

О ВДАВЛИВАНИИ ТОНКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Д. Д. Ивлев
(Воронеж)

Развитие теории вдавливания жестких тел в пластическую среду встречает ряд характерных трудностей, связанных с определением подвижной границы выпучившегося материала. Метода решения подобных задач в настоящее время нет. По существу известно лишь одно точное решение автомодельной задачи о вдавливании клина в пластическое полупространство, данное Хиллом, Ли и Таппером [1]. Однако в ряде случаев целесообразно использовать эффективные приближенные постановки.

В работе [2] в линеаризированной постановке рассматривалась плоская задача о вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство. Ниже рассматривается линеаризированная осесимметричная задача о вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство. Определяется поверхность выпучившегося материала. Обсуждается аналогия между линеаризованными задачами газовой динамики и теории идеальной пластичности.

1. Предположим, что некоторое жесткое осесимметричное тело вдавливается в жестко-пластическую среду. Если принять, что имеет место условие полной пластичности Треска, то задача сводится к решению системы квазилинейных уравнений гиперболического типа, определяющих напряженное и деформированное состояние среды.

Следует подчеркнуть, что задача является статически неопределимой, граничные условия формулируются как в напряжениях, так и в перемещениях (скоростях перемещений). Условие несжимаемости приводит к тому, что объем выпучившегося материала равен объему внедренной части жесткого тела. Однако это интегральное соотношение вовсе не определяет границы выпучивания.

Для определения границы выпучившегося материала следует использовать предположения о распределении на ней поверхностных усилий (чаще всего поверхность выпучившегося материала свободна от поверхностных нагрузок), о характере взаимодействия тела и среды (тело может быть гладким, шероховатым и т. п.) Таким образом, ряд граничных условий в напряжениях формулируется на неизвестной границе, положение которой определяется кинематикой и статикой деформирования. Для решения задачи необходимо последовательное рассмотрение процесса вдавливания с использованием всей системы уравнений, связанной достаточно сложной совокупностью граничных условий.

Линеаризированная постановка позволяет избежать ряд трудностей, возникающих при общей постановке задачи. В работе [2] показано, что в первом приближении кинематика явления определяется независимо от статической стороны, система уравнений, образно говоря, расщепляется, и это позволяет получить аналитическое решение. Отмеченные особенности сохраняются и в осесимметричных задачах.

Рассмотрим тонкое тело вращения в цилиндрической системе координат ρz . Вершину тела поместим в начало координат, ось вращения направим по оси z (фиг. 1). В дальнейшем ограничимся рассмотрением полуплоскости при $\rho \geq 0$.

Предположим, что в начальный момент времени пластическое полупространство занимает положение $z \leq 0$. В дальнейшем, обращая движение, будем считать, что жесткое тело вращения неподвижно, а пластическое полупространство смещается вверх по оси z с некоторой постоянной скоростью. Процесс вдавливания предполагается настолько медленным, чтобы можно было пренебречь влиянием сил инерции.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (1.1)$$

Предположим, что имеет место условие пластичности Треска

$$\frac{1}{4}(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + \tau_{\rho z}^2 = 1, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + \kappa \quad (\kappa = \pm 1) \quad (1.2)$$

Здесь и всюду в дальнейшем компоненты напряжений полагаются безразмерными, отнесенными к пределу текучести.

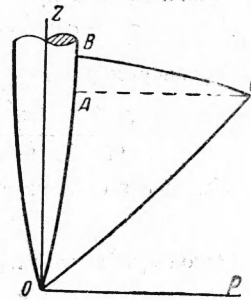
Соотношения, определяющие кинематику пластического течения, запишутся в виде

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \quad (\varepsilon_\rho - \varepsilon_z) \tau_{\rho z} = \gamma_{\rho z} (\sigma_\rho - \sigma_z) \quad (1.3)$$

Здесь

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}$$

где u, w — компоненты скорости перемещения вдоль осей ρ и z .



Фиг. 1

Уравнение границы вдавливаемого тела представим в виде

$$\rho = \delta Z(z), \quad Z(0) = 0 \quad (1.4)$$

где δ — малый безразмерный параметр. Решение задачи будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + \delta \sigma'_{ij}, \dots, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{\circ} + \delta^2 \epsilon'_{ij}, \dots, \quad u = u^{\circ} + \delta^2 u', \dots \quad (1.5)$$

где компоненты с кружочком относятся к исходному недеформируемому состоянию.

Характерно, что в соотношениях (1.5) первое приближение для напряжений входит как член разложения при первой степени малого параметра, а первое приближение для скоростей деформации и перемещений входит как член разложения при квадрате малого параметра. В обоих случаях выбор обуславливается необходимостью удовлетворения граничным условиям. Это предположение аналогично отчасти соответствующим допущениям в газовой динамике [3], оправданием их служит построение решения.

За исходное невозмущенное состояние следует взять состояние, отвечающее вдавливанию тела нулевой толщины

$$\sigma_{\rho}^{\circ} = \sigma_{\theta}^{\circ} = -2, \quad \sigma_z^{\circ} = \tau_{\rho z}^{\circ} = 0, \quad u^{\circ} = 0, \quad w^{\circ} = \text{const} \quad (1.6)$$

Уравнения равновесия для компонент возмущения сохраняют прежний вид

$$\frac{\partial \sigma'_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma'_{\rho} - \sigma'_{\theta}}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\tau'_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (1.7)$$

Условие пластичности приводит к соотношениям

$$\sigma'_{\rho} = \sigma'_{\theta} = \sigma'_z = \sigma' \quad (1.8)$$

Используя выражения (1.8), перенишем уравнения равновесия (1.7) в виде

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \frac{\tau'_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (1.9)$$

Введем функцию напряжений $\Phi = \Phi^{\circ} + \delta \Phi'$, положив

$$\sigma' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'}{\partial \rho}, \quad \tau'_{\rho z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \quad (1.10)$$

и тем самым удовлетворим второму уравнению (1.9); окончательно получим

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi'}{\partial \rho} = 0 \quad (1.11)$$

Уравнения для скоростей перемещений определяют несжимаемое бесдвиговое течение

$$\frac{\partial u'}{\partial \rho} + \frac{u'}{\rho} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial \rho} = 0 \quad (1.12)$$

Введем функцию тока $\psi = \psi^{\circ} + \delta^2 \psi'$, положив

$$u' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi'}{\partial z}, \quad w' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi'}{\partial \rho} \quad (1.13)$$

и тем самым удовлетворим первому уравнению (1.12); окончательно получим

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi'}{\partial \rho} = 0 \quad (1.14)$$

Таким образом, задача свелась к определению решений по существу одного и того же дифференциального уравнения (1.11), (1.14).

2. Рассмотрим граничные условия. Предположим, что вдавливаемое тело гладкое, другими словами, на границе тела отсутствуют касательные усилия. Поверхность выпучившегося материала, уравнение границы которой в плоскости ρz запишем в виде $z = \delta R(\rho) + h$, где h — глубина вдавливания, будем считать свободной от напряжений. Будем иметь

$$\sigma_{\rho} \cos(n\rho) + \tau_{\rho z} \cos(nz) = 0, \quad \tau_{\rho z} \cos(n\rho) + \sigma_z \cos(nz) = 0 \quad \text{при } z = \delta R(\rho) + h \quad (2.1)$$

где $(n\rho)$, (nz) — углы, образованные осями ρ и z с направлением внешней нормали к границе выпучившегося материала.

Условие отсутствия касательных усилий на границе тела имеет вид

$$\frac{1}{2} (\sigma_{\rho} - \sigma_z) \sin 2(n\rho) + \tau_{\rho z} \cos 2(n\rho) = 0 \quad (2.2)$$

Линеаризируя соотношения (2.1), (2.2), получим

$$\tau'_{\rho z} = 2 \frac{dR}{d\rho}, \quad \sigma'_z = 0 \quad \text{при } z = h \quad \tau'_{\rho z} = 2 \frac{dZ}{dz} \quad \text{при } \rho = 0 \quad (2.3)$$

Условия (2.3) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z} = -2\rho \frac{dR}{d\rho}, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при } z = h; \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial z} = -2\rho \frac{dZ}{dz} \quad \text{при } \rho = 0$$

Распределение нормальных усилий по поверхности тела определяется так:

$$p = \sigma_\rho \cos^2(n\rho) + \sigma_z \sin^2(n\rho) - \tau_{\rho z} \sin 2(n\rho)$$

Отсюда $p' = \sigma_\rho'$. Отметим, что проекция составляющей нормального давления к поверхности вдавливаемого тела на вертикальное направление является малой второго порядка.

Рассмотрим граничные условия для скоростей перемещения. Граница вдавливаемого тела в плоскости ρz является линией тока, поэтому вдоль границы тела должно иметь место

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{u}{w} \tag{2.4}$$

Используя соотношения (1.5), (1.6), (1.13), получим

$$\delta^2 \Psi' + \frac{1}{2} w^0 \rho^2 = 0 \tag{2.5}$$

Линеаризируя соотношение (2.5), будем иметь

$$\Psi'(0, z) = -\frac{1}{2} w^0 Z^2(z) \tag{2.6}$$

Другим ограничением, накладываемым на кинематику пластического течения, является условие непрерывности нормальных скоростей при переходе через границу жесткого и пластического состояний материала. Границей между жесткой и пластической областями в исходном состоянии является прямая

$$\rho - z = 0 \tag{2.7}$$

Для возмущенного состояния граница будет иной, и ее уравнение можно задать в виде

$$\rho - z + \delta\varphi(\rho, z) = 0$$

Нормальная составляющая скорости к границе жесткой области должна быть равна нулю, линеаризируя, запишем это условие в виде

$$u' + w' = 0 \quad \text{при } \rho - z = 0 \tag{2.8}$$

Условие (2.8) будет удовлетворено благодаря характеру выбранного решения, при этом будет выполнено более сильное условие

$$v' = w' = 0 \quad \text{при } \rho - z = 0 \tag{2.9}$$

Решение уравнения (1.14) при условии (2.6) возьмем в виде

$$\Psi'(\rho, z) = -w^0 \int_0^{z-\rho} \sqrt{(z-\xi)^2 - \rho^2} \frac{d^2 k}{d\xi^2} d\xi \tag{2.10}$$

где

$$k = \frac{1}{2} Z^2 \quad \text{при } z \geq 0, \quad k = 0 \quad \text{при } z \leq 0$$

Из (2.10), согласно (1.13), получим

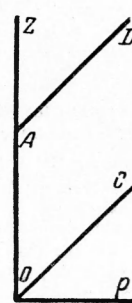
$$u' = \frac{w^0}{\rho} \int_0^{z-\rho} \frac{(z-\xi)}{\sqrt{(z-\xi)^2 - \rho^2}} \frac{d^2 k}{d\xi^2} d\xi$$

$$w' = -w^0 \int_0^{z-\rho} \frac{1}{\sqrt{(z-\xi)^2 - \rho^2}} \frac{d^2 k}{d\xi^2} d\xi \tag{2.11}$$

Легко видеть, что условие (2.9) имеет место. Искомое решение соответствует схеме, представленной на фиг. 2. В силу линеаризации влияние тела заменено некоторыми источниками возмущения, распределенными по оси z , влияние которых распространяется по характеристикам $\rho - z = \text{const}$. Таким образом, влияние источников на отрезке AO распространяется лишь на область $DAOC$.

Так как вдавливаемое тело не меняет своей формы и, следовательно, распределение источников неизменно, то характер течения является установившимся и распределение скоростей в некотором сечении mm_1 (фиг. 2) не зависит от времени.

Займемся определением формы выпучившейся поверхности пластического материала BC (фиг. 1). В соотношении теории идеальной пластичности время в явном виде не входит, поскольку исходные уравнения однородны относительно множителя dt —



Фиг. 2

дифференциала времени. Величины скоростей перемещений в теории идеальной пластичности непосредственно величинами напряжений не определяются, задается по существу лишь направление скорости. Перемещения определяются по граничным условиям.

При сдавливании жесткого тела граница пластического полупространства AC перейдет в линию BC — границу выпучившегося материала (фиг. 1). Всюду в области $OABCO$ можно определить линии тока. Приращения напряжений определены всюду вдоль линий тока, поэтому, перемещаясь последовательно вдоль линий тока, положение искомой границы следует определить из равенства объемов выпучившейся части материала и внедренной части лезвия.

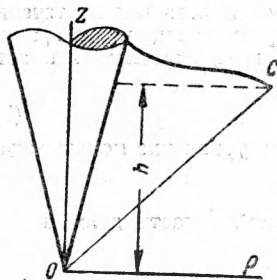
Легко видеть, что с рассматриваемой степенью точности задача сводится к определению профиля скоростей w' на AC (фиг. 1). В самом деле, область ABC (фиг. 1) имеет характерный размер по оси z порядка δ , поэтому с точностью до малых второго порядка все скорости вдоль линий тока в этой области равны между собой. Таким образом, материал смещается вдоль линий тока на величину, пропорциональную $\sqrt{u'^2 + w'^2}$. Если обозначить этот множитель пропорциональности через λ , то точка с координатами $\rho + \lambda u'$, $\lambda w'$ должна лежать на границе $z = \delta R(\rho) + h$.

Учитывая, что величина λ имеет порядок малости δ , получим

$$\lambda w' = \delta R(\rho + \lambda u') = \delta R(\rho) \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) указывает, что для определения искомой границы достаточно знать профиль скоростей w' , известный по второй формуле (2.11), и величину λ .

Из равенства объемов, полученных вращением областей AHO и ABC (фиг. 1) вокруг оси z , получим



Фиг. 3

$$\lambda^2 = \delta^2 \int_0^h Z^2 dz \Big| \int_{\delta Z(h)}^h \left(\frac{dw'}{d\rho} \right) \rho^2 d\rho \quad (2.13)$$

Очевидно, что величина скорости вдавливания w^0 не влияет на форму и размеры границы выпучившегося материала, так как силы инерции не учитываются.

Для случая вдавливания конического тела $Z(z) = \mu z$ ($\mu = \text{const}$) получим

$$\psi' = -\frac{1}{2} w^0 \mu^2 \left(z \sqrt{z^2 - \rho^2} - \rho^2 \operatorname{arcc} \operatorname{ch} \frac{z}{\rho} \right) \quad (2.14)$$

Профиль скоростей w' при глубине вдавливания $z = h$ определим по формуле

$$\psi' = w^0 \operatorname{arcc} \operatorname{ch} \frac{h}{\rho} \quad (\delta \mu h \leq \rho \leq h) \quad (2.15)$$

Граница выпучившегося материала при вдавливании конуса и пластическое полупространство в первом приближении изображена на фиг. 3. Интересно, что при $\rho < \sqrt{h/2}$ кривая границы вогнута, а при $\rho > \sqrt{h/2}$ выпукла ($\rho = \sqrt{h/2}$ — точка перегиба) по отношению к началу координат.

Определение поля напряжений приводит к несколько более сложной задаче, изучение которой представит несомненный интерес.

Близость между линеаризованными задачами теории идеальной пластичности и газовой динамики [3] позволяет использовать ряд известных результатов. Однако следует подчеркнуть, что, несмотря на то, что в случае несжимаемого идеально пластического тела мы пришли к уравнениям (1.11), (1.14), встречающимся в газовой динамике идеального сжимаемого газа, исходные предпосылки в обоих случаях совершенно различны.

Если в газовой динамике рассматривается безвихревое движение идеального сжимаемого баротропного газа [3], то в теории идеальной пластичности рассматривается бесдвиговое (по двум компонентам) течение несжимаемого материала.

Характерно, что обе по существу совершенно различные исходные предпосылки приводят к изучению одних и тех же уравнений.

Поступила 11 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

- Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехтеоретиздат, М., 1956.
- Ивлев Д. Д. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду, Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 10.
- Курант Г. и Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИИЛ, М., 1950.