilon)$ почти всюду, за исключением периферии области контакта, где необходимо строить «внутреннее» асимптотическое разложение решения с учетом нелинейных эффектов. С той же точностью краевые условия на границе жидкости могут быть линеаризованы и снесены на ее невозмущенный уровень $y_1 = 0$.

Движение жидкости в первом приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$ описывается почти всюду уравнением Лапласа для потенциала скоростей $\varphi_1(x_1, y_1, t)$ в нижней полуплоскости $y_1 < 0$, а деформация пластины — уравнением Эйлера относительно прогиба $w(x_1, t)$ [2]. Положение точек контакта задается в симметричном случае одной функцией $c(t)$. Несмотря на то, что уравнения движения и граничные условия линеаризованы, задача остается нелинейной, так как величина $c(t)$ заранее неизвестна. Последнее обстоятельство в основном и определяет трудности, которые возникают при исследовании соударения упругих тел с жидкостью. Ниже индекс 1 опускается. Так как отображение $(x, y) \leftrightarrow (x_1, y_1)$ является тождественным с точностью $O(\varepsilon)$, с которой решается задача, то отсутствие индекса не должно привести к недоразумению. Тождественность отображения в главном порядке при $\varepsilon \rightarrow 0$ означает, что при соударении слабоискривленных поверхностей наиболее важна величина зазора между ними в начальный момент, а не конкретные формы каждой из поверхностей [3].

Постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, 0, t) \quad (|x| < 1, t > 0); \quad (1)$$

$$w = w_{xx} = 0 \quad (x = \pm 1, t \geq 0); \quad (2)$$

$$w = w_t = 0 \quad (|x| \leq 1, t = 0); \quad (3)$$

$$p = -\varphi_t \quad (y \leq 0); \quad (4)$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (y < 0); \quad (5)$$

$$\varphi = 0 \quad (y = 0, |x| > c(t)); \quad (6)$$

$$\varphi_y = -1 + \varkappa w_t(x, t) \quad (y = 0, |x| < c(t)); \quad (7)$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty). \quad (8)$$

Здесь $p(x, y, t)$ — давление в жидкости; распределение изгибающих напряжений в балке $\sigma(x, t)$ принимается линейным по ее толщине и определяется в безразмерных переменных равенством $\sigma(x, t) = zw_{xx}(x, t)/2$, где переменная z меняется по толщине балки, $z = -1$ соответствует нижней смоченной стороне и $z = +1$ — ее верхней стороне в местах наибольшей толщины. При $w_{xx}(x, t) > 0$ верхняя сторона балки сжимается, а при $w_{xx}(x, t) < 0$ растягивается. Формула для давления (4) следует из линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа. Безразмерные параметры α, β в уравнении изгиба балки (1) и \varkappa в условии на пятне контакта (7) равны

$$\alpha = \frac{M_B}{\rho L} \varkappa, \quad \beta = \frac{EJ}{\rho L(RV)^2} \varkappa, \quad \varkappa = \frac{RW}{L^2}, \quad (9)$$

где M_B и J — масса балки единичной длины и момент инерции ее поперечного сечения, отнесенные к ширине нижней плоской стороны балки b . Масштаб упругих деформаций W удобно выбрать так, чтобы в (9) один из параметров был равен, а остальные два не превышали единицы. Например, в случае, рассмотренном в [4] для алюминиевого моста катамарана, принимается $L = 75$ см, $E = 7 \cdot 10^7$ Н/м², $J = 1,106 \cdot 10^{-5}$ м³, $M_B = 36,6$ кг/м², $V = 6$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м³, $R = 40$ м, $h = 12$ см. Тогда $\varkappa/\alpha = 20,5$, $\beta/\alpha = 0,3672$, и, следовательно, при любом выборе масштаба W будет $\beta < \alpha < \varkappa$. Выбираем W так, что $\varkappa = 1$, откуда $W = L^2/R$. При этом $\alpha = 4,88 \cdot 10^{-2}$, $\beta = 1,8 \cdot 10^{-2}$. Видно, что параметры α и β малы, они имеют тот же порядок малости, что и параметр линеаризации ε , который в данном случае равен 0,01875. Это указывает на возможность дальнейшего упрощения системы (1)–(8) с помощью методов асимптотического анализа. При других

условиях удара все три параметра могут иметь порядок единицы, поэтому ниже задача (1)–(8) рассматривается в предположении $\alpha = O(1)$, $\beta = O(1)$, $\varepsilon = O(1)$.

Задачу (1)–(8) следует дополнить двумя условиями, которые носят характер односторонних ограничений. Первое условие служит для нахождения функции $c(t)$ и требует непроникания жидких частиц, лежащих на свободной границе, за упругую поверхность. В симметричном случае это условие приводит к простому трансцендентному уравнению [5]

$$\int_0^{\pi/2} y_b[c(t) \sin \theta, t] d\theta = 0, \quad (10)$$

где функция $y_b(x, t)$ описывает форму упругой поверхности в подвижной, деформированной системе координат. В нашем случае $y_b(x, t) = x^2/2 - t + \varepsilon w(x, t)$ и (10) дает

$$t = c^2/4 + (2\varepsilon/\pi) \int_0^{\pi/2} w[c(t) \sin \theta, t] d\theta. \quad (11)$$

Можно показать, что уравнение (10) эквивалентно хорошо известному условию Вагнера [6] в задаче об ударе тупым телом по свободной поверхности жидкости. Однако последнее приводит к сингулярному интегральному уравнению относительно функции $c(t)$. Решение такого уравнения сопряжено с большими вычислительными трудностями даже для случая недеформируемого тела. Поэтому в рамках линеаризованной модели (1)–(8) размер смоченной части твердой поверхности обычно определяется приближенно [1].

Второе условие заключается в том, что давление в области контакта не может быть ниже предельного значения p_* . В точках области контакта, где давление падает до предельного значения, жидкость отслаивается от упругой поверхности с образованием каверн, заполненных парами жидкости. Кавитационные явления при ударе упругих тел о воду действительно наблюдаются в экспериментах [7] и могут существенно изменить распределение гидродинамических нагрузок и характер деформаций. Однако решение задач соударения при наличии неизвестных «внутренних» свободных границ представляет большие трудности. Поэтому предлагается другой подход, в рамках которого условие на допустимое нижнее значение давления опускается, но величина давления в области контакта контролируется в ходе счета. Предполагается, что $p_* = 0$. Если давление отрицательное на значительной части области контакта, то дальнейшие результаты расчетов рассматриваются как неадекватные. Этот подход основан на предположении, что непосредственно после момента удара давление на пятне контакта положительное и может стать отрицательным в дальнейшем только за счет упругих эффектов. Положения точек, в которых давление впервые становится меньше нуля, и скорости расширения областей отрицательных давлений представляют несомненный интерес и могут быть полезными при построении усложненных моделей, учитывающих кавитационные явления.

Метод нормальных мод. Численное исследование задачи (1)–(8), (11) основано на методе нормальных мод. Согласно этому методу, прогиб балки разыскивается в виде

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n(x), \quad (12)$$

где $\psi_n(x)$ — нетривиальные решения однородной краевой задачи

$$\frac{d^4 \psi_n}{dx^4} = \lambda_n^4 \psi_n \quad (-1 < x < 1); \quad (13)$$

$$\psi_n = \frac{d^2 \psi_n}{dx^2} = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (14)$$

(λ_n — соответствующие собственные числа). Собственные функции $\psi_n(x)$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_{-1}^1 \psi_n(x)\psi_m(x) dx = \delta_{nm}, \quad (15)$$

где $\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$ и $\delta_{nn} = 1$. В общем случае вид функций $\psi_n(x)$ достаточно громоздкий, однако при симметричной внешней нагрузке и шарнирно закрепленных концах балки уравнения (13)–(15) приводят к простым соотношениям $\psi_n(x) = \cos \lambda_n x$, $\lambda_n = \pi(n - 1/2)$. Обобщенные координаты мод $a_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ удобно принять в качестве новых искомым функций и выразить через них все остальные величины.

На участке жидкой границы $-1 < x < 1$, $y = 0$, который охватывает пятно контакта, потенциал скоростей и распределение давления можно представить в виде

$$\varphi(x, 0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\psi_n(x), \quad p(x, 0, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t)\psi_n(x). \quad (16)$$

$$b_n(t) = \int_{-c(t)}^{c(t)} \varphi(x, 0, t)\psi_n(x) dx, \quad (17)$$

как это следует из (4), (6) и (15). Точкой обозначается производная по времени. Чтобы найти зависимости $b_m(t)$ от обобщенных координат $a_n(t)$, где $m, n = 1, 2, \dots$, рассмотрим гидродинамическую часть задачи (1)–(8) отдельно.

Определим новые, гармонические в нижней полуплоскости, функции $\varphi_n(x, y, c)$ как решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = 0 \quad (y < 0); \quad (18)$$

$$\varphi_n = 0 \quad (y = 0, |x| > c(t)); \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = \psi_n(x) \quad (y = 0, |x| < c(t)); \quad (20)$$

$$\varphi_n \rightarrow 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \quad (21)$$

с интегрируемыми особенностями первых производных вблизи точек смены вида граничного условия, $x = \pm c$. Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$, $\psi_0(x) \equiv 1$. Учитывая, что при известной функции $c(t)$ задачи (1)–(8) и (18)–(21) являются линейными, и сравнивая краевые условия (7) и (20), получаем

$$\varphi(x, 0, t) = -\varphi_0(x, 0, c) + \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t)\varphi_n(x, 0, c), \quad b_m(t) = -f_m(c) + \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t)S_{nm}(c). \quad (22)$$

Здесь

$$f_m(c) = \int_{-c}^c \varphi_0(x, 0, c)\psi_m(x) dx, \quad S_{nm}(c) = \int_{-c}^c \varphi_n(x, 0, c)\psi_m(x) dx. \quad (23)$$

Важно отметить, что матрица S с элементами $S_{nm}(c)$, $m, n = 1, 2, \dots$ является симметричной, что следует из (20), (23) и второй интегральной теоремы Грина, и зависит только от размера пятна контакта c . Известно [8], что $\varphi_0(x, 0, c) = \sqrt{c^2 - x^2}$, $|x| < c$, откуда $f_m(c) = \pi c^2 J_1(\lambda_m c)/(\lambda_m c)$ в случае шарнирно закрепленной балки.

Подставляя представления для прогиба (12) и гидродинамического давления (16) в уравнение балки (1) и принимая во внимание условие ортогональности (15), уравнение (13) и формулу (22), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = (\alpha I + \varkappa S)^{-1}(\beta D\mathbf{d} + \mathbf{f}); \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{d}}{dt} = -\mathbf{a}. \quad (25)$$

Здесь $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)^T$; \mathbf{d} — вспомогательный вектор, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, \dots)^T$, $d_n = (\beta\lambda_n^4)^{-1}(\alpha\dot{a}_n + b_n)$; $\mathbf{f} = (f_1(c), f_2(c), f_3(c), \dots)^T$; I — единичная матрица; D — диагональная матрица, $D = \text{diag}\{\lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4, \dots\}$. В системе (24), (25) правые части зависят от \mathbf{a} , \mathbf{d} , c , но не от t . Поэтому удобно выбрать величину c за новую независимую переменную, $0 \leq c \leq 1$. Дифференциальное уравнение для $t = t(c)$ следует из (11), если продифференцировать последнее по c

$$\frac{dt}{dc} = Q(c, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}), \quad (26)$$

где

$$Q(c, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \frac{c + (4\varkappa/\pi)(\mathbf{a}, \Gamma_c(c))}{2 - (4\varkappa/\pi)(\dot{\mathbf{a}}, \Gamma(c))}. \quad (27)$$

Здесь (\mathbf{a}, \mathbf{b}) — скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ; $\Gamma(c) = (\Gamma_1(c), \Gamma_2(c), \dots)$; $\Gamma_c(c) = (\Gamma_{1c}(c), \Gamma_{2c}(c), \Gamma_{3c}(c), \dots)$,

$$\Gamma_n(c) = \int_0^{\pi/2} \psi_n(c \sin \theta) d\theta, \quad \Gamma_{nc}(c) = \int_0^{\pi/2} \psi'_n(c \sin \theta) \sin \theta d\theta.$$

Умножая каждое уравнение системы (24), (25) на dt/dc и учитывая (26), находим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dc} = \mathbf{F}(c, \mathbf{d})Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{d})); \quad (28)$$

$$\frac{d\mathbf{d}}{dc} = -\mathbf{a}Q(c, \mathbf{a}, \mathbf{F}(c, \mathbf{d})). \quad (29)$$

Здесь $\mathbf{F}(c, \mathbf{d}) = (\alpha I + \varkappa S(c))^{-1}(\beta D\mathbf{d} + \mathbf{f}(c))$. Система (26)–(29) решается численно при нулевых начальных условиях

$$\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{d} = 0, \quad t = 0 \quad (c = 0). \quad (30)$$

Выбор в качестве новой независимой переменной величины c представляется достаточно естественным, так как он соответствует структуре системы (24), (25). Введение новых искомым функций $d_n(t)$ вместо производных $\dot{a}_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ решает проблему с началом численного счета: правые части в системе (26), (28), (29) равны нулю при $c = 0$. Если же решать задачу в исходных переменных, то возникают трудности с началом счета, для преодоления которых приходится использовать искусственные методы [4, 9]. Причина заключается в том, что при малых временах $c(t) = O(\sqrt{t})$, $w(x, t) = O(t^{3/2})$, $w_t = O(\sqrt{t})$, $w_{tt} = O(t^{-1/2})$, т. е. в начале удара, пятно контакта расширяется с очень большой скоростью, а ускорения элементов упругой поверхности неограничены. С другой стороны, $t = O(c^2)$, $w = O(c^3)$, $w_t = O(c)$, $w_{tt} = O(c^{-1})$, но $d_n = O(c^5)$ при $c \rightarrow 0$. Видно, что новые искомые величины, рассматриваемые как функции от c , растут на начальном этапе

очень плавно. В ходе решения задачи Коши (26)–(30) производные $\dot{a}_n(t)$ определяются по формуле (24).

Замена $t \rightarrow c$ оправдана только при условии $dt/dc > 0$, которое заведомо выполняется при малых c . В численных расчетах знак правой части в (26) следует контролировать и останавливать счет, если $Q = 0$, что соответствует бесконечно большой скорости расширения смоченной части тела. Неограниченный рост производной dt/dc означает, что скорость точек контакта замедляется и может изменить свое направление. При этом размер области контакта будет уменьшаться, что указывает на частичный выход тела из воды. Оба случая, $dt/dc \rightarrow 0$ и $dt/dc \rightarrow \infty$, представляют несомненный интерес в связи с исследованием влияния упругих эффектов на процесс удара по поверхности жидкости.

При численном решении задачи Коши (26)–(30) удерживается конечное число нормальных мод N , полагается $a_n \equiv 0$, $d_n \equiv 0$ при $n \geq N + 1$. Сравнивая результаты расчетов, проведенных при различных N , можно сделать вывод о числе мод, достаточном для вычисления прогиба балки, скорости ее элементов и распределения изгибающих напряжений. Для каждой из перечисленных характеристик число мод, позволяющее вычислить ее с требуемой точностью, будет своим. Давление в области контакта рассчитать по методу нормальных мод, строго говоря, нельзя.

Чтобы пояснить последнее утверждение и дать указания по выбору величины N , рассмотрим гидродинамическую часть исходной задачи отдельно. Решение задачи для уравнения Лапласа (5) в нижней полуплоскости со смешанными краевыми условиями (6), (7) позволяет определить горизонтальную составляющую скорости жидкости вдоль пятна контакта [10]

$$\varphi_x(x, 0, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \text{V.p.} \int_{-c}^c \frac{\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma - x} \varphi_y(\sigma, 0, t) d\sigma \quad (-c < x < c). \quad (31)$$

Символ «V.p.» означает, что интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Производная $\varphi_x(x, 0, t)$ имеет интегрируемые особенности вблизи точек контакта. С учетом разложения

$$\frac{\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma - x} = -\frac{\sigma}{\sqrt{c^2 - \sigma^2}} - \frac{x}{\sqrt{c^2 - \sigma^2}} + \frac{c^2 - x^2}{(\sigma - x)\sqrt{c^2 - \sigma^2}}$$

и четности вертикальной компоненты скорости $\varphi_y(x, 0, t)$ по x формула (31) может быть представлена в виде

$$\varphi_x(x, 0, t) = -\frac{x}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \int_{-c}^c \frac{\varphi_y(\sigma, 0, t)}{\sqrt{c^2 - \sigma^2}} d\sigma + \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \text{V.p.} \int_{-c}^c \frac{\varphi_y(\sigma, 0, t)}{(\sigma - x)\sqrt{c^2 - \sigma^2}} d\sigma. \quad (32)$$

В области контакта производная $\varphi_y(x, 0, t)$ ограничена, поэтому второй интеграл в (32) принимает конечные значения при $-c \leq x \leq c$. В частности, при $x \rightarrow c - 0$ из (32) следует асимптотическая формула

$$\varphi_x(x, 0, t) = -\frac{2x}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \int_0^{\pi/2} \varphi_y(c \sin \theta, 0, t) d\theta + O(\sqrt{c^2 - x^2}) \quad (-c < x < c) \quad (33)$$

с выделенной особой частью. Интеграл в (33) вычисляется с помощью условия (7) и представления (12)

$$\int_0^{\pi/2} \varphi_y(c \sin \theta, 0, t) d\theta = -\frac{\pi}{2} + \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \Gamma_n(c),$$

его значение с точностью до постоянного множителя совпадает со знаменателем в (27). Это означает, что особенность горизонтальной составляющей скорости жидких частиц вблизи точек контакта пропадает при $Q \rightarrow \infty$, т. е. когда смоченная часть тела начинает уменьшаться.

Асимптотическая формула (33) принимает вид

$$\varphi_x(x, 0, t) = A(t) \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} + O(\sqrt{c^2 - x^2}), \quad A(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \Gamma_n(c).$$

Аналогично для потенциала скоростей и распределения давления в области контакта имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0, t) &= -A(t) \sqrt{c^2 - x^2} + O([c^2 - x^2]^{3/2}), \\ p(x, 0, t) &= \frac{c \dot{c} A(t)}{\sqrt{c^2 - x^2}} + O([c^2 - x^2]^{1/2}) \quad (-c < x < c). \end{aligned} \tag{34}$$

Выделенная особенность потенциала скоростей позволяет найти асимптотическое поведение функций $b_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Подставляя (34) в (17), получаем

$$b_n(t) = -A(t) \int_{-c}^c \sqrt{c^2 - x^2} \psi_n(x) dx + \dots$$

Отброшенные слагаемые представляют собой интегралы от более гладких функций и, следовательно, дают вклад более высокого порядка малости при $n \rightarrow \infty$. Для шарнирно закрепленной балки

$$b_n(t) = -A(t) f_n(c) [1 + o(1)] \tag{35}$$

и $b_n(t) = O(n^{-3/2})$ при $n \rightarrow \infty$. Можно показать, что последние асимптотические формулы справедливы при любом закреплении концов балки. Дифференцируя (35) по t , найдем $\dot{b}_n(t) = O(n^{-1/2})$ при $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, ряд для давления в (16) сходится лишь условно. Поэтому определить давление в рамках метода нормальных мод достаточно трудно.

В то же время давление является важной характеристикой процесса удара. Если в ходе расчетов выяснится, что на большей части пятна контакта давление отрицательное, то дальнейшие вычисления нельзя считать соответствующими реальной ситуации. В этом случае надо принимать во внимание кавитационные явления. Для вычисления распределения давления вдоль пятна контакта предлагается следующий подход: сначала вычисляется потенциал скоростей на смоченной части пластины с помощью (16), причем асимптотическая формула (35) используется для улучшения сходимости ряда; давление затем вычисляется с помощью численного дифференцирования по t с учетом интеграла Коши — Лагранжа (4) и асимптотической формулы (34).

Метод численного решения задачи. Уравнение Эйлера (1) с учетом (12)–(15) дает

$$\alpha \ddot{a}_n + \beta \lambda_n^4 a_n = \int_{-1}^1 p(x, 0, t) \psi_n(x) dx. \tag{36}$$

Если правые части в (36), где $n = 1, 2, 3, \dots$, известны, то каждое из уравнений описывает вынужденные колебания системы, у которой период собственных колебаний равен $t_n = 2\pi \lambda_n^{-2} (\alpha/\beta)^{1/2}$. При численном решении (36) для $n = N$ шаг по времени Δt , следовательно, должен быть намного меньше, чем t_N . С ростом N величина t_N быстро убывает, $t_N = O(N^{-2})$ при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, число уравнений, удерживаемых в системе

(26)–(29) при ее численном анализе, не может быть произвольно велико. Из (26) следует, что шаг по c должен быть порядка $\Delta c = \min(1/Q)\Delta t$, где число $\min(1/Q)$ само зависит от решения и заранее неизвестно. Естественным было бы численное решение системы (26)–(29) с переменным шагом по c , который определяется по значению правой части в (26) на предыдущем шаге. Заметим, что случай $Q \rightarrow 0$ не приводит к уменьшению шага по c .

Однако более распространенными являются численные схемы с постоянным шагом по независимой переменной. При постоянной скорости удара, а здесь рассматривается только этот случай, трудно ожидать, что смоченная часть тела после ее начального роста будет уменьшаться. Для оценки величины $\min(1/Q)$ примем $c(t) \approx c_r(t)$, где $c_r(t)$ — размер смоченной части пластины без учета упругих деформаций. Известно [6], что $c_r(t) = 2t^{1/2}$. Отсюда $Q = c/2$ и $\min(1/Q) = 2$ при $0 \leq c \leq 1$. Полагаем $\Delta c = \Delta t$, тогда даже при уменьшении скорости расширения области контакта в два раза условие на шаг Δc выполнено. Если $\dot{c}(t) > \dot{c}_r(t)$, то это условие будет выполнено тем более.

Задача Коши (26)–(30), в которой удерживается N нормальных мод, $a_n \equiv 0$, $d_n \equiv 0$ при $n \geq N + 1$, решается численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с шагом $\Delta c = 0,01 \cdot 2^{-M}$, где M такое целое число, что $\Delta c \leq t_N/L_*$ и $M \geq 1$. Величина L_* равна числу точек, которые надо равномерно распределить на интервале $(0, 2\pi)$ для представления с достаточной точностью функции $\sin x$ ее значениями в этих точках; приближенное значение функции между опорными точками определяется по методу квадратичной интерполяции. В расчетах полагалось $L_* = 40, 20, 10, 5$. Если из практических соображений принять, что Δc не может быть меньше чем 10^{-4} , то предельное число мод N_+ таково, что

$$\lambda_{N_+} \leq 100(2\pi/L_*)^{1/2}(\alpha/\beta)^{1/4}. \quad (37)$$

Например, в расчетах [4], где $\alpha = 4,88 \cdot 10^{-2}$, $\beta = 1,8 \cdot 10^{-2}$, имеем $N_+ = 32$ при $L_* = 10$. Число N_+ увеличивается при уменьшении шага Δc и/или значения L_* , но точность расчетов при этом может ухудшаться. Из (37) следует, что проведение численных расчетов при малых α (удар волной по пластине из легкого материала или малой толщины) неэффективно. Но это противоречит тому, что система (26)–(29) при $\alpha = 0$ не является вырожденной, если $c > 0$. Здесь ограничимся физическим объяснением этого противоречия. При $\alpha = 1$ параметр α равен $M_B/(\rho L)$ и пропорционален отношению полной массы балки к присоединенной массе ее высокочастотных колебаний на поверхности жидкости. Для легких пластин ($\alpha \ll 1$) присоединенная масса более важна, чем их собственная масса, и, следовательно, форма уравнений (36) не соответствует физике процесса. В этом случае надо явно учитывать зависимость правых частей в (36) от обобщенных координат и их производных. Условие (37) теряет силу для пластин из легких материалов. При $\alpha \ll 1$ и малых c необходим асимптотический анализ исходной задачи (1)–(8). В общем случае условие (37) является достаточным, но не необходимым.

Условие (37) накладывает ограничение на максимальное число мод, которое можно удержать в системе (26)–(29). Однако число мод не может быть малым, оно должно быть достаточным для представления прогиба и напряжений в балке с хорошей точностью. Асимптотическое поведение обобщенных координат $a_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $t > 0$ определяется гладкостью распределения давления по пластине как функции переменных x и t . Согласно (34), главный член асимптотики давления по гладкости имеет вид

$$p(x, 0, t) = \frac{G(t)}{\sqrt{c^2 - x^2}} H(c^2 - x^2) + \dots, \quad (38)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, $G(0) \neq 0$, $c(t) = O(t^{1/2})$ при $t \rightarrow 0$. Предполагается, что $G(t)$ и $c(t)$ — гладкие функции при $t > 0$. Главный член асимптотики в (38) имеет тот

же вид, что и в случае недеформируемой пластины, но функции $G(t)$ и $c(t)$ в (38) заранее неизвестны. Для неупругой пластины имеем $G(t) = 2$, $c(t) = 2\sqrt{t}$ [6]. Обозначим правую часть в (36) через $\alpha p_n(t)$. Решение уравнения (36) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$a_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \operatorname{Im} \left[\exp(i\omega_n t) \int_0^t p_n(\tau) \exp(-i\omega_n \tau) d\tau \right], \quad (39)$$

где $\omega_n^2 = \beta \lambda_n^4 / \alpha$. Разобьем интервал интегрирования в (39) на две части $(0, \varepsilon_n)$ и (ε_n, t) , где $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\omega_n \varepsilon_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и рассмотрим сначала первый интеграл. При малых временах ($0 < \tau < \varepsilon_n$) упругостью пластины можно пренебречь, что дает

$$\int_0^{\varepsilon_n} p_n(\tau) \exp(-i\omega_n \tau) d\tau \sim 2\pi \int_0^{\varepsilon_n} J_0(2\lambda_n \sqrt{\tau}) \exp(-i\omega_n \tau) d\tau$$

при больших n . Замена переменной интегрирования $\tau = \sigma / \omega_n$ позволяет переписать последнее соотношение в более удобном виде

$$\int_0^{\varepsilon_n} p_n(\tau) \exp(-i\omega_n \tau) d\tau \sim \frac{2\pi}{\omega_n} \int_0^{\varepsilon_n \omega_n} J_0(\mu \sqrt{\sigma}) \exp(-i\sigma) d\sigma,$$

где $\mu = 2(\alpha/\beta)^{1/2}$. Последний интеграл имеет конечный предел при $\varepsilon_n \omega_n \rightarrow \infty$, откуда

$$\int_0^{\varepsilon_n} p_n(\tau) \exp(-i\omega_n \tau) d\tau \sim \frac{2\pi}{\omega_n} \exp[i(\mu^2/4 - \pi/2)] \quad (n \rightarrow \infty).$$

Таким образом, вклад начального этапа удара, $t \ll 1$, в асимптотику коэффициентов $a_n(t)$ имеет порядок $O(n^{-4})$ при $n \rightarrow \infty$. Соответственно, $\dot{a}_n(t) = O(n^{-2})$ и $\ddot{a}_n(t) = O(1)$, как это следует из (39).

Прежде чем приступить к анализу интеграла в (39) на интервале (ε_n, t) , заметим, что асимптотика коэффициентов $p_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ определяется главным членом в формуле (38):

$$p_n(t) \sim 2\pi G(t) J_0[\lambda_n c(t)].$$

При $t > \varepsilon_n$ имеем $\lambda_n c(t) > \lambda_n c(\varepsilon_n)$, где $c(\varepsilon_n) \sim 2\sqrt{\varepsilon_n}$ для $\varepsilon_n \ll 1$. Отсюда следует, что $\lambda_n c(\varepsilon_n) = O(\sqrt{\varepsilon_n \omega_n})$ и стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь асимптотическим разложением функции Бесселя $J_0(x)$ при больших значениях аргумента, найдем

$$p_n(t) \sim \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda_n c}} G(t) \cos(\lambda_n c(t) - \pi/4),$$

$$\int_{\varepsilon_n}^t p_n(\tau) \exp(-i\omega_n \tau) d\tau \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} \left\{ \exp(-i\pi/4) \int_{\varepsilon_n}^t \frac{G(\tau)}{\sqrt{c(\tau)}} \exp(i[\lambda_n c(\tau) - \omega_n \tau]) d\tau + \right. \\ \left. + \exp(i\pi/4) \int_{\varepsilon_n}^t \frac{\tilde{G}(\tau)}{\sqrt{c(\tau)}} \exp(-i[\lambda_n c(\tau) + \omega_n \tau]) d\tau \right\}.$$

Ограничимся анализом первого интеграла

$$I_n(t) = \int_{\varepsilon_n}^t \frac{G(\tau)}{\sqrt{c(\tau)}} \exp(-i[\omega_n \tau - \lambda_n c(\tau)]) d\tau$$

для $n \rightarrow \infty$, второй интеграл рассматривается аналогично. Чтобы определить порядок малости $I_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $t > \varepsilon_n > 0$, воспользуемся интегрированием по частям. Имеем

$$I_n(t) = i \left[\frac{G(\tau)\sqrt{c(\tau)}}{c(\tau)\omega_n - \dot{c}c\lambda_n} \exp(-i[\omega_n\tau - \lambda_n c(\tau)]) \right]_{\varepsilon_n}^t - \\ - i \int_{\varepsilon_n}^t \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{G(\tau)\sqrt{c(\tau)}}{c(\tau)\omega_n - \dot{c}c\lambda_n} \right\} \exp(-i[\omega_n\tau - \lambda_n c(\tau)]) d\tau.$$

Здесь интегральное и внеинтегральное слагаемые при $\tau = \varepsilon_n$ имеют одинаковый порядок $O(\omega_n^{-1}\varepsilon_n^{-1/4})$, при $\tau = t$ порядок внеинтегрального слагаемого равен $O(\omega_n^{-1})$. Следовательно, $I_n(t) = O(n^{-2+\gamma})$ при $n \rightarrow \infty$, про число γ известно только, что оно положительно и не превышает 0,5. В результате получим

$$a_n(t) \sim -\frac{\pi\mu^2}{2\lambda_n^4} \cos\left(\omega_n t + \frac{1}{4}\mu^2\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (40)$$

Асимптотическое поведение обобщенных координат $a_n(t)$ при больших номерах определяется условиями начала удара, когда особенности давления в точках контакта сливаются, а само давление неограничено, как это следует из (38). Заметим, что порядок малости при $n \rightarrow \infty$ следующего слагаемого в асимптотической формуле (40) превышает порядок главного члена незначительно, поэтому с точки зрения практических вычислений формула (40) не может быть использована для улучшения сходимости ряда (12). Так как требуется определить не только прогиб пластины, но и скорости ее точек и изгибающие напряжения, ряды для которых сходятся достаточно медленно в силу (40), то число мод N , удерживаемых в системе (26)–(30), должно быть достаточно велико, но не больше N_+ , определяемого неравенством (37). Расчеты проводятся при различных значениях N с целью установить сходимость численного решения с ростом N .

Задача Коши (26)–(30) решается методом Рунге — Кутты с постоянным шагом по c . На каждом шаге необходимо вычислять элементы матрицы S , определяемые формулой (23). Сама возможность решения исходной задачи методом нормальных мод во многом определяется тем, насколько эффективно и быстро могут быть вычислены функции $S_{nm}(c)$, $0 < c \leq 1$. Оказывается, что эти функции могут быть выражены с помощью функций Бесселя нулевого и первого порядков

$$S_{nm}(c) = \frac{\pi c}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} [\lambda_n J_0(\lambda_m c) J_1(\lambda_n c) - \lambda_m J_0(\lambda_n c) J_1(\lambda_m c)] \quad (n \neq m), \\ S_{nn}(c) = \frac{\pi}{2} c^2 [J_0^2(\lambda_n c) + J_1^2(\lambda_n c)]. \quad (41)$$

Полиномиальные аппроксимации для функций Бесселя с точностью до 10^{-7} хорошо известны [11], поэтому необходимость многократных вычислений матрицы S не накладывает существенных ограничений на число удерживаемых мод. Интересно отметить, что все элементы матрицы S с конечными номерами имеют одинаковое асимптотическое поведение при малых c , а именно $S_{nm}(c) \sim \pi c^2/4$ при $c \rightarrow 0$.

Численные результаты. Чтобы продемонстрировать особенности предложенного алгоритма, система (26)–(29) решалась численно при следующих значениях параметров: $L = 0,5$ м, $R = 10$ м, $h = 2$ см, $E = 21 \cdot 10^{10}$ Н/м², $V = 3$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м³, $\rho_b = 7850$ кг/м³, $b = 0,5$ м. Здесь ρ_b — плотность материала пластины, b — ширина пластины. Полная масса пластины размером $1 \times 0,5$ м и толщиной 2 см равна 78,5 кг и совпадает по величине с M_B . При $\varkappa = 1$ имеем $\alpha = 0,314$, $\beta = 0,311$. Масштаб прогиба

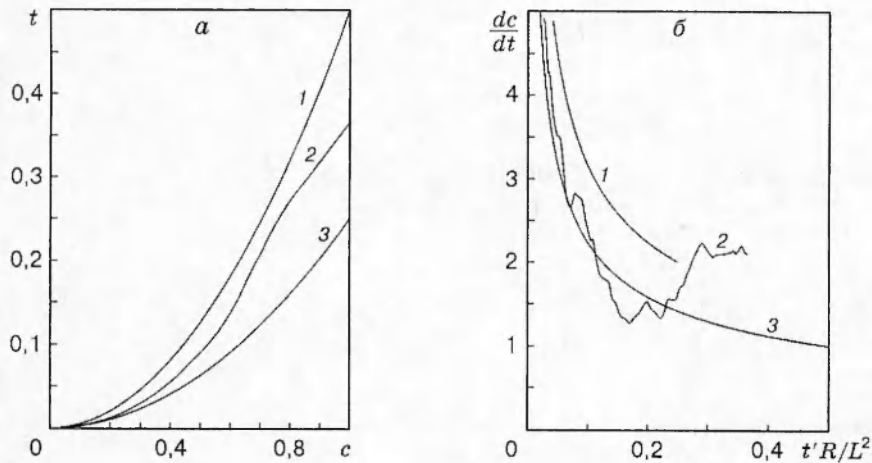


Рис. 2

равен 2,5 см, напряжений в пластине — 420 Н/мм², давления — 0,18 Н/мм², времени — 0,008 с. Пластина с указанными параметрами, но меньшей толщины использовалась в экспериментах [7] по исследованию влияния упругих свойств тела на процесс его удара о воду. Условия экспериментов отличались от описанных выше. В частности, в эксперименте толщина пластины была 8 мм. При такой толщине величины α и β оказываются сравнимыми с параметром линеаризации $L/R = 0,05$ и задача (1)–(8) может быть исследована с помощью асимптотических методов.

Кроме непосредственного решения задачи (1)–(8), рассмотрены два приближенных подхода, в рамках которых функция $c(t)$ определялась без учета деформаций пластины. В первом подходе (подход Вагнера) деформация свободной границы жидкости при ударе учитывалась, во втором (подход Кармана) — нет. В подходе Кармана точки контакта совпадают с точками пересечения недеформируемой пластины, $y = 0$, $-1 < x < 1$, с движущейся недеформируемой границей жидкости, $y = \varepsilon(-x^2/2 + t)$. Отсюда $c_K(t) = (2t)^{1/2}$, где $x = \pm c_K(t)$ задает положение точек пересечения. В рамках подхода Вагнера положение точек контакта, $x = \pm c_W(t)$, определяется уравнением (11), где в случае недеформируемой пластины надо положить $w(x, t) \equiv 0$. Отсюда $c_W(t) = 2t^{1/2}$. Оба приближенных подхода требуют решения задачи Коши (26)–(30), где вместо (27) надо положить $Q = c/2$ для подхода Вагнера и $Q = c$ для подхода Кармана. Величины, рассчитанные в рамках приближенного подхода Вагнера, помечаются индексом W и в рамках подхода Кармана — индексом K.

Основные расчеты проведены при $L_* = 20$, $N = 15$. Длительность этапа t_* , на котором пластина смочена только частично, $c(t_*) = 1$, найдена равной 0,36544. Укажем для сравнения, что $t_{*W} = 0,25$, $t_{*K} = 0,5$. Видно, что длительность рассматриваемого этапа для упругой пластины примерно в 1,5 раза больше, чем для недеформируемой. Упругость пластины ведет к увеличению длительности ударной стадии. Максимальные отклонения функции $t(c)$, $0 \leq c \leq 1$, рассчитанной для $N = 1, 5, 10$, от ее значений при $N = 15$ меньше чем $1,8 \cdot 10^{-2}$; $1,1 \cdot 10^{-4}$; $2,1 \cdot 10^{-5}$ соответственно. Функции $t_K(c)$, $t(c)$ и $t_W(c)$ (кривые 1–3) показаны на рис. 2, а. Видно, что $c_K(t) < c(t) < c_W(t)$. При малых t функции $c(t)$ и $c_W(t)$ близки друг к другу, что указывает на возможность пренебречь упругостью пластины на начальной стадии удара. Скорость точки контакта $\dot{c}(t)$ вычислена при различном количестве удерживаемых мод N . Максимальные отклонения функции $\dot{c}(t)$, рассчитанной для $N = 1, 5, 10$, от ее значений, рассчитанных для $N = 15$, меньше чем 0,53; 0,12 и 0,03 соответственно. Вычисление скорости $\dot{c}(t)$ требует большего числа мод, чем вычисление

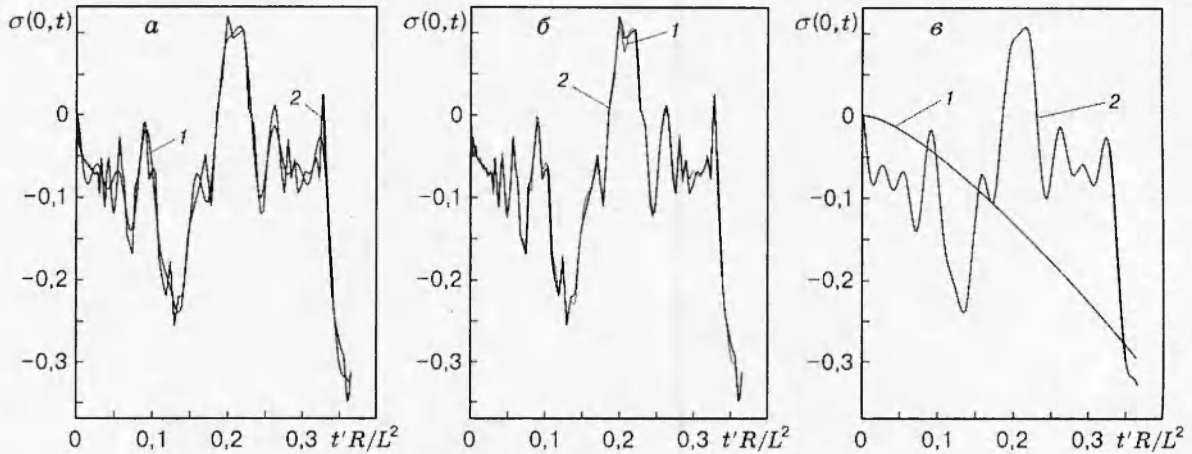


Рис. 3

функции $c(t)$. Функции $\dot{c}_W(t)$, $\dot{c}(t)$ и $\dot{c}_K(t)$ (кривые 1–3) показаны на рис. 2,б. Заметим, что скорость точки контакта стремится к бесконечности при $t \rightarrow 0$. Начальный интервал, на котором скорость точек контакта не зависит от упругих свойств пластины, очень мал. Интересно отметить, что $\dot{c}(t)$ близко к $\dot{c}_K(t)$ на начальном этапе. Эволюция изгибающих напряжений в центре пластины показана на рис. 3,а для $N = 5, 15$ (кривые 1, 2), на рис. 3,б для $N = 10, 15$ (кривые 1, 2) и на рис. 3,в для $N = 1, 5$ (кривые 1, 2). Максимальные по модулю напряжения достигаются незадолго до конца ударной стадии и равны приблизительно 0,33, что соответствует примерно 140 Н/мм^2 в размерных переменных. Важно отметить, что одномодовое приближение, $N = 1$, которое часто используется в практических вычислениях, не дает верного представления об эволюции напряжений в течение ударной стадии, но позволяет оценить напряжения в конце стадии.

Заключение. В работе представлен численный алгоритм расчета деформаций упругой пластины при ее ударе по искривленной поверхности жидкости. Алгоритм позволяет проводить расчеты на персональном компьютере. Тестовые расчеты показали эффективность алгоритма. Алгоритм предназначен для анализа роли упругих эффектов в процессах соударения жидкости с тонкостенными конструкциями ограниченной протяженности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01767).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение, 1976.
2. Давыдов В. В., Маттес Н.В. Динамические расчеты прочности судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974.
3. Korobkin A. A. Impact of two bodies one of which is covered by a thin layer of liquid // J. Fluid Mech. 1995. V. 300. P. 43–58.
4. Kvålsvold J., Faltinsen O. M. Hydroelastic modelling of slamming against wetdecks // 8th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Saint Johns, Canada, 1993.
5. Korobkin A. A. Water impact problems in ship hydrodynamics // Advances in Marine Hydrodynamics / M. Ohkusu (Ed.). Southampton: Computational Mech. Publ., 1996. P. 323–371.
6. Wagner H. Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // Z. Angew. Math. Mech. 1932. V. 12, H. 4. S. 193–215.

7. **Kvålsvold J., Faltinsen O. M., Aarsnes J.V.** Effect of structural elasticity on slamming against wetdecks of multihull vessels // 6th Intern. Symp. on the Practical Design of Ships and Offshore Mobile Units (PRADS), Seoul, 1995. P. 1.684–1.699.
8. **Логвинович Г. В.** Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969.
9. **Korobkin A. A.** Acoustic approximation in the slamming problem // J. Fluid Mech. 1996. V. 318. P. 165–188.
10. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
11. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 26/IX 1996 г.,
в окончательном варианте — 24/I 1997 г.*
