УДК 536.2; 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ В МИКРОТРУБКАХ И МИКРОКАНАЛАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТОКА ТЕПЛА НА НИХ И С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ

Ю. Хаддут, А. Убарра*, Дж. Лахджомри*

Университет Ибн Зохра, Уарзазат, Марокко
* Университет Хасана II, Касабланка, Марокко
E-mails: youssefhaddout@gmail.com, aoubarra@gmail.com, lahjomri@hotmail.com

Построено аналитическое решение задачи о вынужденной конвекции в газовых скользящих ламинарных потоках, текущих в микротрубках и микроканалах с параллельными стенками, при наличии потока тепла на стенках канала и с учетом теплопроводности в осевом направлении канала. Температурное поле и число Нуссельта определены в предположении, что в области нагрева конечной длины течение является гидродинамически развитым. Решение задачи получено с использованием метода функционального анализа и разложения уравнения энергии на два дифференциальных уравнения в частных производных первого порядка. На границе газ — стенка ставятся условия проскальзывания первого порядка. Проведено сравнение полученного аналитического решения с известными численными решениями. Установлено, что температурное поле в области нагрева существенно зависит от теплопроводности в осевом направлении канала, разреженности потока и конечной длины области нагрева.

Ключевые слова: вынужденная конвекция, задача Гретца, скользящий поток, конечная область нагрева, теплопроводность в осевом направлении, метод функционального анализа.

DOI: 10.15372/PMTF20200606

Введение. Исследованию закономерностей конвективного теплопереноса и течения жидкости в микроканалах уделяется большое внимание, поскольку микроканалы широко используются при создании микроэлектрических и микромеханических систем [1]. В данной работе решается классическая нетривиальная задача о конвекции и диффузии — задача Гретца на микроуровне. Основной целью является исследование влияния конечной длины области нагрева на тепловые характеристики развитого течения газа в микротрубке и микроканале с параллельными стенками. Каналы такой геометрии используются в охлаждающих устройствах в микроэлектронике [2].

Исследование задачи с учетом теплопроводности в осевом направлении представляет интерес в силу неортогональности собственных функций в ней. Как правило, при изучении вынужденной конвекции в случае течения в макроканале теплопроводность в осевом направлении не учитывается. В случае течения со скольжением это явление необходимо учитывать, поскольку в микроканалах и при малых числах Пекле теплопроводность в осевом направлении играет важную роль. Существует большое количество работ, посвященных исследованию задачи о влиянии проводимости в направлении движения потока на вынужденную конвекцию в ламинарном течении в микротрубке и микроканале с параллельными стенками в отсутствие разрежения (обобщенная задача Гретца) [3]. Ранее при изучении течений в макроканалах с использованием классических методов выявлен ряд проблем: задача определения собственных функций эллиптического уравнения энергии не является самосопряженной, а соответствующие собственные функции и собственные числа не образуют полную систему. Поскольку собственные функции, содержащиеся в рядах, представляющих собой решение задачи, не являются ортогональными, классические методы определения коэффициентов разложений не применимы. В работах [4, 5] эта трудность преодолена путем разложения уравнения энергии на пару дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с использованием метода функционального анализа (теории самосопряженных операторов). Показано, что построенное аналитическое решение является простым с точки зрения вычислений, а метод — эффективным методом решения параболических задач. Этот метод был распространен на решение задач о турбулентном течении [3, 6, 7] и течении Гартмана [8].

В [9] приведен обзор работ, в которых с использованием аналитических и численных методов исследуется конвективный теплоперенос в микроканалах в режиме скользящего течения. Из этого обзора работ следует, что проводимость в направлении движения потока оказывает существенное влияние на распределение тепла во входной части микроканала. В [10] с использованием метода функционального анализа решена задача о вынужденной конвекции в скользящем потоке газа в микроканале при наличии изотермической области нагрева конечной длины и с учетом вязкой диссипации и работы давления. В работе [11] с использованием метода функционального анализа исследовано влияние теплопроводности в развитых тепловом и гидродинамическом потоках в микроканалах при наличии однородного потока тепла на стенках канала. Рассматривалась бесконечная область микроканала ($-\infty < x < +\infty$) с адиабатическими стенками при $x < 0$ и однородно нагретыми при $x \geqslant 0$.

Насколько известно авторам данной работы, не существует работ, в которых исследован теплоперенос в микроканалах при наличии потока тепла на стенках канала в конечной области. В известных работах рассматривалась полубесконечная область нагрева. Однако в приложениях используется только конечная область нагрева. Длина конечной области является параметром, от которого могут существенно зависеть тепловые характеристики потока.

Целью данной работы является построение аналитического решения задачи о вынужденной конвекции тепла в скользящем потоке газа в микротрубке и микроканале с параллельными стенками при наличии на них потока тепла с учетом теплопроводности в осевом направлении потока и разреженности газа. Уравнение энергии решается с использованием метода, предложенного в [5]. Преимущество этого метода заключается в том, что после разложения уравнения энергии получается самосопряженная задача Штурма — Лиувилля.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается гидродинамически развитый ламинарный поток в длинной круглой микротрубке или микроканале с параллельными плоскими стенками с заданным профилем скорости $u_x(Y)$. На рис. 1 показаны геометрия канала и система координат. Переменная Y и характерная длина L обозначают соответственно радиальную координату r и радиус R в случае течения в микротрубке или поперечную координату y и половину высоты канала h в случае течения в плоском канале. Таким образом, $Y = r$ или $Y = y$ и $L = R$ или $L = h$. При $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant x_1$ стенки микроканалов теплоизолированы, при $0 < x < x_1$ на стенки канала посту-

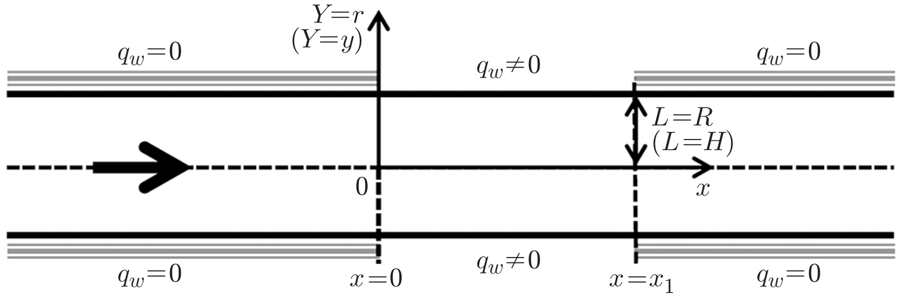

Рис. 1. Геометрия канала при наличии в нем развитого скользящего потока и система координат

пает поток тепла q_w (см. рис. 1). Таким образом, плотность потока тепла определяется соотношениями

$$q_w^* = \begin{cases} q_w, & 0 < x < x_1, \\ 0, & x \leqslant 0, \quad x \geqslant x_1. \end{cases}$$

Предполагается, что поток поступает в канал с постоянной температурой T_0 при $x = -\infty$. Свойства жидкости (плотность ρ, динамическая вязкость μ, теплопроводность k и удельная теплоемкость C_p) полагаются постоянными. Число Кнудсена потока находится в диапазоне $10^{-3} \leqslant \mathrm{Kn} \leqslant 10^{-1}$. На стенках канала задается скорость скольжения жидкости и учитывается скачок температуры. В модели скольжения первого порядка эти условия имеют вид [1]

$$u_{x,s} = -\beta_v \lambda \frac{\partial u_x}{\partial Y}\Big|_{Y=L}; \tag{1}$$

$$T_s = T_w - \beta_t \lambda \frac{\partial T}{\partial Y}\Big|_{Y=L}, \tag{2}$$

где $u_{x,s}$ — скорость скольжения; T_s, T_w — температура жидкости и стенок соответственно; λ — длина свободного пробега молекулы; $\beta_v = (2-F_v)/F_v$; $\beta_t = (2-F_t)/F_t(2\gamma/\Pr(\gamma+1))$; F_v, F_t — тангенциальный импульс и коэффициент тепловой аккомодации; $\Pr$ — число Прандтля; γ — отношение удельных теплоемкостей C_p/C_v.

При указанных выше предположениях безразмерное уравнение энергии с учетом проводимости в направлении потока и с учетом симметрии задачи относительно оси течения записывается в следующем виде:

$$u(\eta)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = \frac{1}{\eta^p}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(\eta^p\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\Big) + \frac{1}{\mathrm{Pe}_L^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} \qquad \text{при} \quad 0 < \eta < 1 \quad \forall\xi. \tag{3}$$

Здесь $p = 0$ в случае течения в плоском канале и $p = 1$ в случае течения в микротрубке,

$$\eta = \frac{Y}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}\frac{1}{\mathrm{Pe}_L}, \quad u(\eta) = \frac{u_x}{U_m}, \quad \Theta = \frac{T-T_0}{Lq_w/k}, \quad \mathrm{Pe}_L = \frac{\rho C_p U_m L}{k},$$

Pe_L — число Пекле; U_m — средняя скорость. Профиль скорости развитого ламинарного потока со скольжением $u(\eta)$, удовлетворяющий условию скольжения в (1), можно определить из уравнения импульса

$$u(\eta) = u_s + (p+3)(1-u_s)(1-\eta^2)/2,$$

где $u_s = u_x(L)/U_m$ — безразмерная скорость скольжения ($u_s = u(1) = \beta_v \mathrm{Kn}\,(p+3)/[2^{p-2} + \beta_v \mathrm{Kn}\,(p+3)]$); $\mathrm{Kn} = \lambda/D_h$ — число Кнудсена; $D_h = 2^{2-p}L$ — гидравлический диаметр канала.

Для уравнения (3) ставятся краевые условия

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = 0 \qquad \text{при} \quad \eta = 1, \quad \xi \leqslant 0, \quad \xi \geqslant \xi_1; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = 1 \qquad \text{при} \quad \eta = 1, \quad 0 < \xi < \xi_1; \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = 0 \qquad \text{при} \quad \eta = 0 \quad \forall\,\xi; \tag{6}$$

$$\lim_{\xi\to-\infty} \Theta = 0. \tag{7}$$

2. Аналитическое решение. Как отмечено выше, одним из методов, которые могут быть использованы для решения системы уравнений (3)–(7), является метод функционального анализа, ранее использовавшийся при решении задачи о течении сплошной среды. В данной работе этот метод распространен на случай скользящего потока и найдено аналитическое решение уравнения (3) с краевыми условиями (4)–(7). Более детальное описание метода приведено в работах [3, 5, 6, 11]. Ниже изложена основная идея метода. Вводя безразмерную энергию потока в осевом направлении через поперечное сечение высотой η:

$$\varphi(\xi,\eta) = \int\limits_0^{\eta} \Big(u(\eta')\Theta - \frac{1}{\mathrm{Pe}_L^2}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\Big)\eta'^p\,d\eta', \tag{8}$$

получаем следующую систему:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = \mathrm{Pe}_L^2 u(\eta)\Theta - \frac{\mathrm{Pe}_L^2}{\eta^p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta};$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \eta^p\,\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}. \tag{9}$$

С использованием определения (8) функции $\varphi(\xi,\eta)$, уравнения (7) и с учетом краевых условий (4), (5) в уравнении (9) находим эквивалентные краевые условия для функции φ:

$$\varphi(\xi,0) = 0, \qquad \lim_{\xi\to-\infty}\varphi(\xi,\eta) = 0, \qquad \varphi(\xi,1) = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant 0, \\ \xi, & 0 < \xi < \xi_1, \\ \xi_1, & \xi \geqslant \xi_1. \end{cases}$$

С помощью метода функционального анализа [3, 5, 6, 11] покажем, что в случае сформировавшегося профиля скорости $u(\eta)$ можно получить представление для температурного поля в виде бесконечного ряда по собственным функциям ϕ_{n1}^+ и ϕ_{n1}^-:

$$\Theta(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n^2\xi}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_n^2\xi_1})\phi_{n1}^+(\eta), \qquad \xi \leqslant 0,$$

$$\Theta(\xi,\eta) = Q(\eta) + (p+1)\xi - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n^2(\xi-\xi_1)}\,\phi_{n1}^+(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{e}^{-\beta_n^2\xi}\,\phi_{n1}^-(\eta), \qquad 0 < \xi < \xi_1,$$

$$\Theta(\xi,\eta) = (p+1)\xi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{e}^{-\beta_n^2\xi}(1 - \mathrm{e}^{\beta_n^2\xi_1})\phi_{n1}^-(\eta), \qquad \xi \geqslant \xi_1.$$

Здесь

$$Q(\eta) = \frac{p+1}{\mathrm{Pe}_L^2} + \int_0^{\eta} \frac{1}{\eta'^p} \int_0^{\eta'} \eta''^p u(\eta'')\, d\eta''\, d\eta' - (p+1) \int_0^1 u(\eta)\eta^p \Big(\int_0^{\eta} \frac{1}{\eta'^p} \int_0^{\eta'} \eta''^p u(\eta'')\, d\eta''\, d\eta' \Big)\, d\eta,$$

для коэффициентов разложения A_n, B_n можно записать явные формулы

$$A_n = -2\Big[\lambda_n^3 \frac{d}{d\lambda_n} \Big(\frac{(\phi_{n1}^+)'(1)}{\lambda_n^2}\Big)\Big]^{-1}, \qquad B_n = 2\Big[\beta_n^3 \frac{d}{d\beta_n} \Big(\frac{(\phi_{n1}^-)'(1)}{\beta_n^2}\Big)\Big]^{-1},$$

λ_n, β_n — вещественные части собственных значений, соответствующих собственным функциям ϕ_{n1}^+ и ϕ_{n1}^-.

Собственные функции ϕ_{n1}^+, ϕ_{n1}^- являются решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\eta} \Big(\eta^p \frac{d\phi_{n1}^{\pm}}{d\eta}\Big) + \eta^p \mu_n^{\pm} \Big(\frac{\mu_n^{\pm}}{\mathrm{Pe}_L^2} - u(\eta)\Big)\phi_{n1}^{\pm}(\eta) = 0 \tag{10}$$

с краевыми условиями

$$(\phi_{n1}^{\pm})'(0) = 0, \qquad (\phi_{n1}^{\pm})'(1) = 0. \tag{11}$$

Явные выражения для функций ϕ_{n1}^+, ϕ_{n1}^- приведены в [11]. Если температурное поле известно, то можно вычислить две величины, имеющие важное практическое значение: среднемассовую температуру

$$T_b = \int_0^L T u_x Y^p\, dY \Big/ \int_0^L u_x Y^p\, dY, \qquad \Theta_b = \int_0^1 \Theta u \eta^p\, d\eta \Big/ \int_0^1 u\eta^p\, d\eta$$

и локальное число Нуссельта

$$\mathrm{Nu} = \frac{q_w^*}{k\,(T_w - T_b)/D_h} = 2^{2-p} \frac{q_w^*}{q_w(\Theta_w - \Theta_b)} = \begin{cases} 2^{2-p}/(\Theta_w - \Theta_b), & 0 < \xi < \xi_1, \\ 0, & \xi \leqslant 0, \quad \xi \geqslant \xi_1. \end{cases} \tag{12}$$

Зная температурное поле в потоке, с использованием уравнения (2) можно получить следующие выражения для массовой температуры и температуры стенки в каждом сечении микроканала:

— $\xi \leqslant 0$:

$$\Theta_b = (p+1) \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n^2 \xi} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_n^2 \xi_1}) \frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}_L^2} \int_0^1 \eta^p \phi_{n1}^+\, d\eta,$$

$$\Theta_w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n^2 \xi} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_n^2 \xi_1}) \phi_{n1}^+(1);$$

— $0 < \xi < \xi_1$:

$$\Theta_b = (p+1) \int_0^1 Q(\eta) u(\eta) \eta^p\, d\eta + (p+1)\xi - (p+1) \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n^2 (\xi - \xi_1)} \frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}_L^2} \int_0^1 \eta^p \phi_{n1}^+\, d\eta -$$

$$- (p+1) \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, \mathrm{e}^{-\beta_n^2 \xi} \frac{\beta_n^2}{\mathrm{Pe}_L^2} \int_0^1 \eta^p \phi_{n1}^-\, d\eta,$$

$$\Theta_w = Q(1) + (p+1)\xi - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{e}^{\lambda_n^2(\xi-\xi_1)}\,\phi_{n1}^{+}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{e}^{-\beta_n^2\xi}\,\phi_{n1}^{-}(1) + 2^{2-p}\beta_t \,\mathrm{Kn};$$

— $\xi \geqslant \xi_1$:

$$\Theta_b = (p+1)\xi_1 - (p+1)\sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{e}^{-\beta_n^2\xi}(1-\mathrm{e}^{\beta_n^2\xi_1})\frac{\beta_n^2}{\mathrm{Pe}_L^2}\int\limits_0^1 \eta^p\phi_{n1}^{-}\,d\eta,$$

$$\Theta_w = (p+1)\xi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{e}^{-\beta_n^2\xi}(1-\mathrm{e}^{\beta_n^2\xi_1})\phi_{n1}^{-}(1).$$

При $\xi \leqslant 0$ и $\xi \geqslant \xi_1$ число Нуссельта равно нулю, поскольку на этих участках отсутствует поток тепла. При $0 < \xi < \xi_1$ для числа Нуссельта получаем выражение

$$\mathrm{Nu} = 2^{2-p}\Big\{Q(1) + 2^{2-p}\beta_t \,\mathrm{Kn} - (p+1)\int\limits_0^1 Q(\eta)u(\eta)\eta^p\,d\eta + {}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{e}^{\lambda_n^2(\xi-\xi_1)}\Big[(p+1)\frac{\lambda_n^2}{\mathrm{Pe}_L^2}\int\limits_0^1 \eta^p\phi_{n1}^{+}\,d\eta - \phi_{n1}^{+}(1)\Big] + {}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{e}^{-\beta_n^2\xi}\Big[(p+1)\frac{\beta_n^2}{\mathrm{Pe}_L^2}\int\limits_0^1 \eta^p\phi_{n1}^{-}\,d\eta + \phi_{n1}^{-}(1)\Big]\Big\}^{-1}.$$

В частности, при $\xi_1 \to +\infty$ для асимптотического значения числа Нуссельта, представляющего собой число Нуссельта в области установившегося температурного поля ($\xi \to +\infty$), имеем выражение

$$\mathrm{Nu}_{as} = 2^{2-p} \Big/ \Big(Q(1) + 2^{2-p}\beta_t \,\mathrm{Kn} - (p+1)\int\limits_0^1 Q(\eta)u(\eta)\eta^p\,d\eta\Big),$$

зависящее от Kn, β_v, β_t.

3. Результаты исследования и их обсуждение. Ниже описываются алгоритм численного решения и результаты решения задачи.

3.1. *Алгоритм вычисления: точность и апробация.* В данной работе собственные значения и собственные функции вычисляются с использованием двух методов: во-первых, дифференциальное уравнение (10) с краевыми условиями (11) решается численным методом с помощью программы, реализованной на языке FORTRAN, во-вторых, с целью проверки точности численного метода проводится сравнение численного решения с аналитическим решением, полученным с использованием явных выражений для собственных функций ϕ_{n1}^{+}, ϕ_{n1}^{-} и пакета MAPLE. Более подробно используемый численный метод изложен в работах [10, 11]. Разности между собственными значениями и соответствующими коэффициентами разложений, вычисленными двумя методами, не превышали 10^{-7} и 10^{-6} соответственно.

В случае полубесконечных ($\xi_1 \to +\infty$) микротрубок и плоскопараллельных каналов асимптотические значения числа Нуссельта (при $\xi \to +\infty$) не зависят от числа Пекле, что используется при проверке численного решения путем сравнения зависимостей числа Нуссельта Nu_{as} от числа Кнудсена Kn, полученных в данной работе и в работе [12], в которой не учитывалась проводимость в направлении движения потока. Эти зависимости

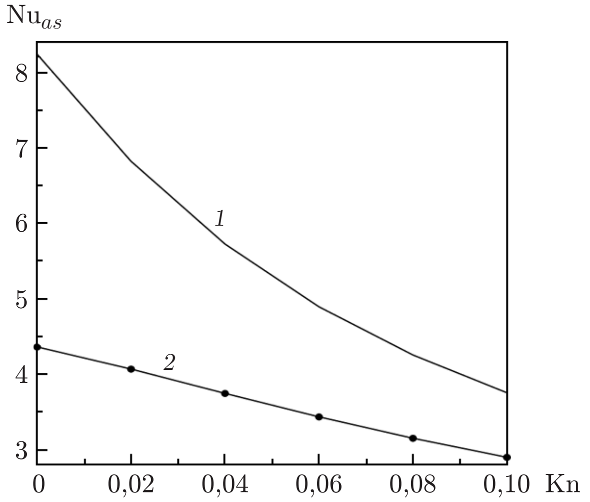

Рис. 2

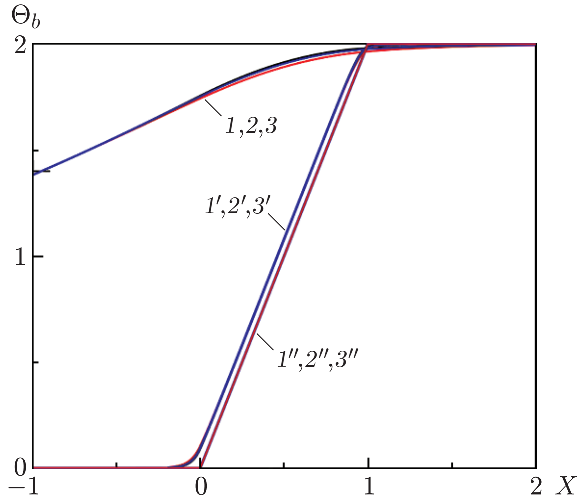

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость асимптотического числа Нуссельта Nu_{as} от числа Кнудсена в скользящем потоке:

линии — данные настоящей работы (*1* — для микроканала с параллельными стенками ($p = 0$), *2* — для микротрубки ($p = 1$)), точки — данные [12] для микротрубки ($p = 1$)

Рис. 3. Зависимость среднемассовой температуры Θ_b от координаты X в микротрубке в области нагрева конечной длины $\xi_1 = 1$ при $p = 1$ и различных значениях чисел Пекле и Кнудсена:

1–3 — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 1$, *1′–3′* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 10$, *1″–3″* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = \infty$ (параболическая задача); *1*, *1′*, *1″* — $\mathrm{Kn} = 0$, *2*, *2′*, *2″* — $\mathrm{Kn} = 0{,}06$, *3*, *3′*, *3″* — $\mathrm{Kn} = 0{,}10$

приведены на рис. 2 при значении $\beta_t = 1{,}667$, имеющем место для воздуха при $\gamma = 1{,}4$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$. Видно, что зависимости, полученные двумя указанными выше методами, хорошо согласуются. Из рис. 2 следует, что в случае скользящего потока число Нуссельта Nu_{as} уменьшается при увеличении числа Кнудсена. Случай течения при $\mathrm{Kn} = 0$ соответствует классическому течению сплошной среды, в котором отсутствуют скорость скольжения и условие на скачок температуры. В случае классического течения в трубке с круглым сечением $\mathrm{Nu}_{as} = 4{,}3636$, в случае течения в плоском канале $\mathrm{Nu}_{as} = 8{,}2353$. Значения Nu_{as}, полученные в данной работе при $\mathrm{Kn} = 0$, близки к указанным выше значениям (см. рис. 2).

3.2. *Теплоперенос в микротрубке: влияние чисел Пекле и Кнудсена.* Зависимости среднемассовой температуры Θ_b от числа Пекле $\mathrm{Pe}_{D_h} = 2^{2-p}\mathrm{Pe}_L$ (Pe_{D_h} — число Пекле, определенное с использованием гидравлического диаметра канала) и числа Кнудсена Kn в случае, когда нагрев осуществляется на участке конечной длины ($\xi_1 = 1$), представлены на рис. 3. Среднемассовая температура Θ_b увеличивается вниз по потоку до тех пор, пока не будет достигнуто ее асимптотическое максимальное значение в сечении $X = \xi/\xi_1 \geqslant 1$. Это значение не зависит от значений Pe_{D_h} и Kn. На рис. 3 видно, что при большом значении Pe_{D_h} ($\mathrm{Pe}_{D_h} = 10$) и при любом фиксированном значении числа Кнудсена влияние теплопроводности в осевом направлении очень мало и температура Θ_b в расположенной выше по потоку изолированной области уменьшается в результате охлаждения вследствие конвекции. Поэтому вблизи сечения $X = 0$ температура приближенно равна нулю. В частности, в случае параболической задачи этот эффект отсутствует, среднемассовая температура в сечении $X = 0$ равна нулю. При $\mathrm{Pe}_{D_h} \approx 1$ проводимость в направлении движения потока становится существенной. Наличие такой проводимости приводит к увеличению

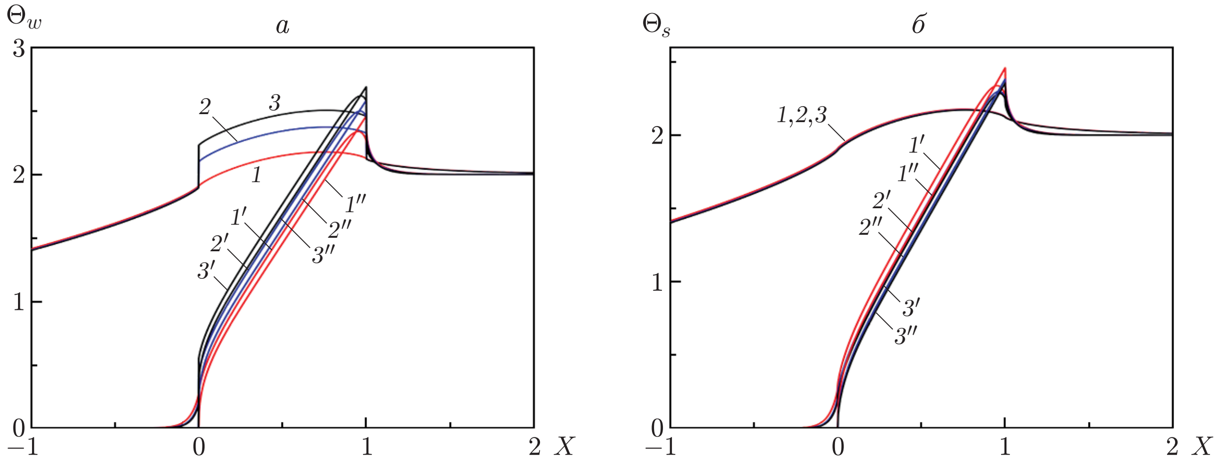

Рис. 4. Зависимости температуры стенок микротрубки Θ_w (*а*) и температуры потока на стенках микротрубки Θ_s (*б*) от координаты X при $\xi_1 = 1$, $p = 1$ и различных значениях чисел Кнудсена и Пекле:
1–3 — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 1$, *1′–3′* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 10$, *1″–3″* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = \infty$ (параболическая задача);
1, 1′, 1″ — $\mathrm{Kn} = 0$, *2, 2′, 2″* — $\mathrm{Kn} = 0{,}06$, *3, 3′, 3″* — $\mathrm{Kn} = 0{,}10$

среднемассовой температуры Θ_b в области нагрева и в теплоизолированной области вверх по потоку. Это происходит вследствие того, что часть тепла, поступающего от стенок, переносится вверх по потоку вследствие наличия теплопроводности в направлении движения потока. Из зависимостей, приведенных на рис. 3, следует, что при любом фиксированном значении Pe_{D_h} разрежение газа не оказывает существенного влияния на среднемассовую температуру.

На рис. 4,*а* приведена зависимость температуры стенок микротрубки Θ_w от координаты X при $\xi_1 = 1$, $p = 1$ и различных значениях Pe_{D_h} и Kn. Видно, что при фиксированном значении Pe_{D_h} в областях микротрубки с теплоизолированными стенками, расположенными выше по потоку ($X \leqslant 0$) и ниже по потоку ($X \geqslant 1$) относительно нагреваемой области, степень разрежения оказывает несущественное влияние на температуру стенок, в то время как в области нагрева температура стенок Θ_w существенно зависит от степени разрежения потока. Эти результаты можно получить из выражения (2), записанного для безразмерной температуры Θ_w: $\Theta_w = \Theta_s + \Theta_j$ (Θ_s, Θ_j — безразмерные температура жидкости на стенках и скачок температуры соответственно). Действительно, из зависимостей, приведенных на рис. 4,*б*, следует, что температура потока на стенках $\Theta(\xi, 1) = \Theta_s$ уменьшается с увеличением числа Кнудсена Kn вследствие увеличения скорости скольжения на стенках и соответственно уменьшения степени нагрева частиц вблизи стенок. Скачок температуры $\Theta_j = 2\beta_t \,\mathrm{Kn}$ в области нагрева ($0 < X < 1$) увеличивается с увеличением Kn. В теплоизолированных областях, расположенных выше по потоку ($X \leqslant 0$) и ниже по потоку ($X \geqslant 1$) относительно области нагрева, скачок температуры Θ_j равен нулю, поскольку $\partial\Theta/\partial\eta = 0$ при $\eta = 1$. Поэтому в области нагрева ($0 < X < 1$) увеличение числа Кнудсена Kn приводит к увеличению скачка температуры Θ_j, более существенному по сравнению с уменьшением температуры Θ_s, в результате чего температура стенок Θ_w увеличивается.

Исследуем влияние чисел Кнудсена и Пекле на локальное число Нуссельта в микротрубке с областью нагрева конечной длины при $\xi_1 = 1$.

Из зависимостей, приведенных на рис. 5, следует, что при $\mathrm{Pe}_{D_h} = 10$ распределение числа Нуссельта в области нагрева, за исключением областей, находящихся вблизи вход-

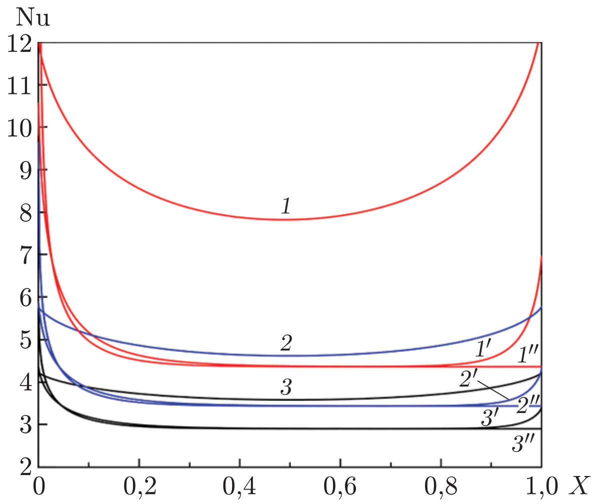

Рис. 5. Зависимость локального числа Нуссельта Nu от координаты X при $\xi_1 = 1$, $p = 1$ и различных значениях чисел Пекле и Кнудсена:
1–3 — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 1$, *1′–3′* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 10$, *1″–3″* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = \infty$ (параболическая задача);
1, 1′, 1″ — $\mathrm{Kn} = 0$, *2, 2′, 2″* — $\mathrm{Kn} = 0{,}06$, *3, 3′, 3″* — $\mathrm{Kn} = 0{,}10$

ного и выходного сечений, близко к распределению, полученному при решении параболической задачи. Это означает, что даже при больших значениях Pe_{D_h} нельзя пренебрегать проводимостью в осевом направлении вблизи разрывов в краевых условиях.

Локальное число Нуссельта Nu, которое согласно (12) обратно пропорционально разности температуры стенок и среднемассовой температуры потока, вблизи сечения, через которое поток входит в область нагрева, уменьшается, что обусловлено нагревом стенок, затем оно практически не меняется с изменением координаты X, а вблизи сечения, через которое поток выходит из области нагрева, увеличивается. При уменьшении значения Pe_{D_h} до единицы отмеченные выше закономерности распределения числа Нуссельта становятся более выраженными вследствие наличия теплопроводности в осевом направлении. При этом распределение локального числа Нуссельта становится параболическим и симметричным относительно сечения $X \approx 0{,}5$. В этом сечении вследствие одинакового влияния конвекции и теплопроводности локальное число Нуссельта принимает минимальное значение. При любых значениях Kn локальное число Нуссельта в фиксированной точке увеличивается при уменьшении Pe_{D_h}, но не достигает значения, соответствующего развитому течению в области нагрева. Такое поведение числа Нуссельта отмечалось в случае наличия теплопереноса в макротрубках ($\mathrm{Kn} = 0$) [6]. Из зависимостей, приведенных на рис. 5, следует, что при фиксированном Pe_{D_h} локальное число Нуссельта зависит от Kn. С увеличением Kn локальное число Нуссельта в области нагрева уменьшается, что обусловлено увеличением разности $\Theta_w - \Theta_b$, так как с увеличением Kn температура Θ_w увеличивается (см. рис. 4,*а*), а температура Θ_b практически не меняется. Таким образом, с учетом определения $\mathrm{Nu} = 2/(\Theta_w - \Theta_b)$ при увеличении числа Кнудсена Kn количество переносимого тепла уменьшается вследствие скачка температуры.

3.3. *Перенос тепла в микроканале с параллельными стенками: влияние конечной длины области нагрева.* На рис. 6, 7 соответственно приведены зависимости температуры Θ_b и числа Нуссельта Nu от координаты X при различных значениях Pe_{D_h} и конечной длины области нагрева ξ_1. При $\mathrm{Pe}_{D_h} = 1$ увеличение Θ_b с увеличением ξ_1 приводит к появлению проводимости, существенно зависящей от величины ξ_1. Асимптотическое значение температуры Θ_b в расположенной вниз по потоку теплоизолированной области ($X \geqslant 1$), также

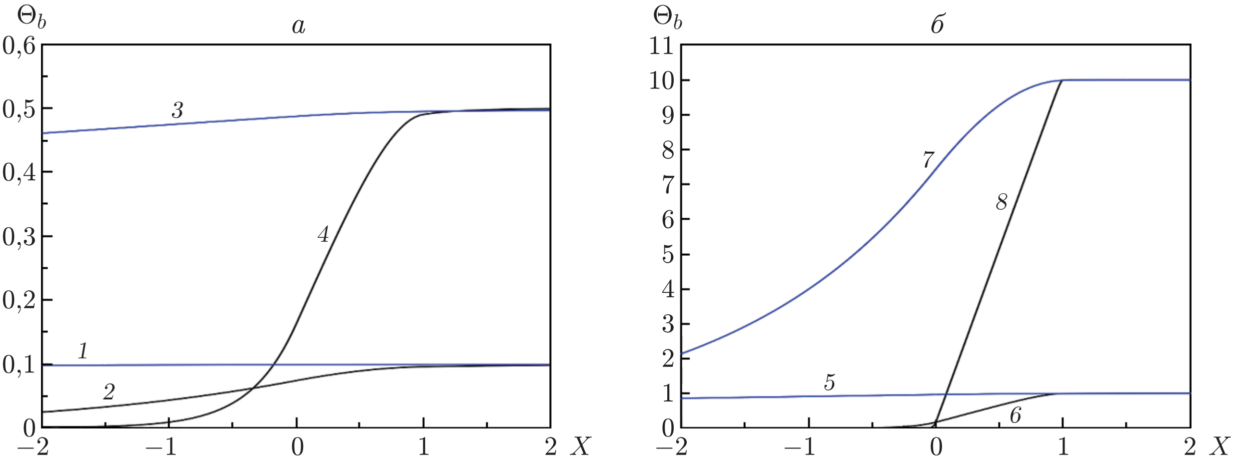

Рис. 6. Зависимость температуры Θ_b в микроканале от координаты X при $p = 0$, $\mathrm{Kn} = 0{,}1$ и различных значениях Pe_{D_h} и конечной длины области нагрева ξ_1: *а* — *1, 2* — $\xi_1 = 0{,}1$, *3, 4* — $\xi_1 = 0{,}5$; *б* — *5, 6* — $\xi_1 = 1$, *7, 8* — $\xi_1 = 10$; *1, 3, 5, 7* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 1$, *2, 4, 6, 8* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 10$

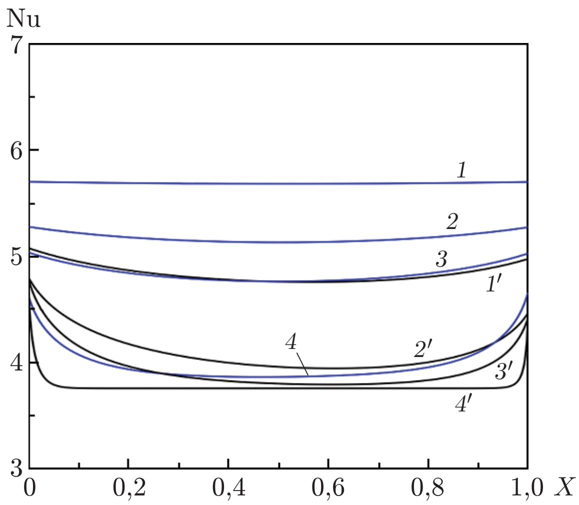

Рис. 7. Зависимость числа Нуссельта Nu в микроканале от координаты X при $p = 0$, $\mathrm{Kn} = 0{,}1$ и различных значениях Pe_{D_h} и конечной длины области нагрева ξ_1: *1–4* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 1$, *1′–4′* — $\mathrm{Pe}_{D_h} = 10$; *1, 1′* — $\xi_1 = 0{,}1$, *2, 2′* — $\xi_1 = 0{,}5$, *3, 3′* — $\xi_1 = 1$, *4, 4′* — $\xi_1 = 10$

существенно зависит от величины ξ_1. В расположенной вверх по потоку теплоизолированной области $X \leqslant 0$ температура Θ_b увеличивается с уменьшением ξ_1. В этом случае влияние проводимости в осевом направлении существенно при малых значениях ξ_1.

С уменьшением величины ξ_1 локальное число Нуссельта Nu увеличивается (см. рис. 7). Следовательно, проводимость в осевом направлении существенна даже при больших значениях Pe_{D_h} и увеличивается при уменьшении длины области нагрева. Такие же результаты были получены при решении задачи о переносе тепла в скользящем потоке при условиях Дирихле на стенках канала [10].

Заключение. С использованием метода функционального анализа проведено аналитическое исследование обобщенной задачи Гретца о скользящем потоке газа в микротрубке и плоском микроканале с параллельными стенками. Получены следующие основные результаты.

Теплопроводность в осевом направлении (в направлении движения потока) становится существенной при малых числах Пекле Pe_{D_h}.

В случае если длина области нагрева конечна, даже при больших значениях числа Пекле влияние теплопроводности в направлении движения потока существенно, при уменьшении длины области нагрева перенос тепла становится более интенсивным. При малых числах Пекле Pe_{D_h} увеличение среднемассовой температуры с увеличением параметра ξ_1 приводит к существенному увеличению влияния теплопроводности на распределение температуры в теплоизолированной области, расположенной вверх по потоку.

В скользящем потоке при фиксированном значении числа Пекле Pe_{D_h} с увеличением числа Кнудсена интенсивность переноса тепла уменьшается. По-видимому, при любом значении числа Пекле Pe_{D_h} среднемассовая температура не зависит от степени разрежения. Таким образом, интенсивность переноса тепла зависит от температуры на стенках канала, которая в свою очередь зависит от скачка температуры на стенках в области нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Karniadakis G.** Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation / G. Karniadakis, A. Beskok, N. Aluru. N. Y.: Springer, 2005. P. 60, 400.
2. **Ha J. M., Peterson G. P.** The heat transport capacity of micro heat pipe // J. Heat Transfer. 1998. V. 120. P. 1064–1071.
3. **Weigand B.** Analytical methods for heat transfer and fluid flow problems. Berlin; Heidelberg: Springer, 2015. P. 149.
4. **Papoutsakis E., Ramkrishna D., Lim H. C.** The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions // Appl. Sci. Res. 1980. V. 36. P. 13–34.
5. **Papoutsakis E., Ramkrishna D., Lim H. C.** The extended Graetz problem with prescribed wall flux // AIChE J. 1980. V. 26. P. 779–787.
6. **Weigand B., Kanzamar M., Beer H.** The extended Graetz problem with piecewise constant wall heat flux for pipe and channel flows // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2001. V. 44. P. 3941–3952.
7. **Weigand B., Lauffer D.** The extended Graetz problem with piecewise constant wall temperature for pipe and channel flows // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2004. V. 47. P. 5303–5312.
8. **Lahjomri J., Zniber K., Oubarra A., Alemany A.** Heat transfer by Hartmann flow in thermal entrance region with uniform heat flux: The Graetz problem extended // Energy Convers. Manage. 2003. V. 44. P. 11–34.
9. **Colin S.** Gas microflows in the slip flow regime: A critical review on convective heat transfer // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 2012. V. 134. 020908.
10. **Haddout Y., Lahjomri J.** The extended Graetz problem for a gaseous slip flow in micropipe and parallel-plate microchannel with heating section of finite length: Effects of axial conduction, viscous dissipation and pressure work // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 80. P. 673–687.
11. **Haddout Y., Essaghir E., Oubarra A., Lahjomri J.** Convective heat transfer for a gaseous slip flow in micropipe and parallel-plate microchannel with uniform wall heat flux: effect of axial heat conduction // Indian J. Phys. 2018. V. 92. P. 741–755.
12. **Aydın O., Avcı O.** Analysis of laminar heat transfer in micro poiseuille flow // Intern. J. Thermal Sci. 2007. V. 46. P. 30–37.

Поступила в редакцию 25/VI 2019 г.,
после доработки — 30/III 2020 г.
Принята к публикации 25/V 2020 г.