ЛИТЕРАТУРА

1. **Бурка А. Л., Чиркашенко Е. П.** Радиационно-кондуктивный теплообмен в пористом твердом теле // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1986.— Вып. 3.
2. **Дудкин В. В., Оксогоев А. А.** Схема МКЭ в коллокациях к исследованию связанных задач аэроупругости мягких оболочек // Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов: Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф.— М., 1986.
3. **Канторович Л. В.** О методе Ньютона // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1949.— Т. 28.

г. Новосибирск *Поступила 19/VII 1991 г.*

УДК 53.082.4

А. Э. Пуро

КВАЗИИЗОТРОПНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СЛАБОЙ АКУСТОУПРУГОСТИ

Фундаментальная задача акустоупругости — установление связей между параметрами распространяющейся ультразвуковой волны и компонентами тензора предварительного нагружения [1—3]. Так как акустоупругие эффекты очень малы, рассмотрение задач обычно [3] проводится в линеаризованной постановке. При этом в большинстве работ ограничиваются случаем движения волны вдоль одного из главных направлений тензора преднапряжений, когда разрешающие уравнения акустоупругости упрощаются [1—5]. Исключение составляет работа [6], где получены в первом приближении формулы для абсолютных разностей фаз. Явление двулучепреломления (вращение поляризации сдвиговых волн на луче и изменение фаз за счет этого вращения) в ней не было выяснено с достаточной степенью точности. Ниже для анализа этого эффекта привлекается метод квазиизотропного приближения [7]. Полученные формулы позволяют без существенных изменений применить к задачам акустоупругости теорию, разработанную в интегральной фотоупругости [8, 9]. При сравнительном анализе этих явлений [4] разбираемые в настоящей работе вопросы не нашли адекватного отражения.

1. Будем исходить из выражения плотности энергии деформации (внутренней энергии), отнесенной к единице массы среды [1]:

$$W = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\lambda}{2} K_1^2 + \mu K_2 + \frac{1}{6}\nu_1 K_1^3 + \nu_2 K_1 K_2 + \frac{4}{3}\nu_3 K_3\right).$$

Здесь $K_1 = E_{ii}$; $K_2 = E_{ij}E_{ji}$; $K_3 = E_{ij}E_{kj}E_{ki}$; λ, μ — коэффициенты Ламе; ν_1, ν_2, ν_3 — упругие постоянные третьего порядка; $E_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_i^0 + \frac{\partial}{\partial x_i} u_k^0 + \frac{\partial}{\partial x_i} u_n^0 \frac{\partial}{\partial x_k} u_n^0\right)$ — тензор деформаций Коши — Грина; $u_i^0 = u_i + w_i$ — вектор деформаций, представленный в виде суммы деформаций предварительного нагружения u_i и ультразвуковой волны w_i; ρ — плотность среды в недеформированном состоянии; по повторяющимся индексам применяется тензорное правило суммирования. Решение проводится в лагранжевой ортогональной системе координат. Среда считается первоначально изотропной и однородной.

При выводе разрешающих уравнений используется разложение по трем малым параметрам [6]: 1) линеаризованный тензор предварительного нагружения σ_{ij} считается малым относительно постоянных Ламе ($|\sigma_{ij}|/\mu = \varepsilon_0 \leqslant 10^{-3}$—$10^{-5}$); 2) тензор напряжений ультразвуковой волны на порядок меньше тензора σ_{ij}; 3) длина ультразвуковой волны λ, по крайней мере, на порядок меньше характерного размера поля предварительного напряжения. Можно показать [1], что с точностью до членов первого порядка малости (относительно ε_0) включительно движение ультразвуковой волны описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left[C_{nmjs}\frac{\partial}{\partial x_s}w_j\right]=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_n. \tag{1.1}$$

Значения компонент тензора C_{nmjs}, линеаризованного относительно тензора предварительных деформаций ε_{ij}, соответственно равны

$$C_{nmjs}=c_{nmjs}+c_{mskl}\varepsilon_{kl}\delta_{nj}+c_{nmps}\frac{\partial}{\partial x_p}u_j+c_{pmjs}\frac{\partial}{\partial x_p}u_n+c_{nmjskl}\varepsilon_{kl}.$$

Здесь $c_{nmjs}=\lambda\delta_{nm}\delta_{js}+\mu(\delta_{nj}\delta_{ms}+\delta_{ns}\delta_{mj})$; значения тензора c_{nmjskl} приведены в [1, 2].

Заметим, что уравнение (1.1) по сути дела описывает распространение ультразвуковой волны в анизотропной среде с несимметричным тензором напряжений: $C_{nmjs}=C_{jsnm}$ обладает более низкой симметрией, чем c_{nmjs}, и не всегда $C_{nmjs}=C_{nmsj}$. Вместе с тем данное уравнение не учитывает затухание волн и для него справедлив закон сохранения энергии [10].

Для вывода этого закона свернем обе части (1.1) с $\partial w_n/\partial t$ и после преобразований запишем как

$$\frac{\partial}{\partial t}E+\frac{\partial}{\partial x_m}S_m=0, \tag{1.2}$$

где $E=\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}w_n\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}w_n\right)+C_{nmjs}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}w_n\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_s}w_j\right)\right]$ имеет смысл плотности энергии акустической волны; $S_m=-C_{nmjs}\frac{\partial}{\partial x_s}w_j\frac{\partial}{\partial t}w_n$ — вектор потока энергии.

Решение уравнения (1.1), согласно методу геометрической акустики, будем разыскивать в виде

$$w_i=W_i\exp i\omega(\varphi-t). \tag{1.3}$$

Подстановкой пробного решения (1.3) уравнение (1.1) преобразуется (общий множитель $\exp i\omega(\varphi-t)$ в уравнении опущен):

(1.4)

$$[\rho\omega^2W_n-C_{nmjs}k_mk_sW_j]+i\left[2\rho\omega\frac{\partial}{\partial t}W_n+C_{nmjs}\left(k_m\frac{\partial}{\partial x_s}W_j+k_s\frac{\partial}{\partial x_m}W_j\right)+\right.$$
$$\left.+W_j\frac{\partial}{\partial x_m}(C_{nmjs}k_s)\right]+\frac{\partial}{\partial x_m}\left[C_{nmjs}\frac{\partial}{\partial x_s}W_j\right]-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}W_n=0$$

($k_i=\omega\partial\varphi/\partial x_i$ — компоненты волнового вектора).

При сделанных предположениях (характерный размер поля нагружений значительно превосходит длину волны λ) модуль волнового вектора $k=2\pi/\lambda$ выступает в роли большого параметра и к решению уравнения (1.4) применим лучевой метод [5].

В нулевом приближении этого метода решение системы дифференциальных уравнений сводится к решению алгебраической системы

$$[\rho\omega^2\delta_{nj}-k^2C_{n3j3}]W_j=0. \tag{1.5}$$

Без исключения общности рассмотрения здесь введена локальная система координат так, что ось $x_3=z$ направлена вдоль волнового вектора **k**.

Совместим оси $x_1=x$ и $x_2=y$ с главными направлениями акустического тензора $c_{nj}=C_{n3j3}$ в плоскости x, y. В дальнейшем аналогично фотоупругости эти направления будем называть квазиглавными в плоскости x, y.

Система однородных уравнений (1.5) имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю:

$$\det[\rho v^2\delta_{nj}-c_{nj}]=0. \tag{1.6}$$

Это условие определяет фазовые скорости $v = \omega/k$ продольных v_p и поперечных v_s волн.

Для произвольного анизотропного тела решение уравнения (1.6) возможно только численными методами. Особенности решения (1.6) для линеаризованной модели произвольного нелинейного тела рассмотрены в [10]. В рамках используемых допущений (на практике скорости волны не превосходят 10^{-4} [4]) анализ соотношений (1.6) упрощается. В принятой системе координат характеристическое уравнение можно преобразовать:

$$(1.7) \qquad (c_{33} - \rho v^2) = \frac{c_{31}^2}{c_{11} - \rho v^2} - \frac{c_{32}^2}{c_{22} - \rho v^2}.$$

Из (1.7) видно, что с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно ε_0 скорость квазипродольной волны v_p находится так же, как и в случае распространения вдоль одного из главных направлений, т. е. правую часть уравнения (1.7) считаем равной нулю:

$$(1.8) \qquad v_p = v_{p0} + \alpha(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \beta\sigma_{zz}.$$

Здесь $v_{p0} = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$ — скорость продольной волны в отсутствие напряжений; α, β — постоянные, определяемые через константы упругости второго и третьего порядков [2].

Подстановкой v_p в уравнение (1.5) находим с точностью до первого порядка малости включительно поляризацию квазипродольной волны (c_{13}, c_{23}, $\lambda + \mu$) (как собственный вектор акустической матрицы). Величина W_z определяется начальными данными, траекторией лучей и уравнением переноса. Так как возмущение акустического тензора, обусловленное преднапряжением, незначительно, то искривлением лучей в первоначально изотропном теле можно пренебречь.

Уравнение переноса, согласно лучевому методу, получается приравниванием нулю членов, содержащих k в первой степени в (1.1). Вместо уравнения переноса можно использовать закон сохранения энергии, который с точностью до членов первого порядка малости принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} E_0 + \frac{\partial}{\partial x_m} (v_m E_0) = 0,$$

где $E_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 W_z^2$ — среднее значение плотности энергии; $v_{m3} = [\delta_{m3} + (1 - \delta_{m3})(C_{3m33} + c_{m3})/c_{33}]v_p$ — вектор групповой скорости квазипродольной волны. Как видно из вышеприведенной формулы, групповая скорость не совпадает по направлению с фазовой; проблемы, связанные с этим эффектом, в измерительном плане обсуждаются в [11].

2. Нулевое приближение квазипоперечных волн будем разыскивать в форме [7]

$$(2.1) \qquad w_i = W_i \exp i\left(\int_0^z k(l)\,dl - \omega t\right) \quad (i = x, y).$$

Здесь $k^2 = 2\rho\omega^2/(c_{11} + c_{22})$ определяет среднее волновое число поперечных волн. После подстановки (2.1) в (1.4) с учетом малости членов получаем укороченную систему

$$i\left[2\rho\omega\frac{\partial}{\partial t} + 2c_{11}k\frac{\partial}{\partial z}\right]W_x = k^2\left[\frac{c_{11} - c_{22}}{2} W_x + c_{12}W_y\right],$$

$$i\left[2\rho\omega\frac{\partial}{\partial t} + 2c_{22}k\frac{\partial}{\partial z}\right]W_y = k^2\left[c_{12}W_y + \frac{c_{22} - c_{11}}{2} W_x\right],$$

которую в нулевом приближении можно записать в матричном виде

$$(2.2) \qquad \left[\frac{1}{v_{s0}}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right]\begin{Vmatrix} W_x \\ W_y \end{Vmatrix} = -iCP\begin{Vmatrix} W_x \\ W_y \end{Vmatrix},$$

где $v_{s0} = \sqrt{\mu/\rho}$; $C = \dfrac{\omega(\mu+\nu_3)}{2v_{s0}\mu^2} = \dfrac{\pi(\mu+\nu_3)}{\lambda\mu^2}$;

$$P = \begin{Vmatrix} \dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \dfrac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2} \end{Vmatrix}.$$

При вычислении значений акустоупругой постоянной C учитывалось, что

$$c_{11} - c_{22} = \frac{\mu+\nu_3}{\mu}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}),\quad c_{12} = \frac{\mu+\nu_3}{\mu}\sigma_{xy}.$$

Ранее уравнения (2.2) были выведены только для распространения волн вдоль главного направления тензора предварительных напряжений [5]. Естественно, что форма уравнений в низшем приближении не зависит от того, совпадает или нет направление распространения волны с главным направлением.

Дальнейшее уточнение квазипоперечных волн осуществляется так же, как и квазипродольных: после нахождения W_x, W_y из (2.2) продольную часть получаем из (1.5): $W_z = -(c_{13}W_x + c_{23}W_y)/(\lambda + \mu)$; закон сохранения определяет амплитуду и групповую скорость волны.

Существенно, что уравнения двулучепреломления (2.2) с точностью до постоянной C совпадают с уравнениями двулучепреломления фотоупругости, решение которых было достаточно полно исследовано в [8]. Приближенное решение (2.2) связывает в относительно простой форме экспериментально определяемые параметры и напряжение [12, 13]:

$$\Delta\cos 2\psi = C\int \sigma_{xx} + \sigma_{zz}dz,\ \Delta\sin 2\psi = 2C\int \sigma_{xz}dz. \tag{2.3}$$

Здесь угол ψ (параметр изоклины) и Δ (разность фаз) поперечных волн определяются из измерений так же, как и в случае плоского образца.

Используя уравнения равновесия, можно преобразовать лучевые интегралы (2.3) к форме [14, 15]

$$\int \sigma_{zz}dl = \frac{\partial}{\partial z}\int_m^{m_1} H(m', \theta, z)\,dm' - A(m, \theta, z), \tag{2.4}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}dl = -\frac{\partial}{\partial m}H(m, \theta, z) + \sigma_{zz}\operatorname{ctg}\gamma\,\frac{d}{dm}\Gamma\Big|_{l_0}^{l_1},$$

сводящей задачу нахождения σ_{zz}, $\partial\sigma_{zz}/\partial z$ к стандартной процедуре обращения преобразования Радона. В выражении (2.4) m_1 — любая из двух крайних точек проекций контура сечения на ось m; γ — угол между осью z и n — нормалью к боковой поверхности; Γ — длина дуги на контуре, отсчитываемая от произвольной точки; значения $\sigma_{zz}(l_1)$, $\sigma_{zz}(l_0)$ на концах луча определяются из граничных условий с помощью касательного просвечивания в этих точках при условии выпуклости контура.

Привлечение уравнений совместности деформаций дает возможность восстановить остальные компоненты тензора напряжений решения первого рода (не содержащего нормальное вращение) уравнений Ламе [15]. Конкретный алгоритм такой реконструкции осесимметричного напряженного состояния рассмотрен в [16].

В акустоупругости добавочное использование продольной волны позволяет найти первый инвариант тензора напряжений. Действительно, изменение времени прохождения продольной волны (разности фаз), обусловленное преднапряжением, описывается лучевым интегралом

$$C_0\int \sigma_{ll} + C_1(\sigma_{mm} + \sigma_{zz})\,dl = C_0K(m, \theta, z),$$

где C_0, C_1 — постоянные, определяемые параметрами v_{p0}, α, β формулы (1.8). Применение обратного преобразования Радона к линейной комбинации лучевых интегралов

$$K + (1 - C_1) A = \int \sigma_{ll} + \sigma_{mm} + (1 + 2C_1) \sigma_{zz} dl$$

восстанавливает значение двумерного инварианта $\sigma_{ll} + \sigma_{mm} = \sigma_2$, здесь считается, что значение σ_{zz} известно из предшествующих измерений (2.4). Это позволяет, используя только уравнения равновесия и граничные условия на свободной боковой поверхности, определить отдельно компоненты σ_{xx}, σ_{yy}.

Действительно, исключая из уравнений равновесия σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yz}, получаем соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_{xx} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_{zz},$$

которое заменой $\sigma_{yy} = \sigma_2 - \sigma_{xx}$ сводится к двумерному уравнению Пуассона [15]

$$\Delta_+ \sigma_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_{zz}$$

с краевым условием $\sigma_{xx} = \sigma_2 n_y^2$. Значение σ_{xy} находится из уравнений равновесия при помощи криволинейного интеграла [15].

Предлагаемый простейший вариант теории позволяет довольно просто проводить обобщения на случай учета нелинейного затухания [17]. Для стационарных сигналов такое обобщение сводится к введению комплексных упругих постоянных третьего порядка. Модификация методов томографии тензорного поля напряжений с учетом затухания осуществляется аналогично томографии скалярного поля [18] и поэтому здесь излагаться не будет, тем более что экспериментальная сторона этого вопроса в настоящее время мало исследована.

В заключение отметим, что в случае преодоления трудностей, связанных с измерением фазовых и поляризационных параметров ультразвуковых волн в трехмерных объектах, полученные соотношения позволяют применить томографические методы для акустодиагностики преднапряжения [8, 15, 16].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pao Y., Sachse W.** Acoustoelasticity and ultrasonic measurement of residual stress // Phys. Acoust.— 1984.— V. 17.— P. 61.
2. **Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.** Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 3. Акустоэлектроупругость.— Киев: Наук. думка, 1988.
3. **Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.** Введение в акустоупругость.— Киев: Наук. думка, 1977.
4. **Hsu N.** Acoustical birefringence and the use of ultrasonic waves for experimental stress analysis // Exp. Mech.— 1974.— V. 14, N 5.
5. **Iwashimizu Y.** Ultrasonic wave propagation in deformed isotropic elastic materials // Int. J. Solids and Struct.— 1971.— V. 7, N 4.
6. **Конюхов Б. А., Шалашов Г. М.** О нерезонансных параметрических взаимодействиях упругих волн в изотропной твердой среде // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 5.
7. **Кравцов Ю. А., Орлов Ю. М.** Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
8. **Абен Х. К.** Интегральная фотоупругость.— Таллинн: Валгус, 1975.
9. **Aben H., Idnurm S., Puro A.** Inegrated photoelasticity in case of weak birefringence // 9th Itnern. Conf. on Experim. Mech., Copenhagen, Denmark, 1990: Proc.— V. 2.
10. **Петрашень Г. И.** Распространение волн в анизотропных упругих средах.— Л.: Наука, 1980.
11. **Никитина Н. Е.** Об одной составляющей погрешности измерений фазовой скорости ультразвука импульсным методом // Дефектоскопия.— 1989.— № 9.
12. **Aben H. K., Josepson J. I., Kell K. J.-E.** The case of weak birefringence in integrated photoelasticity // Optics and lasers in engineering.— 1989.— N 11.

13. **Келл К. Ю.-Э., Пуро А. Э.** Приближение очень слабой оптической анизотропии // Оптика и спектроскопия.— 1991.— Вып. 2.
14. **Пуро А. Э.** Томография при слабой оптической анизотропии // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. по вычислительной томографии.— Новосибирск, 1989.— Т. 1.
15. **Пуро А. Э.** Реконструктивная томография при слабой оптической анизотропии // ПМТФ.— 1991.— № 2.
16. **Aben H.** Tomographie optique des champs de contraints // Rev. Franç. Méc.— 1989.— N 1.
17. **Ravasoo A.** Some remarks on the quasi-linear theory of viscoelasticity // Изв. АН Эстонии. Сер. Физика. Математика.— 1991.— № 2.
18. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.** Математические задачи компьютерной томографии.— М.: Наука, 1987.

г. Таллинн *Поступила 31/I 1991 г., в окончательном варианте — 23/VII 1991 г.*

УДК 531.36 : 534.1

К. С. Матвийчук

ТЕХНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПРОТЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ, ПРОДОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ

Изучение устойчивости движения весьма протяженных динамических систем во многих случаях можно свести к задаче об устойчивости длинных стержней. На практике широко применяются длинные стержни, стержневые конструкции, взаимодействующие с внешним или внутренним потоком жидкости. При внешнем силовом воздействии такие стержни могут быть податливы к существенным перемещениям. Отсюда следует целесообразность использования необходимых нелинейных соотношений при исследовании динамического поведения таких систем [1, 2]. Учет сил взаимодействия движущегося стержня с внешним потоком жидкости приводит к более сложным задачам по сравнению с традиционными задачами, которые рассматриваются в механике стержней.

Настоящая работа посвящена изучению условий технической устойчивости [3—8] длинного прямолинейного стержня с переменным поперечным сечением при его продольной транспортировке в движущейся идеальной жидкости. Процесс описывается нелинейной системой трех дифференциальных уравнений в частных производных при неоднородных граничных условиях. Получены достаточные условия технической устойчивости системы на конечном и бесконечном промежутке времени и асимптотической технической устойчивости. Указаны условия, при выполнении которых возможна потеря устойчивости системы. Найдена формула критической скорости движения стержня в жидкости. Результаты получены на основе метода сравнения с привлечением прямого метода Ляпунова [4, 6—11].

1. Постановка задачи. Рассматриваем длинный гибкий стержень AB с переменным поперечным сечением, ось которого в исходном состоянии прямолинейна. Пусть такой стержень продольно транспортируется в идеальной несжимаемой жидкости в течение заданного промежутка времени $I_1 = [t_0, K] \subset I \equiv [t_0, +\infty)$ ($t_0 \geqslant 0$, $K = \text{const} > 0$) вдоль горизонтальной прямолинейной траектории с заданной скоростью $\mathbf{v}$. Рассматриваем текущую конфигурацию стержня [2]. Считаем, что стержень представляет однородное изотропное тело, деформируется геометрически нелинейно, деформации предполагаются малыми. Исследуем случай обтекания жидкостью стержня, расположенного несимметрично относительно потока жидкости. Тогда результирующая гидродинамическая сила $\mathbf{F}$ не совпадает с направлением потока. Она слагается из двух составляющих: $\mathbf{F}_c = (F_{1c}, F_{2c}, F_{3c})$ — гидродинамическая сила лобового сопротивления, направленная вдоль потока, и $\mathbf{F}_p = (F_{1p}, F_{2p}, F_{3p})$ — подъемная