

УДК 532.592

ВНУТРЕННИЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ НАД КОМБИНИРОВАННЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

Д. С. Денисенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: d.denisenko.hydro@gmail.com

Рассматривается стационарная задача о захваченных уединенных волнах в сверхкритических течениях стратифицированной жидкости над неровным дном. Для пологих препятствий малой амплитуды построено семейство приближенных двухпараметрических решений, которые в пределе при нулевом значении высоты препятствия соответствуют внутренним уединенным волнам. Численно показано, что количество приближенных решений существенно зависит от формы дна.

Ключевые слова: стратифицированные течения, захваченные волны.

DOI: 10.15372/PMTF20210420

Введение. Стационарные внутренние волны в стратифицированных течениях над неровным дном активно исследуются в контексте приложений в метеорологии и океанологии [1–3]. Основной математической моделью, используемой для описания стратифицированных течений, являются двумерные уравнения Эйлера для несжимаемой неоднородной жидкости. Различаются два режима течения, которые зависят от сверхкритичности или докритичности набегающего потока. В докритическом режиме известен такой тип течения, как стационарная конфигурация в виде присоединенного цуга волн с периодической асимптотикой вниз по потоку [4]. В сверхкритических режимах волновые структуры формируются в окрестности препятствия [5]. В этом случае при обтекании ровного дна одним из возможных решений является равномерный поток, от которого ответвляется семейство вторичных решений типа уединенных волн [6, 7].

В случае неровного дна неединственность решений сохраняется: одно решение является возмущением равномерного потока, другие соответствуют возмущенным уединенным волнам, известным как захваченные уединенные волны. Существование точного решения уравнений Эйлера, описывающего захваченную поверхностную уединенную волну над симметричным препятствием, доказано в [8]. Обтекание комбинированного препятствия рассматривалось в работе [9], в которой построены численные решения в виде нескольких уединенных волн, захваченных одновременно. В работе [10] асимптотическое решение уравнений Эйлера построено и проанализировано с помощью метода функции Мельникова [11], корни которой соответствуют потенциальным точкам захвата поверхностных уединенных волн над несимметричным препятствием.

В настоящей работе строятся асимптотические решения, описывающие внутренние уединенные волны главной моды, захваченные комбинированным препятствием. Исход-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-11-20189).

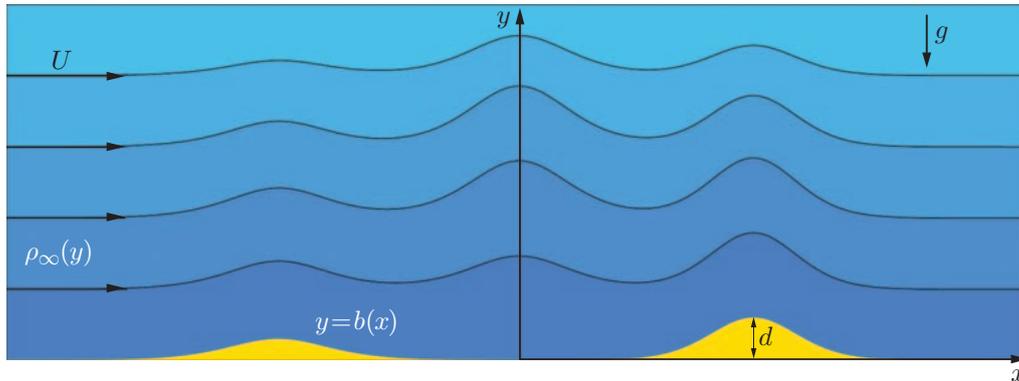


Рис. 1. Схема стратифицированного течения

ной математической моделью является краевая задача для уравнения Дюбрей-Жакотен — Лонга [12], эквивалентного уравнениям Эйлера в случае неоднородной жидкости. Используется двухпараметрическое разложение, которое предложено в работе [8] при исследовании стационарных течений однородной жидкости над симметричным препятствием, а в дальнейшем применено для случая более сложной формы дна в [10].

1. Постановка задачи. Рассматриваются двумерные стационарные течения неоднородной несжимаемой жидкости в слое конечной толщины над неровным дном. Исходной математической моделью является система уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \rho(wu_x + vu_y) + p_x &= 0, & \rho(uv_x + vv_y) + p_y &= -g\rho, \\ u_x + v_y &= 0, & u\rho_x + v\rho_y &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v — компоненты вектора скорости; ρ — плотность жидкости; p — давление; g — ускорение свободного падения (рис. 1). Полагается, что на большой высоте течение близко к равномерному, поэтому область течения ограничена сверху жесткой крышкой $y = H$. Неровность дна, определяемая гладкой кривой $y = b(x)$, представляет собой систему препятствий, возвышающихся над уровнем $y = 0$. Известно [12], что при введении функции тока ψ для поля скоростей $u = \psi_y, v = -\psi_x$ функция плотности имеет вид $\rho = \rho(\psi)$, а исходная система (1) после исключения давления p сводится к уравнению Дюбрей-Жакотен — Лонга

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \frac{\rho'(\psi)}{\rho(\psi)} \left(gy - \frac{g\psi}{U} + \frac{1}{2} (|\nabla\psi|^2 - U^2) \right) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями непротекания на дне и крышке

$$\psi = 0 \Big|_{y=b(x)}, \quad \psi = UH \Big|_{y=H}. \quad (3)$$

Константа U является скоростью потока при $x \rightarrow -\infty$, что подразумевает также отсутствие возмущений вверх по течению:

$$\psi \rightarrow Uy \quad (x \rightarrow -\infty). \quad (4)$$

Дополнительно полагается, что набегающий поток имеет экспоненциальное распределение по плотности $\rho_\infty(y) = e^{-N^2 y/g}$ с постоянной частотой плавучести N .

Основными безразмерными константами данной задачи являются параметр Буссинеска $\sigma = N^2 H/g$ и квадрат обратного денситометрического (плотностного) числа Фруда $\lambda = \sigma g H/U^2$. Величина σ задает угол наклона профиля плотности экспоненциально стратифицированной жидкости в состоянии покоя. Параметр λ является мерой до- или сверхкритичности набегающего потока. Таким образом, течение является сверхкритическим при

$$\lambda < \lambda_0 = \sigma^2/4 + \pi^2, \quad (5)$$

в противоположном случае поток является докритическим. Заметим, что справедливо равенство $\sqrt{\lambda} = Lo$, где $Lo = NH/U$ — безразмерная величина, известная как число Лонга. В настоящей работе в качестве естественных малых параметров используются длинноволновый параметр $\varepsilon = H^2/L^2$, определяющий длину волны L , и безразмерная высота препятствия

$$a = \frac{d}{H}, \quad d = \max_{-\infty < x < \infty} |b(x)|,$$

характеризующая малость высоты препятствия d по отношению к толщине слоя жидкости H . Выбирая константу U в качестве масштаба скорости жидкости, постоянную L — в качестве горизонтальной шкалы, а величину H — в качестве масштаба слоя жидкости, введем безразмерные переменные

$$x = L\bar{x}, \quad y = H\bar{y}, \quad \psi = UH\bar{\psi}.$$

В этих переменных уравнение, определяющее форму дна, записывается в виде $\bar{y} = a\bar{b}(\bar{x})$, а функция, задающая профиль плотности невозмущенного течения, принимает безразмерный вид $\rho_\infty/\rho_0 = e^{-\sigma\bar{x}}$. Опуская черту, уравнения (2)–(4) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi_{xx} + \psi_{yy} + \lambda(\psi - y) &= \sigma(\varepsilon\psi_x^2 + \psi_y^2 - 1)/2, \\ \psi = 0|_{y=ab(x)}, \quad \psi = 1|_{y=1}, \quad \psi(x, y) &\rightarrow y, \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \tag{6}$$

Построение решения в переменных x, y осложняется тем, что первое граничное условие задается на криволинейной границе $b(x)$. Рассмотрим полулагранжевы независимые переменные Мизеса x, ψ , в которых область течения преобразуется в прямолинейную полосу $\mathbb{R} \times [0, 1]$, а искомая форма линий тока определяется в виде $y = Y(x, \psi)$. Тогда производные относительно независимых переменных после преобразования $(x, y) \rightarrow (x, \psi)$ изменяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} - \frac{Y_x}{Y_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{Y_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Например, первые производные неизвестных функций $\psi(x, y), Y(x, \psi)$ связаны соотношениями

$$\psi_x = -\frac{Y_x}{Y_\psi}, \quad \psi_y = \frac{1}{Y_\psi}.$$

Таким образом, уравнение задачи (6) можно записать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\varepsilon Y_x}{Y_\psi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{1 + \varepsilon Y_x^2}{Y_\psi^2} + \lambda(\psi - Y) = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon Y_x^2}{Y_\psi^2} - 1 \right) \tag{7}$$

с граничными условиями на дне и крышке

$$Y(x, 0) = ab(x), \quad Y(x, 1) = 1. \tag{8}$$

В новых переменных условие равномерности набегающего потока определяется соотношением

$$Y(x, \psi) \rightarrow \psi, \quad x \rightarrow \pm\infty. \tag{9}$$

Заметим, что уравнение (7) имеет более сложную структуру по сравнению с приведенными выше уравнениями. Однако, поскольку граничное условие на дне (8) задается на прямой $\psi = 0$, процедура построения приближенного решения существенно упрощается.

2. Асимптотическое решение. Построим приближенное решение краевой задачи (7)–(9), которое совпадает с решением типа уединенной волны при $a \rightarrow 0$. Пусть течение является слабосверхкритическим и выполняется неравенство

$$\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$$

(параметр λ_0 определен в (5)). Будем полагать, что безразмерная высота препятствия a является достаточно малой и определяется выражением $a = \varepsilon^2 \delta$, при этом в дальнейшем величина δ используется в качестве нового малого параметра вместо a . Эта гипотеза впервые использовалась в работе [8] для построения захваченной уединенной волны над симметричным дном в случае течений однородной жидкости, а в работе [10] — для построения поверхностных уединенных волн, захваченных над произвольным гладким дном.

Представим искомое решение Y в виде ряда по степеням ε и δ :

$$Y(x, \psi) = \psi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^k \delta^l y_{kl}(x, \psi). \quad (10)$$

В настоящей работе сходимость данного ряда не исследуется. Для качественного анализа картины течения будет построено лишь два члена главных порядков ε и $\varepsilon\delta$. Подставляя ряд (10) в краевую задачу (7)–(9), получаем цепочку уравнений для последовательных приближений

$$y_{kj,\psi\psi} - \sigma y_{kj,\psi} + \lambda_{cr} y_{kj} = f_{kj}; \quad (11)$$

$$y_{kj}(x, 0) = b_{kj}, \quad y_{kj,\psi}(x, 1) = 0 \quad (12)$$

с соответствующими условиями на бесконечности

$$y_{kl} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (13)$$

Заметим, что член b_{21} равен $b(x)$, а для любых других значений k, l имеем $b_{kj} = 0$. Правые части уравнений (11)–(13), необходимые для построения асимптотического решения, имеют вид

$$f_{10} = f_{11} = f_{12} = 0,$$

$$f_{20} = -y_{10xx} - y_{10} + 3y_{10\psi\psi}y_{10\psi} - (3\sigma/2)y_{10\psi}^2,$$

$$f_{21} = -y_{10xx} - y_{10} + 3(y_{10\psi}y_{11\psi})_{\psi} - 3\sigma y_{10\psi}y_{11\psi},$$

$$f_{22} = -y_{10xx} - y_{10} + 3(y_{10\psi\psi}y_{12\psi})_{\psi} + 3y_{11\psi\psi}y_{11\psi} - (3\sigma/2)(2y_{10\psi}y_{12\psi} + y_{11}^2).$$

Однородное уравнение (11) с нулевой правой частью и нулевыми граничными условиями допускает решение вида $y(x, \psi) = \tau(x) e^{\sigma\psi/2} \sin \pi\psi$, где функция $\tau(x)$ является произвольной. Отсюда находим необходимые условия для ненулевых правых частей, которые можно получить, умножив (11) на $e^{-\sigma\psi/2} \sin \pi\psi$ и проинтегрировав полученное уравнение по ψ от 0 до 1. Тогда с учетом граничных условий (12) получаем

$$\pi b_{kl} = \int_0^1 e^{-\sigma z/2} \sin(\pi z) f_{kl} dz, \quad k, l = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

а из (11), (12) при $k = 1, j = 0, 1, 2$ находим

$$y_{1j}(x, \psi) = \tau_j(x)\psi, \quad j = 0, 1, 2.$$

Здесь функции τ_0 , τ_1 , τ_2 являются дополнительными неизвестными. Для определения τ_0 необходимо рассмотреть условие разрешимости (14) при $k = 2$, $l = 0$, включающее функцию f_{20} , зависящую только от y_{10} . В результате получаем известное стационарное уравнение Кортевега — де Фриза

$$\tau_{0xx} - \tau_0 + \beta(\sigma)\tau_0^2 = 0, \quad (15)$$

в котором коэффициент $\beta(\sigma)$ определяется формулой

$$\beta(\sigma) = \sigma \frac{12\pi^3(1 + e^{\sigma/2})}{36\pi^2 + \sigma^2}.$$

Решением уравнения (15), удовлетворяющим условиям на бесконечности (13), является функция

$$\tau_0(x; c_0) = \frac{3}{2\beta(\sigma)} \operatorname{sech}^2 \frac{x - c_0}{2}, \quad (16)$$

где постоянная c_0 характеризует положение захваченной уединенной волны. В случае ровного дна этот параметр может быть выбран произвольным образом, поскольку исходные уравнения допускают группу сдвига по x при $b(x) \equiv 0$. Однако в случае течений над неровным дном имеется зависимость между параметром c_0 и функцией $b(x)$. Заметим также, что в отсутствие стратификации ($\sigma = 0$) $\beta = 0$ и функция τ_0 принимает бесконечное значение. Следовательно, предложенное разложение (10) справедливо только при значениях σ , не принадлежащих окрестности нуля. В случае слабостратифицированной жидкости необходимо рассматривать асимптотику решения, которая использовалась для изучения распространения уединенных волн над ровным дном в работе [13]. Рассмотрим условие (14) с $k = 2$, $l = 1$, для того чтобы определить функцию τ_1 . Получаем линейное неоднородное уравнение

$$\tau_{1xx} + (2\beta(\sigma)\tau_0 - 1)\tau_1 = -2\pi b(x) \quad (17)$$

с условиями затухания

$$\tau_1(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (18)$$

Поскольку уравнение (17) является линейным, точное решение можно построить с помощью метода вариации произвольной постоянной. Для этого необходимо найти два независимых решения однородного уравнения (17) с нулевой правой частью. Заметим, что левую часть уравнения (17) можно получить при линеаризации уравнения (15) на решении τ_0 . Тогда одно из решений определяется функцией

$$\tau'_0(x; c_0) = \frac{3}{2\beta(\sigma)} \operatorname{th} \frac{x - c_0}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x - c_0}{2},$$

после чего второе независимое решение строится с помощью формулы Лиувилля — Остроградского и имеет вид

$$r_0(x; c_0) = \tau'_0(x; c_0) \frac{4\beta^2(\sigma)}{9} \left(\frac{15}{8} \xi + \operatorname{sh} \xi + \frac{1}{16} \operatorname{sh} 2\xi - 2 \operatorname{cth} \frac{1}{2} \xi \right) \Big|_{\xi=x-c_0}.$$

Функция $r_0(x; c_0)$ имеет экспоненциальный порядок роста $r_0 \sim C e^{|x-c_0|}$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и является нечетной относительно $x = c_0$. Первое решение $\tau'_0(x; c_0)$, наоборот, является симметричным относительно $x = c_0$, а также удовлетворяет условиям на бесконечности (18), так как $\tau'_0 \sim C e^{-|x-c_0|}$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Последнее замечание имеет большое значение,

поскольку накладывает дополнительные условия на правую часть уравнения (17). Действительно, умножая (17) на τ_0' , интегрируя полученное уравнение от $x = -\infty$ до $x = \infty$ и используя граничные условия (18), получаем соотношение

$$\mu(c_0; b) := \int_{-\infty}^{\infty} b(s)\tau_0'(s; c_0) ds = 0 \quad (19)$$

(отображение μ — функция Мельникова [11]). Условие (19) устанавливает связь между формой дна и неизвестным расположением уединенной волны $x = c_0$. Очевидно, что при $c_0 = 0$ это условие выполняется автоматически для уединенной волны, захваченной непосредственно над симметричным препятствием. Однако в случае несимметричного дна это условие также выполняется для некоторых c_0 . Таким образом, в случае если (19) удовлетворяется для некоторого c_0 , решение τ_1 , затухающее при $|x| \rightarrow \infty$, можно представить в виде

$$\tau_1(x) = k_1\tau_0'(x; c_0) + \Gamma b(x; c_0), \quad (20)$$

где оператор Грина Γ определяется формулой

$$\Gamma b(x; c_0) = 2\pi\tau_0'(x; c_0) \int_{c_0}^x r_0(s; c_0)b(s) ds + 2\pi r_0(x; c_0) \int_x^{\infty} \tau_0'(s; c_0)b(s) ds, \quad (21)$$

а константа k_1 будет определена далее из условия совместности, возникающего при рассмотрении уравнения следующего порядка. Заметим, что в общем случае решение Γb может быть неограниченным. Чтобы этого избежать, будем полагать, что функция $b(x)$ экспоненциально убывает при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда все члены в (21) ограничены, и определение τ_1 является корректным. Для того чтобы найти k_1 , рассмотрим соотношение (14) с $k = 2$, $l = 2$, из которого следует линейное неоднородное уравнение

$$\tau_{2xx} + (2\beta(\sigma)\tau_0 - 1)\tau_2 = -\beta(\sigma)(\Gamma b + k_1\tau_0')^2, \quad (22)$$

эквивалентное уравнению (17). Таким образом, члены в правой части уравнения (22) должны удовлетворять аналогичному условию совместности

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma b(s; c_0) + k_1\tau_0'(s; c_0))^2 \tau_0'(s; c_0) ds = 0,$$

из которого следует выражение для k_1 :

$$k_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0'(s; c_0)(\Gamma b(s; c_0)v)^2 ds / 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0'^2(s; c_0)\Gamma b(s; c_0) ds. \quad (23)$$

Заметим, что константа k_1 конечна только в случае, когда знаменатель не обращается в нуль. Однако, используя свойства оператора Γ и собственной функции τ_0 , знаменатель в (23) можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_0'^2(s; c_0) \Gamma b(s; c_0) ds = \frac{\pi}{\beta(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_0''(s; c_0)b(s) ds = -\frac{\pi}{\beta(\sigma)} \left. \frac{\partial \mu(c; b)}{\partial c} \right|_{c=c_0}$$

(функция Мельникова μ определена в (19)). Тогда полученный выше аналитический результат можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма. Пусть набегающий поток является слабосверхкритическим, так что параметр $\lambda < \lambda_{cr}$ определен в виде $\lambda = \sigma^2/4 + \pi^2 - \varepsilon$, где длинноволновый параметр ε является малым. Предположим, что выражение для безразмерной высоты препятствия имеет вид $a = \delta\varepsilon^2$, где величина $\delta > 0$ также полагается малой. Допустим, что функция $b(x)$, задающая форму дна, является достаточно гладкой и имеет асимптотику $b(x) \sim C e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда если существует корень c_0 функции Мельникова μ из (19), такой что

$$\mu(c_0; b) = 0, \quad \left. \frac{\partial \mu(c; b)}{\partial c} \right|_{c=c_0} \neq 0, \quad (24)$$

краевая задача (7)–(9) имеет приближенное решение типа внутренней уединенной волны $Y(x, \psi; c_0)$, линии тока в которой имеют форму

$$Y(x, \psi; c_0) = \psi + \varepsilon e^{\sigma\psi/2} (\tau_0(x; c_0) + \delta\tau_1(x; c_0)) \sin \pi\psi, \quad (25)$$

функции τ_0, τ_1 определены формулами (16), (20) с константой

$$k_1 = \frac{\beta(\sigma)}{2\pi\mu'_c(c_0; b)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau'_0(s; c_0) (\Gamma b(x; c_0))^2 ds.$$

Таким образом, простые корни функции Мельникова $\mu(c; b)$ соответствуют потенциальным точкам захвата внутренних уединенных волн в стратифицированной жидкости над неровным дном.

Задача (7)–(9) допускает также приближенное решение, соответствующее практически гидростатическому возмущению равномерного потока при обтекании дна. Данное асимптотическое решение имеет вид

$$Y_*(x, \psi) = \psi + \varepsilon\delta\tau_*(x) e^{\sigma\psi/2} \sin \pi\psi, \quad \tau_*(x) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|} b(s) ds. \quad (26)$$

Существование решения (26) не зависит от условий вида (24), а поэтому, в случае если функция b имеет экспоненциальный порядок убывания при $|x| \rightarrow \infty$, определение (26) задает ограниченную функцию. Согласно формулам (25), (26) донные возмущения в толще стратифицированного потока достигают порядка $\varepsilon\delta$, что существенно больше характерной амплитуды препятствий $\varepsilon^2\delta$. Это обусловлено тем, что течение является близким к критическому [1].

3. Примеры захваченных внутренних волн. Проанализируем асимптотические решения, заданные формулой (25). Для вычисления несобственных интегралов в Γb используется метод трапеций, а для нахождения простых корней функции Мельникова (19) — метод Ньютона. Кроме того, для сравнения приводятся конфигурации течения, определенные с помощью формулы (26) и характеризующие практически гидростатическое (безволновое) обтекание препятствия. Во всех расчетах рассматривается сверхкритический набегающий поток, такой что $\lambda = \sigma^2/4 + \pi^2 - \varepsilon$, в предположении $\sigma = 0,6$, $\varepsilon = 0,07$. Величина a , характеризующая безразмерную высоту препятствия, полагается малой, и выражение для нее имеет вид $a = \varepsilon^2\delta$ (дополнительный параметр δ принимается равным $\delta = 0,1$).

В простейшем случае, когда симметричная форма дна задается соотношением

$$b(x) = \operatorname{sech}^4(x/2),$$

функция Мельникова μ имеет единственный простой корень $c_0 = 0$ (рис. 2,а). В этом случае асимптотическое решение имеет явный вид

$$Y(x, \psi) = \varepsilon e^{\sigma\psi/2} \sin \pi\psi \left(\frac{3}{2\beta(\sigma)} - \frac{4\pi}{3} \delta \right) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}. \quad (27)$$

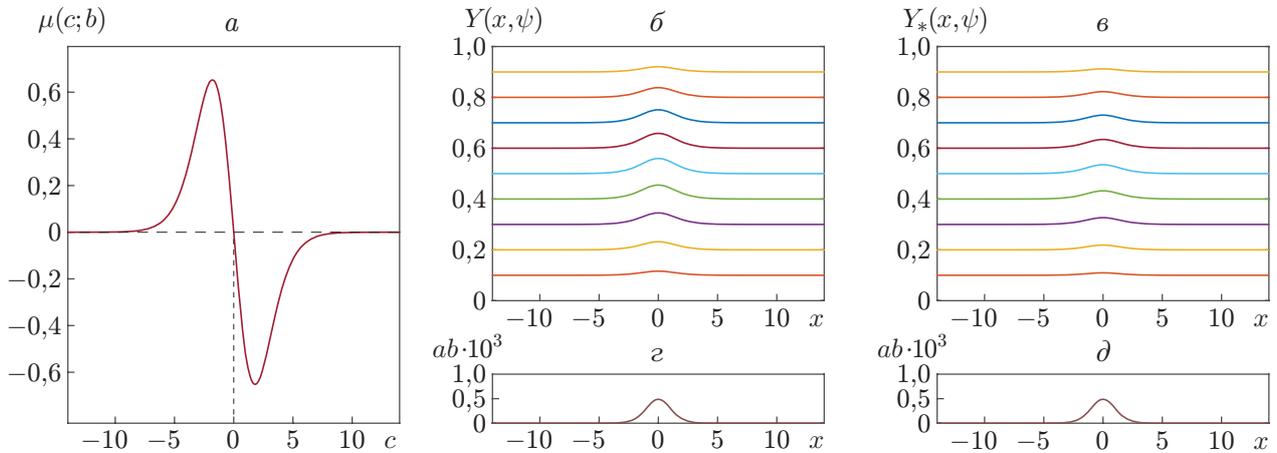


Рис. 2. Стратифицированные течения над одиночным препятствием:
a — корни функции Мельникова, *б* — внутренняя уединенная волна, *в* — решение (26), соответствующее практически гидростатическому обтеканию, *г*, *д* — форма дна

Решение (27) описывает симметричное стационарное течение (рис. 2,б). Форма дна вносит отрицательный вклад в рассматриваемую захваченную волну: чем больше высота препятствия, тем меньше амплитуда уединенной волны. Этот факт хорошо согласуется с известным гидродинамическим эффектом, заключающимся в том, что локальное деномитметрическое число Фруда уменьшается по мере увеличения локальной высоты препятствия [1]. Решение (26), соответствующее практически гидростатическому обтеканию неровного дна, представлено на рис. 2,в.

При обтекании нескольких препятствий уединенная волна может располагаться между отдельными возвышенностями. Рассмотрим случай, когда дно представляет собой три препятствия различной формы и высоты:

$$b(x) = 0,8\text{sech}^3(x + 9) + 0,6\text{ch}^2 x + \text{sech}^5((x - 7)/3). \tag{28}$$

В этом случае функция Мельникова имеет пять простых корней (рис. 3,а). Величины c_1, c_3, c_5 соответствуют внутренним уединенным волнам, захваченным непосредственно над

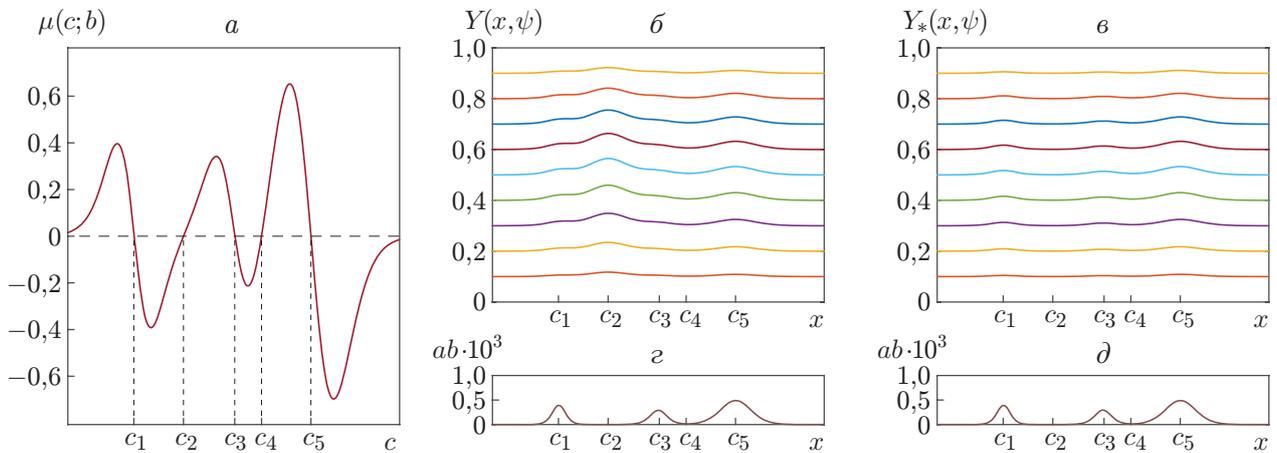


Рис. 3. Стратифицированные течения над комбинированным препятствием:
a — корни функции Мельникова, *б* — внутренняя уединенная волна, *в* — решение (26), соответствующее практически гидростатическому обтеканию, *г*, *д* — форма дна

препятствиями. Другие два корня c_2, c_4 характеризуют стационарные уединенные волны, расположенные между возвышенностями. На рис. 3,б показана внутренняя уединенная волна, захваченная между первым и вторым препятствиями в точке $x = c_2$. На рис. 3,в представлена картина течения, соответствующая случаю, когда стационарные уединенные волны отсутствуют (см. (26)), а стратифицированный поток практически повторяет форму дна. На рис. 3,б,в видно, что в области захвата уединенной волны имеются значительные возмущения внутри слоя стратифицированной жидкости, в то время как ниже по потоку течение с захваченной волной практически повторяет гидростатическое обтекание. Рассмотренный случай показывает, каким образом усложнение формы дна может привести к увеличению количества существенно различающихся асимптотических решений типа уединенной волны для уравнения Дюбрей-Жакотен — Лонга.

Следует отметить, что в последнее время задача о захваченных уединенных поверхностных волнах интенсивно изучалась в рамках приближенной модели, использующей уравнение Кортевега — де Фриза с неоднородной правой частью, моделирующей донное препятствие [14]. В частности, установлено, что положение уединенной волны оказывает существенное влияние на устойчивость этих волн. Для симметричного течения, когда одиночное препятствие задано функцией типа sech^4 , неустойчивость захваченной уединенной волны исследовалась аналитически с использованием уравнения Кортевега — де Фриза [15]. В работах [16, 17] численно показано, что решение типа уединенной волны, расположенной между препятствиями, обладает временной устойчивостью относительно нестационарных возмущений. Устойчивость захвата бегущего солитона Кортевега — де Фриза после его взаимодействия с внешним источником возмущений исследовалась в работах [18, 19].

Заключение. В работе исследована стационарная задача о внутренних уединенных волнах, захваченных над последовательностью пологих препятствий малой амплитуды. Построены семейства асимптотических решений уравнений Эйлера для несжимаемой неоднородной жидкости, учитывающих члены четвертого порядка малости по параметрам дисперсии и высоты препятствия. Указанные ограничения по высоте и крутизне являются существенными, поскольку эти факторы обеспечивают одинаковый порядок у членов, отвечающих за нелинейную дисперсию и гидравлические эффекты. Условия существования захваченных волн сформулированы в терминах функции Мельникова, простые корни которой соответствуют потенциальным точкам захвата внутренних уединенных волн над препятствием. Численно показано, что при более сложной форме дна количество корней функций Мельникова может увеличиваться, вследствие чего возникают дополнительные волновые конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Baines P. G.** Topographic effects in stratified flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
2. **Grimshaw R.** Environmental stratified flows. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2001.
3. **Farmer D., Armi L.** The generation and trapping of solitary waves over topography // Science. 1999. V. 283. P. 188–190.
4. **Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.** Стационарные волны в стратифицированном течении над комбинированным препятствием // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 141–147.
5. **Soontiens N., Stastna M., Waite M. L.** Trapped internal waves over topography: Non-Boussinesq effects, symmetry breaking and downstream recovery jumps // Phys. Fluids. 2013. V. 25. 066602. DOI: 10.1063/1.4811404.
6. **Ter-Krikorov A. M.** Theorie exacte des ondes longues stationnaires dans un liquide heterogene // J. Mecanique. 1963. V. 2. P. 351–376.

7. **Gear J. A., Grimshaw R.** A second-order theory for solitary waves in shallow fluids // *Phys. Fluids*. 1983. V. 26. P. 14–29.
8. **Sun S. M., Shen M. C.** Exact theory of secondary supercritical solutions for steady surface waves over a bump // *Physica D*. 1993. V. 67. P. 301–316.
9. **Binder B. J., Vanden-Broeck J. M., Dias F.** Forced solitary waves and fronts past submerged obstacles // *Chaos*. 2005. V. 15. 037106. DOI: 10.1063/1.1992407.
10. **Denisenko D. S., Makarenko N. I.** Trapped solitary waves over an uneven bottom // *Europ. Phys. J. Plus*. 2020. V. 135, N 8. DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00673-5.
11. **Мельников В. К.** Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. мат. о-ва*. 1963. Т. 12. С. 3–52.
12. **Yih C. S.** *Stratified flows*. N. Y.: Acad. Press, 1980.
13. **Benney D. J., Ko D. R. S.** The propagation of long large amplitude internal waves // *Studies Appl. Math*. 1978. V. 59. P. 187–199.
14. **Balasuriya S., Binder B. J.** Nonautonomous analysis of steady Korteweg — de Vries waves under nonlocalised forcing // *Physica D*. 2014. V. 285. P. 28–41.
15. **Camassa R., Wu T. Y.** Stability of forced steady solitary waves // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1991. V. 337. P. 429–466.
16. **Kim H., Choi H.** A study of wave trapping between two obstacles in the forced Korteweg — de Vries equation // *J. Engng Math*. 2018. V. 108. P. 197–208.
17. **Lee S.** Dynamics of trapped solitary waves for the forced KdV equation // *Symmetry*. 2018. V. 10. DOI: 10.3390/sym10050129.
18. **Grimshaw R., Pelinovsky E., Bezen A.** Hysteresis phenomena in the interaction of a damped solitary wave with an external force // *Wave Motion*. 1997. V. 26. P. 253–274.
19. **Ermakov A., Stepanyants Y.** Soliton interaction with external forcing within the Korteweg — de Vries equation // *Chaos*. 2019. V. 29. 013117.

*Поступила в редакцию 12/V 2021 г.,
после доработки — 12/V 2021 г.
Принята к публикации 31/V 2021 г.*
