

УДК 539.370

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ В КРЕСТООБРАЗНЫХ КРЕПЛЕНИЯХ

М. Р. Шаднам, Р. Аббасния\*

Технологический университет Шарифа, 11365-9313 Тегеран, Иран

\* Иранский университет науки и технологии, Тегеран, Иран

Предлагаются новые системы предварительно закрученных стержней и изучается их устойчивость под действием консервативной нагрузки. Получены конечные соотношения для определения критических нагрузок для различных видов концевых соединений и произвольного отношения безразмерных сжимающих усилий к растягивающим. Уравнение для вычисления критических нагрузок получено для соединений, в которых стержневые элементы, подверженные растяжению или сжатию, имеют различные геометрические параметры поперечных сечений, различную длину и нагружены различными осевыми силами. Показано, что критические нагрузки систем крепления из предварительно закрученных стержней выше критических нагрузок аналогичных систем из стержней без предварительного их закручивания. Результаты аналитических решений, полученных в параметрической форме, представлены в виде графиков. Определены границы, разделяющие симметричные и несимметричные формы выпучивания.

**Введение.** В большинстве случаев расчет сооружений проводится с учетом того, что они должны выдерживать сейсмические и (или) ветровые нагрузки. В качестве систем, выдерживающих боковые нагрузки, используются моментные фермы, железобетонные армированные стены, стальные крепежные системы. Стальные крепежные системы являются идеальным конструкторским решением при создании сооружений, способных выдерживать сейсмические нагрузки. Они обладают такими полезными сейсмическими характеристиками, как пластичность и способность поглощать энергию. Однако использовать эти свойства можно только после тщательно проведенных расчетов.

Для различных целей используются различные конфигурации крепежных систем. Некоторые из них показаны на рис. 1. Хотя в последнее десятилетие предложено и изучено много новых видов креплений, диагональные крепления все еще используются в металлоконструкциях промышленных и коммерческих зданий и опорах высоковольтных линий.

В последнее десятилетие появился ряд работ, в которых исследуются пространственные формы потери устойчивости (с учетом бокового прогиба) систем крепления. Учет таких форм потери устойчивости весьма важен для проектных расчетов. В данной работе предлагается новый способ использования стержневых элементов в системах крепления

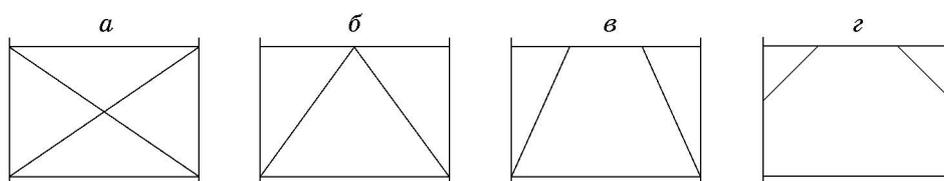


Рис. 1. Различные типы систем крепления:

а — X-образная; б — V-образная; в — эксцентриская; г — коленообразная

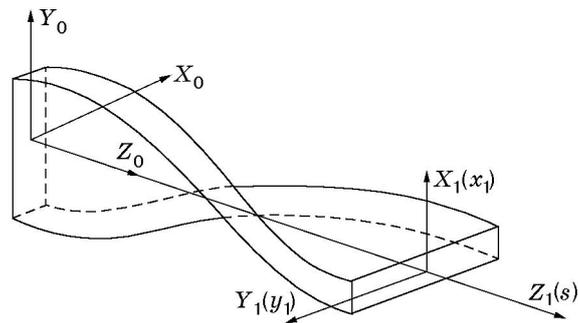


Рис. 2. Предварительно закрученная балка

и изучаются их свойства. Получено также соотношение для вычисления критической нагрузки таких систем. Несмотря на то что в работе формулируется и решается задача для X-образных креплений, результаты могут быть использованы и для других форм креплений с целью повышения критических нагрузок. Это возможно вследствие того, что и для других конфигураций при боковом выпучивании (выпучивании из плоскости конструкции) отдельные элементы с точки зрения устойчивости не взаимодействуют и работают независимо. Таким образом, при использовании предварительно закрученных стержней в системах крепления другой конфигурации нет необходимости вновь исследовать их устойчивость. Увеличение критической нагрузки легко вычислить на основе работ [1, 2]. Единственной неизученной задачей остается задача геометрического характера, а именно разработка узлов соединения стержней с другими призматическими элементами каркаса. Эта проблема рассматривается в конце данной работы. Вопросы создания систем крепления из предварительно закрученных стержней рассмотрены в [3].

Как показано в п. 1, до настоящего времени устойчивость предварительно закрученных стержней и устойчивость концентрических систем крепления изучались независимо. В данной работе обе эти задачи изучаются совместно. Результаты теоретических исследований устойчивости предварительно закрученных стержней, испытывающих изгиб (сжатие) и находящихся под действием постоянного скручивающего момента (рис. 2), используются для разработки устойчивых систем крепления. Для предварительно закрученных стержней уравнения выпучивания (устойчивости) в плоскостях их наибольшей и наименьшей жесткостей оказываются связанными. Более того, связанными оказываются и уравнения устойчивости сжатых и растянутых элементов. Поэтому в данной работе рассматривается система из четырех связанных уравнений.

**1. Обзор литературы.** В данной работе изучаются две задачи: задача математической физики (устойчивость предварительно закрученных стержней) и задача строительной техники (устойчивость систем крепления).

Впервые устойчивость предварительно закрученных стержней исследована Г. Циглером в [4], где выведено уравнение устойчивости шарнирно опертой колонны Эйлера. Более детальный анализ проведен в работе [5], в которой получены основные уравнения для двух систем координат и проанализированы различные краевые условия. Уравнения Циглера для случая консольной балки решены в [6]. В работе [7] были повторены результаты Г. Циглера. В [8] изучена устойчивость трапециевидной предварительно закрученной балки Тимошенко. Динамическая потеря устойчивости предварительно закрученных стержней под действием неконсервативной нагрузки изучалась в [9–11]. В течение последнего десятилетия Б. Табаррок и др. вывели общие связанные уравнения четвертого порядка устойчивости предварительно закрученных стержней [1, 2]. Последние работы посвящены разработке аналитических и численных методов, в частности метода конечных

элементов, методов решения задач о колебаниях предварительно закрученных стержней, сформулированных на основе более сложных моделей.

Ряд исследований посвящен решению второй сформулированной в начале данного пункта задачи. В работах [12, 13] получены точные решения для шарнирно опертых диагонально расположенных и скрепленных в середине стержней для различных значений отношения  $T/P$  ( $T$  — растягивающее усилие в стержне,  $P$  — сжимающее). В [14] рассмотрены также соединения из стержней с заземленными концами. В большинстве этих работ рассматривались диагональные соединения из одинаковых стержней, один из которых всегда был растянут. Концы стержней были шарнирно или жестко соединены с каркасом. В работах [15, 16] методом Рэлея — Ритца получены конечные соотношения для симметричных систем крепления для различных отношений  $T/P$ . В [17] для различных отношений  $T/P$  получены замкнутые решения для систем креплений, расположенных на шельфовых платформах, с шарнирно опертыми и заземленными концами стержней, соединенных не в центральных сечениях. В этих работах предполагалось, что усилия действуют в направлении диагоналей крепления. В [18] предложен численный алгоритм, основанный на энергетическом методе получения простых выражений для критических нагрузок и коэффициента эффективной длины для несимметричных диагональных креплений с шарнирно опертыми и заземленными стержнями. В [19] на основе экспериментальных данных для полномасштабных образцов предложены рекомендации по вычислению коэффициента эффективной длины. В [20] представлены результаты экспериментов с типичными панелями решетчатых башен и проведено сравнение с решениями тестовых примеров и результатами численных расчетов. В [21] рассмотрены полужесткие соединения в симметричных крестообразных креплениях, получены точные решения соответствующих уравнений.

**2. Основные уравнения.** В пп. 2, 3 получены и решены общие уравнения для случая взаимодействия растянутых и сжатых элементов креплений, работающих в симметричных условиях. Эти решения, учитывающие поперечные смещения, используются затем для вычисления жесткостей в поперечном направлении для двух различных случаев — шарнирно опертых и заземленных стержней. На основе этих результатов получены условия исчерпания жесткости (условия потери общей устойчивости) и проведен их анализ.

Рассмотрим однослойную изолированную секцию X-образного крепления (см. рис. 1, *a*) с шарнирно опертыми стержнями, нагруженную силами, лежащими в горизонтальной плоскости. При анализе конструкции предполагается, что на нее действуют одинаковые по величине растягивающее усилие  $T$  и сжимающее усилие  $P$ . Силы могут менять направление, так что диагональный элемент, находящийся в растянутом состоянии, может оказаться затем сжатым, и наоборот. Эти силы не являются независимыми. Это внутренние силы, зависящие от геометрии крепления и относительных жесткостей. При их определении рассматривается каркас в целом, так что условия сопряжения оказываются выполненными. Будем рассматривать упрощенную схему деформирования сжатого диагонального элемента, предполагая, что  $T = 0$ , и считая, что поперечному выпучиванию сжатого элемента препятствует пружина фиксированной жесткости, моделирующая поперечную жесткость растянутого элемента (рис. 3). В данной работе при расчете предварительно закрученного сжатого элемента поперечная жесткость рассматривается как интегральная характеристика крестообразного крепления.

Рассмотрим предварительно закрученный упругий стержень длиной  $L$ , нагруженный сжимающей силой  $P$ , поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M_p$ . Сила  $Q$  — сила взаимодействия растянутого и сжатого элементов в точке их пересечения.

Пусть  $u, v$  — главные оси системы в сечении с координатой  $z$ , отсчитываемой от точки опоры вдоль оси балки. В сечении  $z + dz$  главные оси переходят в оси  $u_1, v_1$  (рис. 4).

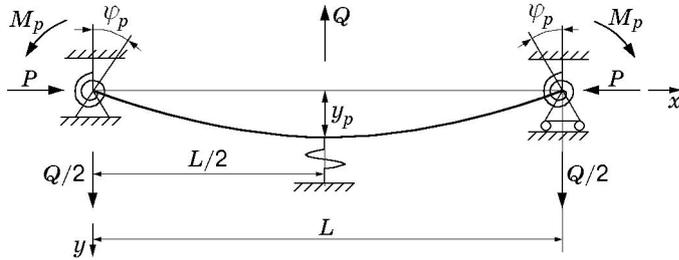


Рис. 3

Рис. 3. Сжатый диагональный элемент крепления

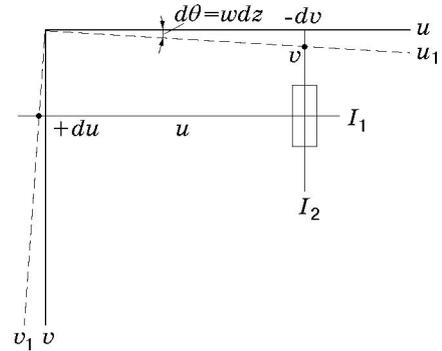


Рис. 4

Рис. 4. Поперечное сечение деформированного стержня

Компоненты вектора перемещения (вследствие бокового выпучивания) из начального состояния поперечного сечения с координатой  $z$  обозначим через  $u$  и  $v$ .

Уравнения изгиба незакрученного стержня (при отсутствии поворота осей) имеют вид

$$EI_2 \frac{d^2u}{dz^2} + Pu = Q \frac{z}{2} + M_p, \quad EI_1 \frac{d^2v}{dz^2} + Pv = 0, \quad (1)$$

где  $0 < z < L/2$ .

Рассмотрим отсчетные оси, которые поворачиваются вместе с главными осями сечения. Пусть  $w$  — угол закручивания на единицу длины оси стержня. Вследствие поворота отсчетных осей выражения для смещений  $u$  и  $v$  изменятся, и, следовательно, изменится выражение для кривизны. Рассмотрим сначала первое уравнение в (1). На расстоянии  $dz$  оси  $u$  и  $v$  поворачиваются на угол  $w dz$  (рис. 4). По сравнению со случаем фиксированных осей величины  $u$  и  $v$  получают дополнительные приращения

$$du = vw dz; \quad (2)$$

$$dv = -uw dz. \quad (3)$$

Из (2) следует  $d^2u/dz^2 = w dv/dz$ , а из (3) —  $uw^2 + w dv/dz = 0$ . С учетом того, что кривизна линии  $u$  уменьшается на величину  $wv$  (при повороте сечения по часовой стрелке), первое уравнение в (1) запишется в виде

$$EI_2(u'' - 2v'w - w^2u) + Pu = (Qz/2 + M_p) \cos(wL/2), \quad (4)$$

где  $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$ . Аналогично второе уравнение в (1) запишется в виде

$$EI_1(v'' + 2u'w - w^2v) + Pv = (Qz/2 + M_p) \sin(wL/2). \quad (5)$$

Заметим, что из левой части первого уравнения системы (1) вычтено два слагаемых, а в левой части второго уравнения аналогичные слагаемые добавлены. Замена этих операторов в силу (2), (3) привела бы к двум независимым уравнениям из-за пренебрежения влиянием предварительного закручивания на кривизны  $u''$  и  $v''$ . В безразмерных переменных  $\xi = x/L$ ,  $U = u/x$ ,  $wL = q$ ,  $v^2 = PL^2/(EI_2)$ ,  $\beta^2 = QL^2/(EI_2)$  уравнения (4), (5) записываются в виде

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} - 2q \frac{dV}{d\xi} + U(v^2 - q^2) = \frac{\beta^2 \xi \cos(q/2)}{2}, \quad (6)$$

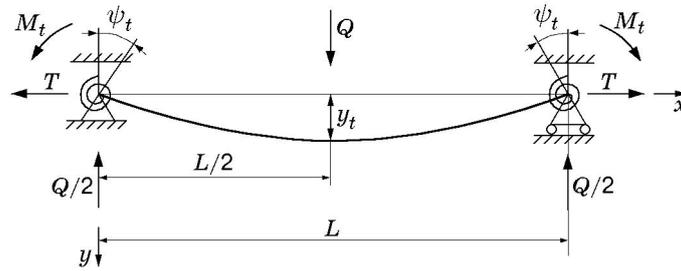


Рис. 5. Растянутый диагональный элемент крепления

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + 2q \frac{dU}{d\xi} + V \left( \frac{v^2}{2} - q^2 \right) = \frac{\beta^2 \xi \sin(q/2)}{4},$$

где  $v$  — безразмерный параметр критической нагрузки. Этот параметр может быть представлен в виде  $\sqrt{\pi/K}$ , где  $K$  — коэффициент эффективной длины. Граничные условия для уравнений (6) следующие:

$$U(0) = V(0) = \frac{1}{2} \frac{dU}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{dV}{d\xi} = 0. \tag{7}$$

При выводе уравнений (6) предполагалось, что  $I_1 = 2I_2$ .

**3. Аналитическое решение.** Введя обозначения  $a = 2q$ ,  $b = v^2 - q^2$ ,  $c = v^2/2 - q^2$ , запишем характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (6)

$$m^4 + (a^2 + b + c)m^2 + bc = 0. \tag{8}$$

Пусть  $m_1$  и  $m_2$  — корни модифицированного уравнения (8)

$$m^2 + fm + g = 0.$$

Тогда решения уравнений (6) записываются в виде

$$U = A \exp(p_1 \xi) + B \exp(-p_1 \xi) + C \exp(p_2 \xi) + D \exp(-p_2 \xi) + A_0 \xi + A_1,$$

$$V = Av_1 \exp(p_1 \xi) - Bv_1 \exp(-p_1 \xi) + Cv_2 \exp(p_2 \xi) - Dv_2 \exp(-p_2 \xi) + B_0 \xi + B_1,$$

где  $p_1 = \sqrt{m_1}$ ;  $p_2 = \sqrt{m_2}$ ;  $v_1 = (p_1^2 + b^2)ap_1$ ;  $v_2 = (p_2^2 + b^2)/(ap_2)$ .

Используя метод неопределенных коэффициентов [22], можно определить коэффициенты, входящие в частное решение:

$$A_0 = \beta^2 \cos(q/2)/(2(v^2 - q^2)), \quad B_0 = \beta^2 \sin(q/2)/(2(v^2 - 2q^2)),$$

$$A_1 = 2qB_0/(v^2 - q^2), \quad B_1 = -2qA_0/(v^2/2 - q^2).$$

Используя краевые условия (7), можно определить коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , а затем выписать точное выражение для величины  $U$  при  $\xi = 1/2$  [3].

Рассмотрим предварительно закрученный упругий стержень длиной  $L$  под действием растягивающей силы  $T$  и той же поперечной нагрузки  $Q$  (рис. 5). Дифференциальные уравнения изгиба аналогичны уравнениям для сжатого стержня, в которых величины  $v^2$  и  $\beta^2$  нужно заменить соответственно на  $\alpha^2 = \sqrt{TI^2/(EI_2)}$  и  $-\beta^2$ . Аналогично определяется величина  $U$  для растянутого стержня. Определяя поперечные жесткости  $k_t$  и  $k_p$  для растянутого и сжатого стержней как  $\beta^2/U_t$  и  $-\beta^2/U_p$  соответственно, где  $U_t$ ,  $U_p$  — смещения в точке соединения, условие непрерывности перемещений  $U_t = U_p$  в этой точке можно записать в виде

$$k_p + k_t = 0. \tag{9}$$

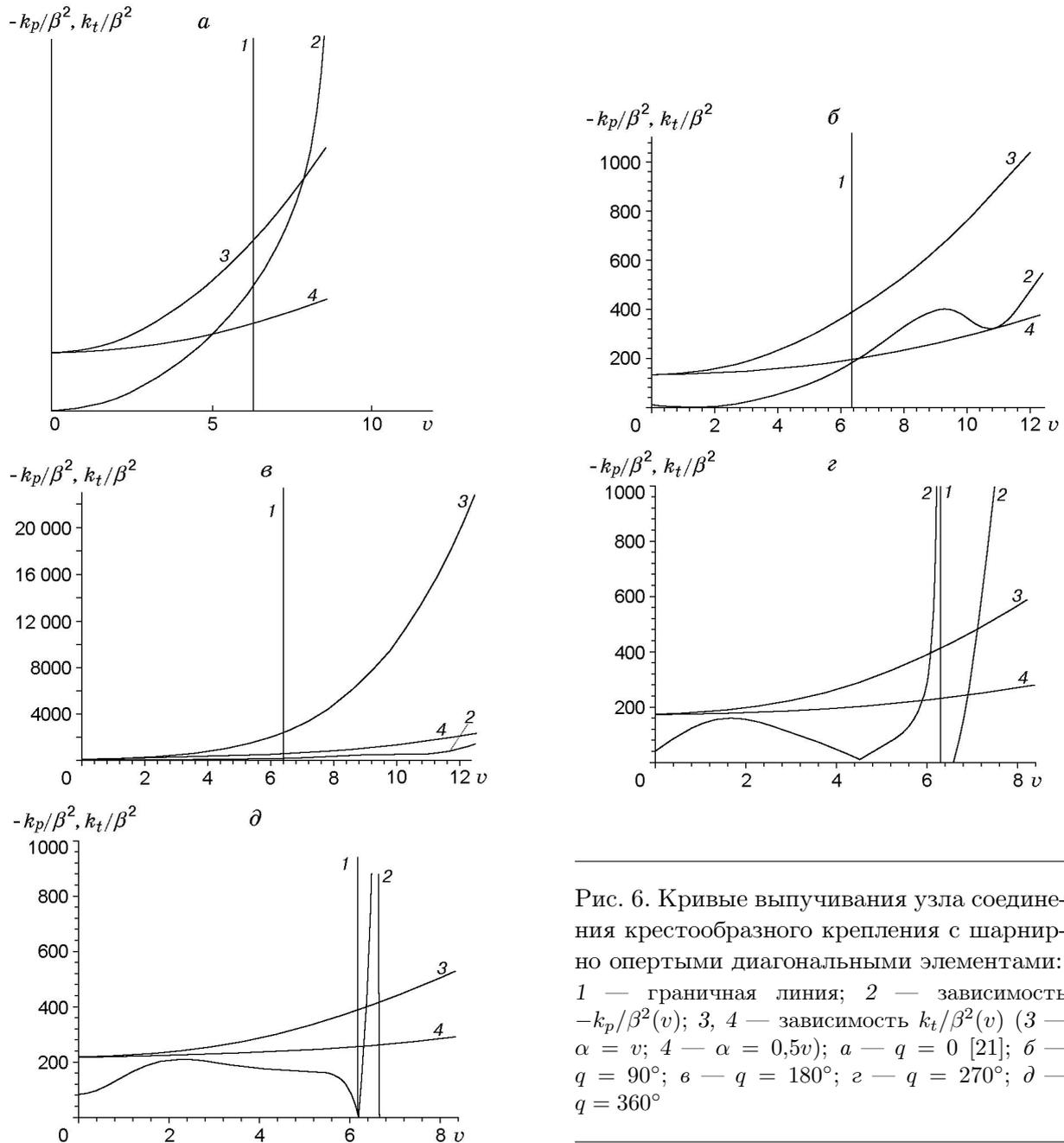


Рис. 6. Кривые выпучивания узла соединения крестообразного крепления с шарнирно опертыми диагональными элементами: 1 — границная линия; 2 — зависимость  $-k_p/\beta^2(v)$ ; 3, 4 — зависимость  $k_t/\beta^2(v)$  (3 —  $\alpha = v$ ; 4 —  $\alpha = 0,5v$ ); а —  $q = 0$  [21]; б —  $q = 90^\circ$ ; в —  $q = 180^\circ$ ; г —  $q = 270^\circ$ ; д —  $q = 360^\circ$

**4. Результаты.** Громоздкие алгебраические вычисления и операции дифференцирования выполнены с помощью программного продукта Maple-5. Результаты аналитических вычислений приведены в [3].

Решение уравнения (9) зависит только от параметров  $\alpha$ ,  $v$ ,  $q$  и справедливо для любых длин стержней, изгибных жесткостей, величин сжимающих и растягивающих усилий.

Очевидно, что  $v < 2\pi$  при  $q = 0$ . Это неравенство следует из определения эйлеровой критической нагрузки. В случае  $v > 2\pi$  и  $q = 0$  преобладают антисимметричные моды [21]. На рис. 6, 7 представлено графическое решение уравнения (9) для различных значений  $q$  и отношения  $\alpha/v$ . Кривая 2 — график зависимости  $-k_p/\beta^2(v)$ , кривые 3, 4 — графики зависимости  $k_t/\beta^2(v)$  для различных значений отношения  $\alpha/v$ . Решениям уравнения (9) соответствуют точки пересечения кривой 2 с кривыми 3, 4. Прямая 1 является граничной

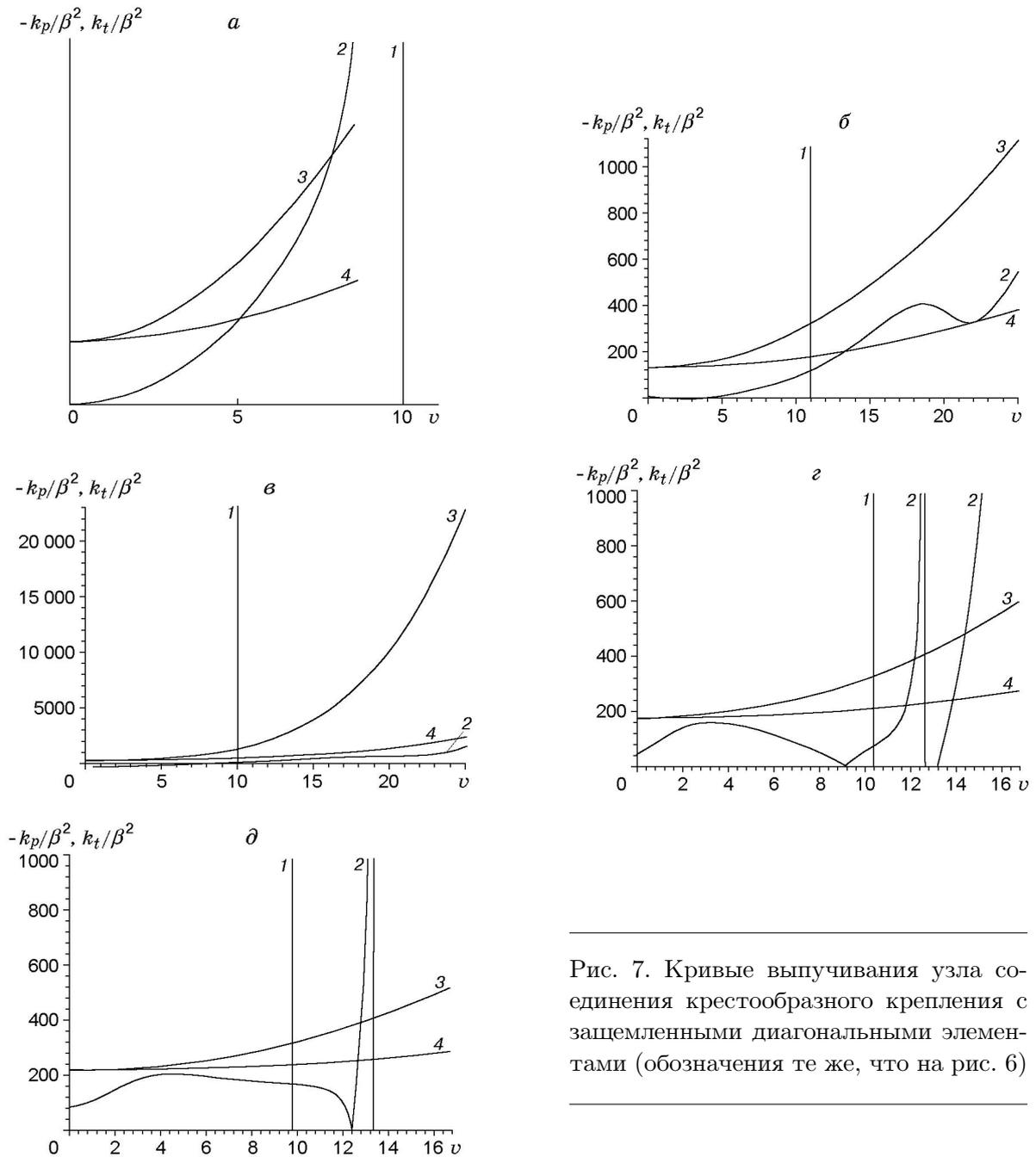


Рис. 7. Кривые выпучивания узла соединения крестообразного крепления с зашеченными диагональными элементами (обозначения те же, что на рис. 6)

линей. Точки, расположенные слева от этой прямой, соответствуют решениям с симметричной первой модой потери устойчивости. Точки, расположенные правее прямой 1, соответствуют решениям с неустойчивой симметричной модой. Данные о положении прямой 1 взяты из [2].

Для крестообразного крепления с шарнирно закрепленными концами стержней в случае  $\alpha = \nu$  (что обычно имеет место) решению соответствует точка, лежащая справа от прямой 1 при  $q = 0$ . Поэтому первая мода антисимметрична [21]. При  $q = 90, 180^\circ$  для этого же случая решению соответствуют точки, лежащие справа от прямой 1, при  $q = 270, 360^\circ$  — слева от прямой 1. Это означает, что первая мода симметрична только при  $q = 270, 360^\circ$ .

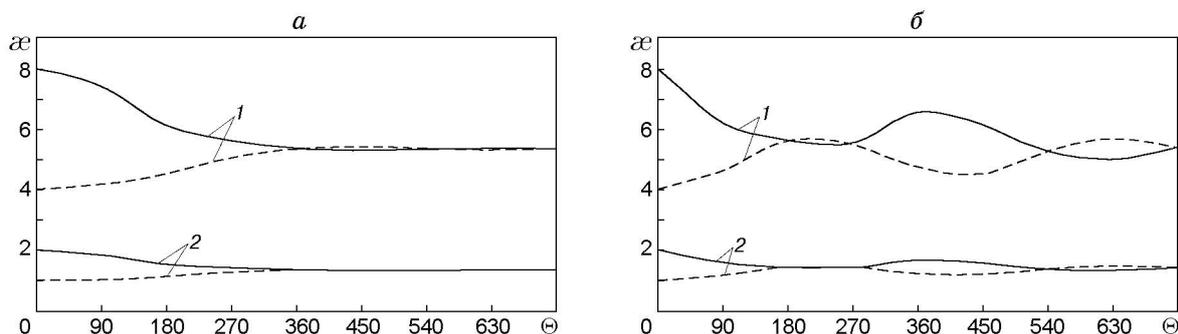


Рис. 8. Зависимость коэффициента критической нагрузки предварительно закрученного диагонального элемента от полного угла закручивания:

1 — несимметричные моды выпучивания, 2 — симметричные; сплошные кривые — первая мода, штриховые — вторая мода; а — шарнирное опирание; б — защемление

Если  $\alpha = 0,5v$ , то при  $q = 0, 180, 360^\circ$  решениям соответствуют точки, лежащие слева от прямой 1, а при  $q = 90, 270^\circ$  — справа от прямой 1. Это означает, что первая мода потери устойчивости антисимметрична только при  $q = 90, 270^\circ$ . Очевидно, что при увеличении отношения  $T/P = \alpha/v$  преобладающими становятся антисимметричные моды. Более того, при  $q = 180^\circ$  антисимметричные моды преобладают даже при малых значениях  $\alpha/v$  вследствие того, что сечение, находящееся в точке пересечения стержней, поворачивается на угол  $q = 90^\circ$ .

Решая соответствующие однородные дифференциальные уравнения, можно вычислить критические нагрузки для различных значений полного закручивания. Результаты получаются те же, что и в [2], при отношении моментов инерции сечения  $\rho = I_2/I_1 = 2$ . Результаты этих расчетов представлены в виде графиков на рис. 8. По оси абсцисс откладывается полный угол закручивания  $\Theta$ , по оси ординат — величина  $\alpha$  — отношение критической нагрузки предварительно закрученного стержня к критической нагрузке незакрученного стержня. Нижняя пара кривых соответствует симметричным модам выпучивания, верхняя — несимметричным. Из приведенных графиков следует, что критическая нагрузка, соответствующая первой моде выпучивания, увеличивается с увеличением угла закручивания, а соответствующая второй моде быстро уменьшается.

**Геометрия крепления.** В X-образных креплениях стержни должны быть соединены точно в их средних сечениях, чтобы обеспечить передачу усилий. Однако для предварительно закрученных стержней проблема усложняется, так как при проектировании узлов соединения в этом случае необходимо учитывать угол закручивания.

Как следует из рис. 8,а, в случае шарнирного закрепления при угле закручивания, близком к  $360^\circ$ , происходит сближение критических нагрузок, соответствующих первой и второй модам выпучивания. Это означает невозможность дальнейшего увеличения критической нагрузки путем предварительного закручивания. В симметричных X-образных креплениях, в которых стержни соединены в средних сечениях, поворот одного конца стержня относительно другого на  $360^\circ$  означает поворот сечения в узле соединения на  $180^\circ$ . То же справедливо и для другого стержня. Это означает, что в узле соединения сечения стержней должны быть повернуты на  $180^\circ$ . Поскольку конструктивные секции состояются из перпендикулярно расположенных участков креплений, обеспечить такой поворот сечений несложно.

В случае защемления, как это следует из рис. 8,б, наибольшее увеличение критической нагрузки достигается при закручивании на угол от  $180$  до  $270^\circ$ . Как отмечено выше, конструктивные секции состояются из перпендикулярно расположенных участков

креплений. В этом случае сложно обеспечить соединение с нужным углом закручивания. В симметричном креплении надежное соединение будет только в том случае, если полный угол закручивания будет кратным  $180^\circ$ . Таким образом, единственным возможным углом закручивания в этом случае является угол  $180^\circ$ . При этом среднее сечение будет повернуто на  $90^\circ$  и отдельные крепления можно надежно соединить друг с другом.

Для промежуточных случаев полужестких креплений следует построить зависимости критической нагрузки от полного угла закручивания и на их основе разработать практические рекомендации.

Следует отметить, что в случае несимметричной топологии конструкции угол закручивания, обеспечивающий надежное соединение, существенно зависит от геометрии.

**6. Выводы.** Уравнение (9) позволяет определить критические нагрузки для диагональных элементов произвольной длины, различных значений изгибной жесткости, различных сжимающих и растягивающих усилий.

Во всех рассмотренных случаях предварительное закручивание увеличивает критическую нагрузку, соответствующую первой моде выпучивания, и уменьшает нагрузку, соответствующую второй моде. Из приведенных результатов (см. рис. 8) следует, что с увеличением угла закручивания критические нагрузки, соответствующие первой и второй модам, сближаются. В зависимости от типа граничных условий и моментов инерции поперечных сечений предварительное закручивание стержней позволяет повысить критическую нагрузку в пределах от 40 до 100 % и даже выше. Однако в данной работе вопросы, связанные с конструированием таких узлов креплений, не рассматривались, и она является только первым шагом на этом пути.

Представленные результаты могут быть полезны при разработке узлов крепления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Tabarrok B., Xiong Y.** On the buckling equations for spatial rods // Intern. J. Mech. Sci. 1989. V. 31. P. 179–192.
2. **Tabarrok B., Xiong Y.** On buckling of pretwisted columns // Intern. J. Solids Struct. 1990. V. 26, N 1. P. 59–72.
3. **Shadnam M.** Study of stability of pretwisted members in concentric bracing system: Thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of master of sci. in struct. engng. Tegrans: Iran Univ. Sci. Technol., 2000.
4. **Ziegler H.** Die Knickung des verwundenen Stabes // Schweiz. Bauzeitung. 1948. Bd 66. S. 463–465.
5. **Ziegler H.** Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen // Z. angew. Math. Phys. 1951. Bd 2. S. 265–289.
6. **Lüscher E.** Bemerkungen zur Knickung des verwundenen, einseitig eingespannten Stabes // Schweiz. Bauzeitung. 1953. Bd 71. S. 172, 173.
7. **Frisch-Fay R.** Buckling of pre-twisted bars // Intern. J. Mech. Sci. 1973. V. 15. P. 171–181.
8. **Gupta R. S., Rao S. S.** Finite element eigenvalue analysis of tapered and twisted Timoshenko beams // J. Sound Vibration. 1978. V. 56. P. 187–200.
9. **Celep Z.** Finite element stability analysis of pretwisted Beck's column // Ingenieur-Archiv. 1984. Bd 54. S. 337–344.
10. **Celep Z.** Dynamic stability of pretwisted columns under periodic axial loads // J. Sound Vibration. 1985. V. 103. P. 35–42.
11. **Celep Z.** Stability of pre-twisted bars // Intern. J. Mech. Sci. 1986. V. 15. P. 171–178.

12. **DeWolf J. T., Pelliccione J. F.** Cross-bracing design // J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1979. V. 105. P. 1379–1391.
13. **Kitipornchai S., Finch D. L.** Stiffness requirements for cross bracing // J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1986. V. 112. P. 2702–2707.
14. **Wang D. Q., Bores A. P.** Theoretical study of stability criteria for X-bracing systems // J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1992. V. 118. P. 1357–1364.
15. **Stoman S. H.** Stability criteria for X-bracing systems // J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1988. V. 114. P. 1426–1434.
16. **Stoman S. H.** Effective length spectra for cross bracings // J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1989. V. 115. P. 3112–3122.
17. **Knapp A. E., Dixon D. A.** The use of X-bracing in fixed offshore platforms // Soc. Petrol. Engrs. J. 1973. V. 13. P. 75–83.
18. **Thevendran B. V., Wang C. M.** Stability of nonsymmetric cross bracing systems // J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1993. V. 119. P. 169–180.
19. **El-Tayem A. A., Goel S. C.** Effective length factor for the design of X-bracing systems // Engng J. 1986. V. 23. P. 41–45.
20. **Kemp A. R., Behncke R. H.** Parametric study of bracing in lattice towers // Proc. Sessions related to steel struct. at struct. congress. N. Y.: Amer. Soc. Civ. Engrs, 1989. P. 452–461.
21. **Segal F., Levy R., Rutenberg A.** Design of imperfect cross bracings // J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1994. V. 120. P. 1057–1075.
22. **Boyce W. E., DiPrima R. C.** Elementary differential equations and boundary value problems. N. Y.: John Wiley and Sons, 1985.

*Поступила в редакцию 5/XI 2001 г.*

---