УДК 539.3

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ШТАМПА СО СЛОИСТЫМ УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

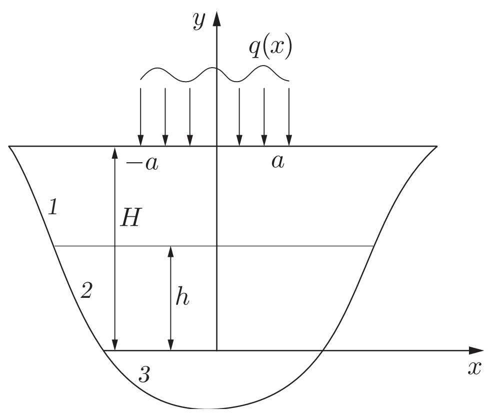
А. А. Калякин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992 Москва
E-mail: kalyakin_alex@pisem.net

Рассмотрены плоская и осесимметричная контактные задачи для трехслойного упругого полупространства. Плоская задача сведена к сингулярному интегральному уравнению первого рода, приближенное решение которого получено с помощью модифицированного метода коллокации Мультоппа — Каландия. Осесимметричная задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, приближенное решение которого получено специально разработанным методом коллокации по узлам полинома Лежандра. Рассмотрена также осесимметричная контактная задача для трансверсально-изотропного слоя, полностью сцепленного с упругим изотропным полупространством. Приведены примеры вычисления характерных интегральных величин.

Ключевые слова: контактная задача, слоистое упругое основание, штамп.

1. Вспомогательная задача. Рассмотрим задачу о равновесии упругой полуплоскости с двухполосным упругим покрытием (см. рисунок) в условиях плоской деформации. Между полосами $H - h \leqslant y \leqslant H$ и $0 \leqslant y \leqslant h$, а также между нижней полосой $0 \leqslant y \leqslant h$ и полуплоскостью $y \leqslant 0$ осуществлено полное сцепление. Верхняя полоса нагружена распределенным нормальным давлением $q(x)$. Механические характеристики (модули сдвига и коэффициенты Пуассона) полос и полуплоскости — соответственно G_j и ν_j $(j = 1, 2, 3)$.



Геометрия задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (коды проектов 05-01-00002, 03-01-96551).

Граничные условия задачи имеют вид:

— при $y = H$

$$\begin{gathered} \sigma_y^{(1)} = -\tilde{q}(x), \qquad \tau_{xy}^{(1)} = 0, \\ \tilde{q}(x) = q(x), \quad |x| \leqslant a, \qquad \tilde{q}(x) = 0, \quad |x| > a; \end{gathered} \tag{1.1}$$

— при $y = h$

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2, \qquad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \qquad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}; \tag{1.2}$$

— при $y = 0$

$$u_2 = u_3, \qquad v_2 = v_3, \qquad \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)}, \qquad \tau_{xy}^{(2)} = \tau_{xy}^{(3)}. \tag{1.3}$$

Здесь u и v — перемещения по осям x и y соответственно; σ_y — нормальное напряжение; τ_{xy} — касательное напряжение. К граничным условиям (1.1)–(1.3) следует добавить условие отсутствия напряжений в конструкции при $|x| \to \infty$ и $|y| \to \infty$.

Для решения задачи воспользуемся общим представлением решения уравнений Ламе через бигармоническую функцию перемещений χ:

$$u = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\, \partial y}, \qquad v = \Big[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big]\chi \tag{1.4}$$

(Δ — оператор Лапласа). Представляя в (1.4) бигармонические функции χ_j $(j = 1, 2, 3)$ в форме интегралов Фурье

$$\chi_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} X_j(\alpha, y)\, \mathrm{e}^{-i\alpha x}\, d\alpha, \tag{1.5}$$

для трансформант $X_j(\alpha, y)$, входящих в (1.5), получим выражения

$$\begin{aligned} X_1(\alpha, y) &= [a_1(\alpha) + |\alpha| y a_2(\alpha)]\, \mathrm{e}^{|\alpha| y} + [b_1(\alpha) + |\alpha| y b_2(\alpha)]\, \mathrm{e}^{-|\alpha| y}, \\ X_2(\alpha, y) &= [c_1(\alpha) + |\alpha| y c_2(\alpha)]\, \mathrm{e}^{|\alpha| y} + [d_1(\alpha) + |\alpha| y d_2(\alpha)]\, \mathrm{e}^{-|\alpha| y}, \\ X_3(\alpha, y) &= [e_1(\alpha) + |\alpha| y e_2(\alpha)]\, \mathrm{e}^{|\alpha| y}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где десять функций a_l, b_l, c_l, d_l, e_l $(l = 1, 2)$ должны быть найдены из граничных условий (1.1)–(1.3).

Чтобы отыскать указанные функции, выразим граничные условия (1.1)–(1.3) (с помощью формул Коши, связывающих перемещения с деформациями, и соотношений закона Гука, связывающих деформации с напряжениями) через функции χ_j $(j = 1, 2, 3)$. Затем представим разрывную функцию $\tilde{q}(x)$ вида (1.1) в форме интеграла Фурье

$$\tilde{q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha)\, \mathrm{e}^{-i\alpha x}\, d\alpha \tag{1.7}$$

и запишем граничные условия (1.1)–(1.3) в трансформантах Фурье. Воспользовавшись теперь формулами (1.6), получим систему десяти алгебраических уравнений для определения функций a_l, b_l, c_l, d_l, e_l $(l = 1, 2)$. Решим эту систему.

Подставив найденные значения $a_l(\alpha)$ и $b_l(\alpha)$ $(l = 1, 2)$ в первую формулу (1.6), построим по второй формуле (1.4) выражение для $v'_x(x, H)$, необходимое далее для постановки контактной задачи:

$$v'_x(x, H) = \frac{i}{2\pi\theta_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\alpha)\, L(|\alpha| H) Q(\alpha)\, \mathrm{e}^{-i\alpha x}\, d\alpha, \qquad \theta_1 = \frac{G_1}{1-\nu_1}. \tag{1.8}$$

Выражение для функции $L(u)$ весьма громоздкое и здесь не приводится. Заметим только, что функция $L(u)$ непрерывна и обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$\begin{aligned} &L(u) = 1 + O(\mathrm{e}^{-2|u|\delta}), \qquad |u| \to \infty, \quad \delta = \inf(\varepsilon, 1-\varepsilon), \\ &L(u) = n + O(|u|), \qquad |u| \to 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Плоская контактная задача. Заменим первое граничное условие в (1.1) следующими условиями:

$$v'_x(x, H) = -[\beta - f'(x)], \quad |x| \leqslant a, \qquad \sigma_y^{(1)}(x, H) = 0, \quad |x| > a. \tag{2.1}$$

Первое граничное условие в (2.1) — это условие контакта между жестким штампом, основание которого описывается функцией $y = f(x)$, и поверхностью двухполосного покрытия упругой полуплоскости. Второе граничное условие в (2.1) — условие отсутствия нормальной нагрузки поверхности вне зоны контакта $|x| \leqslant a$. Будем считать, что штамп вдавливается без трения в трехслойное основание силой P, под действием которой он перемещается на некоторую малую величину поступательно в отрицательном направлении оси y и поворачивается на малый угол β.

Остальные граничные условия в (1.1)–(1.3) и условие отсутствия напряжений в конструкции на бесконечности примем неизменными. Тогда с учетом формулы (1.8) первое граничное условие (2.1) будет удовлетворено, если выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\alpha)\, L(|\alpha| H) Q(\alpha)\, \mathrm{e}^{-i\alpha x}\, d\alpha = 2\pi i \theta_1 [\beta - f'(x)], \qquad |x| \leqslant a. \tag{2.2}$$

Второму граничному условию (2.1) удовлетворим, если обращение формулы (1.7) запишем в виде

$$Q(\alpha) = \int_{-a}^{a} q(\xi)\, \mathrm{e}^{i\alpha\xi}\, d\xi, \tag{2.3}$$

где $q(x)$ — неизвестное контактное давление.

Подставляя (2.3) в (2.2), после несложных преобразований получим следующее интегральное уравнение для определения $q(x)$:

$$\int_{-a}^{a} q(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} L(u) \sin\left(u\, \frac{\xi - x}{H}\right) du = \pi\theta_1 H[\beta - f'(x)], \qquad |x| \leqslant a. \tag{2.4}$$

К этому уравнению добавим условия равновесия штампа

$$P = \int_{-a}^{a} q(\xi)\, d\xi, \qquad Pe = \int_{-a}^{a} \xi q(\xi)\, d\xi, \tag{2.5}$$

где e — расстояние от оси y до линии действия силы P. Второе условие в (2.5) служит для определения угла поворота штампа β. Если полудлина линии контакта a не фиксируется углами штампа, то к уравнению (2.4) следует добавить условия

$$q(\pm a) = 0, \tag{2.6}$$

необходимые при заданной силе P для определения величин a и e.

3. Метод решения плоской задачи. Используя интеграл

$$\int_0^\infty \sin(uz)\,du = \frac{1}{z},$$

понимаемый в обобщенном смысле, запишем интегральное уравнение (2.4) в следующем виде:

$$\int_{-a}^{a} q(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi - x} = \pi\theta_1[\beta - f'(x)] + \frac{1}{H}\int_{-a}^{a} q(\xi) G\Big(\frac{\xi - x}{H}\Big)\,d\xi,$$
$$G(z) = \int_0^\infty [1 - L(u)]\sin(uz)\,du. \tag{3.1}$$

Заметим, что в левой части уравнения (3.1) стоит сингулярный оператор с ядром Коши, в правой части — регулярный оператор, так как функция $G(t)$ непрерывна, что следует из формул (1.9).

Для построения приближенного решения интегрального уравнения (3.1) предлагается использовать модифицированный метод Мультоппа — Каландия [1, 2]. Кратко изложим его схему. Можно показать [3], что общее решение уравнения (3.1) имеет форму

$$q(x) = \omega(x)/\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{3.2}$$

Подставим (3.2) в (3.1) и перейдем к новым переменным $\xi = a\cos\tau$, $x = a\cos t$. В результате получим

$$\int_0^\pi \frac{\Omega(\tau)\,d\tau}{\cos\tau - \cos t} = \pi g(t) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \Omega(\tau) G\Big(\frac{\cos\tau - \cos t}{\lambda}\Big)\,d\tau,$$
$$\Omega(t) = \frac{\omega(a\cos t)}{a\theta_1}, \qquad g(t) = \beta - f'(a\cos t), \qquad \lambda = \frac{H}{a}. \tag{3.3}$$

Для функции $\omega(x)$ введем в рассмотрение интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам

$$x_l = a\cos t_l, \qquad t_l = \pi(2l - 1)/(2N), \qquad l = 1, 2, \ldots, N,$$

которые являются нулями полинома Чебышева первого рода $T_N(x/a)$. В частных случаях, когда $\omega(x)$ — четная или нечетная функция и $N = 2r + 1$ ($r \geqslant 1$), такие многочлены соответственно имеют вид

$$\Omega(t) \simeq \frac{1}{r + 1/2}\sum_{l=1}^{r+1} \Omega(t_l)\delta_l\Big(1 + 2\sum_{m=1}^{r} \cos(2mt_l)\cos(2mt)\Big),$$
$$\Omega(t) \simeq \frac{2}{r + 1/2}\sum_{l=1}^{r} \Omega(t_l)\Big(\sum_{m=1}^{r} \cos((2m-1)t_l)\cos((2m-1)t)\Big), \tag{3.4}$$

где $\delta_l = 1$ при $l \neq r + 1$, $\delta_l = 1/2$ при $l = r + 1$.

Подставляя в уравнение (3.3) приближенные выражения $\Omega(t)$ в одной из форм (3.4) и используя соотношение 7.344(1) из [4]

$$\int_0^\pi \frac{\cos(j\tau)\,d\tau}{\cos\tau - \cos t} = \pi\frac{\sin(jt)}{\sin t}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

Таблица 1

λ	c_0	λ	c_0
1/4	2,72	2	1,93
1/2	2,48	4	1,65
1	2,11		

вычислим точно интеграл в левой части уравнения (3.3). Чтобы приближенно вычислить интеграл в правой части этого уравнения, используем квадратурную формулу Гаусса

$$\int_0^\pi p(\tau)\,d\tau = \frac{\pi}{N}\sum_{l=1}^{N} p(t_l).$$

Вычислив интегралы в (3.3), в полученном соотношении положим $t = t_s$ и придем к системе r линейных алгебраических уравнений относительно значений $\Omega(t_l)$:

$$-\sum_{l=1}^{r+1-p}\Omega(t_l)\delta_l\Big\{\frac{1}{\sin t_s}\,\chi_r^{(p)}(t_l,t_s)+\frac{1}{2\lambda}\Big[G\Big(\frac{\cos t_l-\cos t_s}{\lambda}\Big)-$$
$$-(-1)^p G\Big(\frac{\cos t_l+\cos t_s}{\lambda}\Big)\Big]\Big\} = \Big(r+\frac{1}{2}\Big)g(t_s),\quad s=1,2,\ldots,r, \qquad (3.5)$$

$$\chi_r^{(p)}(\tau,t) = -2\sum_{m=1}^{r}\cos\left((2m-p)\tau\right)\sin\left((2m-p)t\right),$$

где $p = 0$ для четной функции $\omega(x)$, $p = 1$ для нечетной функции $\omega(x)$.

Чтобы замкнуть систему уравнений (3.5) для четной функции $\omega(x)$, необходимо добавить уравнение, получаемое из первого условия в (2.5) с помощью формулы (3.2) и первой формулы в (3.4):

$$\frac{P}{a\theta_1} = \frac{\pi}{r+1/2}\sum_{l=1}^{r+1}\Omega(t_l)\delta_l. \qquad (3.6)$$

После того как решена система (3.5), (3.6) для четной функции $\omega(x)$ и система (3.5) для нечетной функции $\omega(x)$ относительно $\Omega(t_l)$, по формулам (3.4) могут быть найдены приближенные выражения функций $\Omega(t)$, а следовательно, и функций $\omega(x)$ и $q(x)$. Далее нетрудно воспользоваться, если необходимо, вторым условием из (2.5) и условиями (2.6) для определения величин β, a и e.

Рассмотрим пример параболического штампа с гладкими краями, находящегося под действием центрально расположенной силы. Функция формы основания штампа имеет вид $f(x) = x^2/(2R)$, где R — радиус кривизны в вершине параболы. Используя значения параметров

$$G_2 = 3G_1/2,\quad G_3 = 2G_1,\quad \nu_1 = 0{,}25,\quad \nu_2 = 0{,}35,\quad \nu_3 = 1/3,\quad H/h = 2,$$

найдем зависимость коэффициента связи $P/(\theta_1 a)$ и a/R от λ. В табл. 1 приведены значения величины $c_0 = PR/(\theta_1 a^2)$, вычисленные при различных значениях параметра λ.

4. Осесимметричная контактная задача. Рассмотрим осесимметричную контактную задачу о вдавливании жесткого штампа в трехслойное основание, состоящее из двух упругих слоев, лежащих на упругом полупространстве. Слои полностью сцеплены друг с другом и с полупространством. Толщины верхнего и нижнего слоев обозначим через $H-h$ и h соответственно. Согласно [5] данная контактная задача посредством преобразования

Ханкеля сводится к интегральному уравнению первого рода относительно контактного давления $q(r)$ с симметричным ядром:

$$\int_0^a q(\rho)K\Big(\frac{\rho}{H},\frac{r}{H}\Big)\rho\,d\rho = \theta_1 H[\delta - f(r)], \qquad 0 \leqslant r \leqslant a,$$
$$K(\sigma,\tau) = \int_0^\infty L(u)J_0(\sigma u)J_0(\tau u)\,du, \qquad \theta_1 = \frac{G_1}{1-\nu_1}. \tag{4.1}$$

Здесь a — радиус области контакта; δ — поступательное перемещение штампа по оси ортогональной поверхности основания; $f(r)$ — функция формы основания штампа; H — толщина двуслойной плиты; G_1 и ν_1 — механические характеристики верхнего слоя. Функция $L(u)$ совпадает с найденной нами во вспомогательной задаче (см. [6]).

К интегральному уравнению (4.1) добавим условие равновесия штампа

$$P = 2\pi\int_0^a q(\rho)\rho\,d\rho, \tag{4.2}$$

служащее для определения связи между вдавливающей силой P и внедрением штампа δ. Если радиус области контакта a не задан формой штампа в постановке задачи, то он устанавливается исходя из условия

$$q(a) = 0. \tag{4.3}$$

5. Метод решения осесимметричной задачи. Интегральное уравнение первого рода (4.1) может быть сведено к следующему интегральному уравнению второго рода с разностным ядром [6, 7]:

$$p(x) - \frac{1}{\pi H}\int_{-a}^a p(\xi)M\Big(\frac{\xi - x}{H}\Big)\,d\xi = \theta_1 g(x), \qquad |x| \leqslant a,$$
$$M(y) = \int_0^\infty [1 - L(u)]\cos{(uy)}\,du, \tag{5.1}$$

причем функции $p(x)$ и $g(x)$ четные и связаны с функциями $q(r)$ и $\delta(r) = \delta - f(r)$ соотношениями

$$q(r) = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{p(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{p'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\Big], \qquad g(x) = \delta(0) + |x|\int_0^{|x|}\frac{\delta'(\rho)\,d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}. \tag{5.2}$$

Введем безразмерные комплексы

$$x' = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}, \quad \varphi(x') = \frac{p(ax')}{\theta_1 a}, \quad \psi(x') = \frac{g(ax')}{a}, \quad \lambda = \frac{H}{a}$$

и запишем интегральное уравнение (5.1) следующим образом:

$$\varphi(x) - \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-1}^1 \varphi(\xi)\Big[M\Big(\frac{\xi - x}{\lambda}\Big) + M\Big(\frac{\xi + x}{\lambda}\Big)\Big]\,d\xi = \psi(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{5.3}$$

(здесь и далее штрихи у x' и ξ' для упрощения записи опускаем).

Для приближенного решения интегрального уравнения (5.3) применим метод коллокации, изложенный в работах [8, 9]. Построим для функции $\varphi(x)$ четный интерполяционный полином Лагранжа по нулям полинома Лежандра

$$P_{2N+1}(x) = \frac{1}{2^{2N+1}(2N+1)!}\,\frac{d^{2N+1}(x^2-1)^{2N+1}}{dx^{2N+1}}.$$

Он будет иметь вид

$$\begin{gathered}\varphi(x) \approx \frac{\varphi(0)P_{2N+1}(x)}{xP'_{2N+1}(0)} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)xP_{2N+1}(x)}{(x^2-x_n^2)P'_{2N+1}(x_n)}\\ (P_{2N+1}(x_n)=0,\quad n=0,1,\ldots,N,\quad x_0=0).\end{gathered} \tag{5.4}$$

Заметим, что можно перейти к полиномам четных степеней, так как

$$\frac{xP_{2N+1}(x)-x_nP_{2N+1}(x_n)}{x^2-x_n^2} = \sum_{i=0}^{N} a_{in}P_{2i}(x).$$

Тогда формула (5.4) примет вид

$$\varphi(x) \approx \sum_{i=0}^{N} P_{2i}(x)\Big[\frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)}\,a_{i0} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)}\,a_{in}\Big]. \tag{5.5}$$

Воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получим, используя (5.5), следующую квадратурную формулу типа формулы Гаусса:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi \approx 2\Big[\frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)}\,a_{00} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)}\,a_{0n}\Big]. \tag{5.6}$$

Применив (5.6) для приближенного вычисления интеграла в уравнении (5.3) и положив $x = x_m$, где x_m — нули полинома P_{2N+1}, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно значений $\varphi(x_m)$ $(m=0,1,\ldots,N)$

$$\begin{aligned}\varphi(x_m) - \frac{1}{\pi\lambda}\Big\{&\frac{\varphi(0)a_{00}}{P'_{2N+1}(0)}\Big[M\Big(-\frac{x_m}{\lambda}\Big) + M\Big(\frac{x_m}{\lambda}\Big)\Big] +\\ &+ 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)}\,a_{0n}\Big[M\Big(\frac{x_n-x_m}{\lambda}\Big) + M\Big(\frac{x_n+x_m}{\lambda}\Big)\Big]\Big\} = \psi(x_m).\end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем приближенное выражение для функции $p(x)$:

$$\begin{gathered}p(x) = \theta_1 a\sum_{i=0}^{N} a_iP_{2i}\Big(\frac{x}{a}\Big),\\ a_i = \frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)}\,a_{i0} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)}\,a_{in}.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Таблица 2

λ	c_1	c_2	λ	c_1	c_2
1/4	5,227	2,298	2	3,363	1,429
1/2	4,568	1,927	4	3,010	1,353
1	3,926	1,624			

Подставив (5.7) в (5.2), найдем выражение для функции $q(r)$:

$$q(r) = \frac{2\theta_1 a}{\pi} \sum_{i=0}^{N} a_i \Big[\frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} -$$

$$- \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^{i-m-1} \frac{(4i-4m-1)(2i-2m-2)!!}{(2i-2m-1)!!} P_{2i-2m-1}\Big(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\Big)\Big]. \qquad (5.8)$$

Соотношения (4.2), (4.3) в силу (5.8) запишутся в следующем виде:

$$P = 4\theta_1 a^2 a_0, \qquad \sum_{i=0}^{N} a_i = 0.$$

В качестве примера рассмотрим штамп параболического профиля, находящийся под действием центрально расположенной силы. Функция формы основания штампа имеет вид $f(r) = r^2/(2R)$, где R — радиус кривизны в вершине параболы. Используя значения параметров

$$G_2 = 3G_1/2, \quad G_3 = 2G_1, \quad \nu_1 = 0{,}25, \quad \nu_2 = 0{,}35, \quad \nu_3 = 1/3, \quad H/h = 2,$$

найдем зависимость коэффициентов связи $P/(\theta_1 a^2)$ и δ/a, а также $P/(\theta_1 a^2)$ и a/R от λ. В табл. 2 приведены значения величин $c_1 = P/(\theta_1 a\delta)$ и $c_2 = PR/(\theta_1 a^3)$, вычисленные при различных значениях параметра λ.

6. Вспомогательная и контактная задачи для трансверсально-изотропного слоя. Рассмотрим осесимметричную задачу о равновесии упругого трансверсально-изотропного слоя, сцепленного с упругим изотропным полупространством. Ось симметрии z направлена нормально к плоскости изотропии. Толщину слоя обозначим через H. Упругие постоянные для изотропного полупространства обозначим E_2 и ν_2.

Граничные условия задачи имеют вид:

— при $z = H$

$$\begin{gathered} \sigma_z^{(1)} = -\tilde{q}(r), \qquad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \\ \tilde{q}(r) = q(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \qquad \tilde{q}(r) = 0, \quad a < r < \infty; \end{gathered} \qquad (6.1)$$

— при $z = 0$

$$u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}. \qquad (6.2)$$

Здесь u и w — перемещения по осям цилиндрической системы координат r и z соответственно; σ_z — нормальное напряжение; τ_{rz} — касательное напряжение. К граничным условиям (6.1) и (6.2) следует добавить условие отсутствия перемещений в конструкции при $r \to \infty$ и $z \to -\infty$.

Для трансверсально-изотропного слоя запишем выражения деформаций через напряжения [10]:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\phi) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, \qquad \varepsilon_\phi = \frac{1}{E}(\sigma_\phi - \nu\sigma_r) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z,$$
$$\varepsilon_z = \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z - \frac{\nu_1}{E_1}(\sigma_r + \sigma_\phi), \qquad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_1}\tau_{rz}. \tag{6.3}$$

Здесь $\varepsilon_r = \partial u/\partial r$; $\varepsilon_\phi = u/r$; $\varepsilon_z = \partial w/\partial z$; $\gamma_{rz} = \partial u/\partial z + \partial w/\partial r$. Решив эту систему относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a_1\varepsilon_r + a_2\varepsilon_\phi + a_3\varepsilon_z, \\ \sigma_\phi &= a_2\varepsilon_r + a_1\varepsilon_\phi + a_3\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= a_3\varepsilon_r + a_3\varepsilon_\phi + a_4\varepsilon_z, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $a_1 = E(E_1 - \nu_1^2 E)/D$; $a_2 = E(\nu E_1 + \nu_1^2 E)/D$; $a_3 = EE_1\nu_1(1+\nu)/D$; $a_4 = E_1^2(1-\nu^2)/D$; $D = (1-\nu^2)E_1 - 2E\nu_1^2(1+\nu)$. Далее предполагаем, что $D > 0$.

Полученные выражения для напряжений подставим в уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

и в итоге получим уравнения Ламе

$$a_1\tilde{L}^2 u + G_1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (a_3 + G_1)\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z} = 0,$$
$$G_1 L^2 w + a_4\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (a_3 + G_1)\frac{\partial}{\partial z}\hat{L}u = 0. \tag{6.5}$$

Здесь использованы следующие обозначения для дифференциальных операторов:

$$L^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \qquad \hat{L} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, \qquad \tilde{L}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}.$$

Введем функцию перемещений χ: $u = -(a_3 + G_1)\,\partial^2\chi/\partial r\,\partial z$. Выразим w через χ из первого уравнения (6.5). Имеем $w = (a_1 L^2 + G_1\,\partial^2/\partial z^2)\chi$. Подставим это выражение во второе уравнение (6.5) и преобразуем его. В результате для функции χ получим уравнение в частных производных четвертой степени

$$\Big(\frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2A\frac{\partial^2}{\partial z^2}L^2 + BL^4\Big)\chi = 0,$$
$$2A = \frac{a_4 a_1 - 2a_3 G_1 - a_3^2}{a_4 G_1}, \qquad B = \frac{a_1}{a_4}. \tag{6.6}$$

Применив преобразование Ханкеля

$$\chi = \int\limits_0^\infty X(\gamma, z) J_0(\gamma z)\gamma\,d\gamma,$$

где J_0 — функция Бесселя, из уравнения (6.6) получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Решение его в общем виде дается выражением

$$X_1 = c_1\,\mathrm{e}^{k_1\gamma z} + c_2\,\mathrm{e}^{k_2\gamma z} + c_3\,\mathrm{e}^{k_3\gamma z} + c_4\,\mathrm{e}^{k_4\gamma z}.$$

Таблица 3

λ	c_1	c_2	λ	c_1	c_2
1/4	3,122	1,463	2	2,754	1,336
1/2	2,965	1,392	4	2,710	1,334
1	2,836	1,351			

Коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 — корни уравнения $k^4 - 2Ak^2 + B = 0$. Для подстилающего полупространства получим выражение аналогичной трансформанты в форме

$$X_2 = (d_1 + \gamma z d_2)\, \mathrm{e}^{\gamma z}\,.$$

Шесть функций c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2 параметра γ должны быть найдены из граничных условий (6.1) и (6.2), для чего выразим эти граничные условия (с помощью формул (6.3) и (6.4)) через функции χ_j $(j = 1, 2)$. Затем представим разрывную функцию $\tilde{q}(r)$ в форме интеграла Ханкеля

$$\tilde{q}(r) = \int_0^\infty Q(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma\, d\gamma$$

и запишем все граничные условия в трансформантах. Воспользовавшись выражениями для трансформант, получим систему шести алгебраических уравнений для определения искомых функций c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2. Решив эту систему, получим выражение

$$w(r, H) = \frac{1}{\theta_1} \int\limits_0^\infty L(\gamma H) Q(\gamma) J_0(\gamma r)\, d\gamma,$$

необходимое далее для постановки контактной задачи.

Отметим, что функция $L(u)$, выражение для которой здесь не приводится, имеет тот же смысл, что и в предыдущей задаче, и обладает аналогичными асимптотическими свойствами:

$$L(u) = 1 + O(\mathrm{e}^{-2uk_1}), \qquad u \to \infty,$$
$$L(u) = n + O(u), \qquad u \to 0.$$

Полученная функция $L(u)$, определяющая характер ядра в интегральном уравнении (4.1), позволяет воспользоваться результатами п. **4**.

В качестве примера рассмотрим штамп параболического профиля, находящийся под действием центрально расположенной силы. Функция формы основания штампа имеет вид $f(r) = r^2/(2R)$, где R — радиус кривизны в вершине параболы. Используя значения параметров

$$E_1 = 0{,}915E, \quad G_1 = 0{,}382E, \quad E_2 = 1{,}281E, \quad \nu = 0{,}22, \quad \nu_1 = 0{,}24, \quad \nu_2 = 0{,}28,$$

найдем зависимость коэффициентов связи $P/(\theta_1 a^2)$ и δ/a, а также $P/(\theta_1 a^2)$ и a/R от λ. В табл. 3 приведены значения величин $c_1 = P/(\theta_1 a \delta)$ и $c_2 = PR/(\theta_1 a^3)$, вычисленные при различных значениях параметра λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров В. М., Ромалис Б. Л.** Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986.
2. **Каландия А. И.** Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.

3. **Александров В. М., Коваленко Е. В.** Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.
4. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1970.
6. **Александров В. М.** Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 2. С. 102–108.
7. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1967.
8. **Александров В. М., Клиндухов В. В.** Контактные задачи для двухслойного упругого основания с неидеальной механической связью между слоями // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 3. С. 84–92.
9. **Александров В. М., Клиндухов В. В.** Модифицированный метод Мультоппа — Каландия в осесимметричных контактных задачах // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов н/Д: Изд-во Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк., 2001. Т. 2. С. 13–16.
10. **Лехницкий С. Т.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 14/VII 2005 г.