ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 7, № 1, 2020

УДК 539.374 DOI:10.15372/FPVGN2020070145

ИССЛЕДОВАНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ВНЕДРЕНИИ В НЕГО ИНСТРУМЕНТА КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Б. Б. Данилов[1], А. И. Чанышев[1,2], Д. О. Чещин[1]

[1]*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,* E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия
[2]*Новосибирский государственный университет экономики и управления,*
ул. Каменская 56, г. Новосибирск 630099, Россия

Из различных видов сопротивления массива пород внедрению в него твердого тела определены такие, с преодолением которых связан не отскок, а глубина проникания (вязко-пластическое сопротивление). Показано, как при известной начальной скорости движения инструмента (при измеренных в экспериментах глубине и времени проникания) для заданной геометрии инструмента восстанавливается искомая функция сопротивления, состоящая из постоянного слагаемого и функции, зависящей от скорости движения. Более приемлемой считается такая геометрия инструмента, при которой сопротивление среды внедрению для данной глубины получается минимальным.

Сопротивление, упругое, пластическое, вязко-пластическое, глубина, скорость, время

STUDY OF ROCK MASS RESISTANCE TO PENETRATION OF A CONICAL TOOL

B. B. Danilov[1], A. I. Chanyshev[1,2], and D. O. Cheshchin[1]

[1]*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,*
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, *Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*
[2]*Novosibirsk State University of Economics and Management,*
ul. Kamenskaya 52, Novosibirsk 630099, Russia

Among various types of resistance of a rock mass to the penetration of a solid body into it, the resistance types associated not with rebound, but with the depth of penetration (viscoplastic resistance) are determined. It is shown how at a known initial speed of the tool movement (at the depth and time of penetration measured in experiments), for a given tool geometry, the required resistance function is restored, consisting of a constant term and a function which depends on the speed of movement. More acceptable is the geometry of the tool, in which the resistance of the medium to penetration for a given depth is minimal.

Resistance, elastic, plastic, viscoplastic, depth, speed, time

Исследование процессов статического и динамического взаимодействия двух изотропных упругих тел, поверхности которых аппроксимируются двумя параболами, рассматривалось в [1–3], ударная нагрузка при упругопластических деформациях изучалась в [4–6]. Из множества работ данного направления выделим те, которые относятся к определению пределов текучести и прочности материалов с использованием методов проб Бринелля и Виккерса.

В методе проб Бринелля вдавливаются инденторы в виде сфер, в методе проб Виккерса — правильные четырехгранные алмазные пирамиды. По отпечаткам указанных фигур находится твердость материалов. Задача по определению сопротивления грунтового массива деформированию различными методами рассматривается также в работах [7–9].

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-05-00757 А).

В данной работе решаются аналогичные задачи — устанавливается сопротивление среды деформированию при заданных значениях глубины проникания инструмента, времени проникания и геометрических параметров внедряемого инструмента. Таким образом задача сводится к определению таких значений этих параметров, при которых сопротивление среды будет минимальным, а глубина проникания — наибольшей.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть дано тело с массой m, расположенное на высоте H над некоторой преградой — поверхностью массива пород (рис. 1).

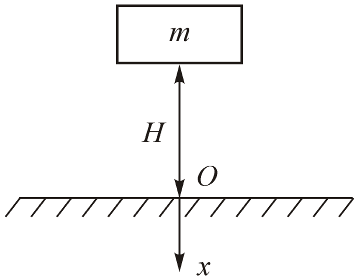

Рис. 1. Груз массой m падает на поверхность массива пород

Полуось Ox выберем, как показано на рис. 1: точку O расположим на поверхности, значения координат x положительны, если тело внедряется в массив пород.

Для определения движения тела с массой m имеем уравнение движения Ньютона:

$$m\ddot{x} = mg\,, \tag{1}$$

интегрируя которое находим скорость V, развиваемую телом при сбросе с высоты H:

$$V = \sqrt{2Hg}\,. \tag{2}$$

Со скоростью V тело подлетает к преграде. Дальше идут допущения о виде сопротивления среды, расположенной в области $x \geq 0$. Рассмотрим различные случаи.

Случай 1. Пусть сопротивление среды описывается зависимостью

$$R = R_1 x\,, \tag{3}$$

где R_1 — неизвестная константа.

Таким образом задачей является определение R_1. Для решения задачи имеем уравнение движения Ньютона вида (1):

$$m\ddot{x} = mg - R_1 x\,. \tag{4}$$

Интегрируя (4) при начальных условиях:

$$x\big|_{t=0} = 0\,, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = V\,. \tag{5}$$

Получаем решение (4) в виде:

$$x = \frac{g}{\lambda^2}(1 - \cos\lambda t) + \frac{V}{\lambda}\sin\lambda t\,, \tag{6}$$

где $\lambda^2 = R_1/m$.

Соотношение (6) возможно переписать, преобразуя его к одной синусоиде:

$$x = \frac{\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}}{\lambda^2}\sin\lambda\left(t - \frac{\gamma}{\lambda}\right) + \frac{g}{\lambda^2}\,, \tag{7}$$

где $\mathrm{tg}\gamma = g/\lambda V$.

Из этого следуют зависимости для скорости $\dot{x}$ и ускорения $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}}{\lambda}\cos\lambda\left(t - \frac{\gamma}{\lambda}\right), \tag{8}$$

$$\ddot{x} = -\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2} \sin \lambda \left(t - \frac{\gamma}{\lambda} \right). \tag{9}$$

Из (8) находим, что скорость $\dot{x}$ будет равна нулю при

$$\lambda t_* - \gamma = \frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

т. е. при $t_* = \frac{1}{\lambda}\left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right)$. Это означает остановку тела в массиве пород. На рис. 2 представлены графики функций $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $x = x(t)$, $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$.

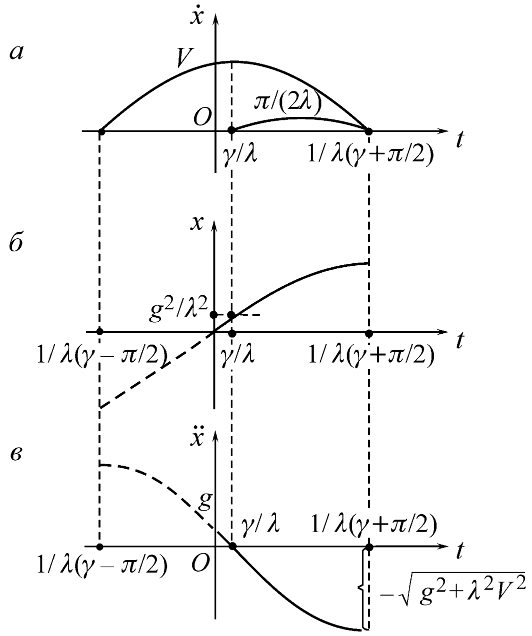

Рис. 2. Графики зависимостей скорости от времени t

Видно, что на участке времени $t \in \left[0, \frac{\gamma}{\lambda} \right]$ скорость возрастает от значения V до значения $\sqrt{V^2 + g^2/\lambda^2}$. На участке времени $t \in \left[\frac{\gamma}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) \right]$ скорость падает от максимального $\sqrt{V^2 + \frac{g^2}{\lambda^2}}$ до нуля при $t = \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda}$.

При этом смещение x возрастает (рис. 2*б*) от значения $x = 0$ до максимального значения

$$x = \frac{g}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}}{\lambda^2}.$$

Ускорение $\ddot{x}$ в момент времени $t = 0$ было равно g, в момент остановки тела $\left(t = \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda} \right)$ оно сменило знак и стало равным $\ddot{x} = -\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}$.

Для определения параметра R_1 в (3) возможно использовать время, при котором тело максимально погрузилось в массив пород t_* из (10). Зная t_* и V получаем следующее уравнение для определения параметра λ.

$$\operatorname{arctg} \frac{g}{\lambda V} - \lambda t_* + \frac{\pi}{2} = 0. \tag{11}$$

Из этого уравнения находится λ, из (6) — $R_1 = m\lambda$.

Рассмотрим теперь отскок тела в момент времени $t \geq \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda}$. В этом случае по-прежнему имеем уравнение движения (4), его решение (6), начало отсчета времени перенесем в момент отскока. При $t = 0$ имеем следующие начальные условия:

$$\begin{cases} x|_{t=0} = x_{\max} = \dfrac{g + \sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}}{\lambda^2}, \\ \dot{x}|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Из этих условий находим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}}{\lambda^2} \cos \lambda t - \dfrac{g}{\lambda^2}, \\ \dot{x} = -\dfrac{\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}}{\lambda} \sin \lambda t, \\ \ddot{x} = -\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2} \cos \lambda t. \end{cases} \tag{13}$$

Графики функций $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $x = x(t)$, $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ представлены на рис. 3.

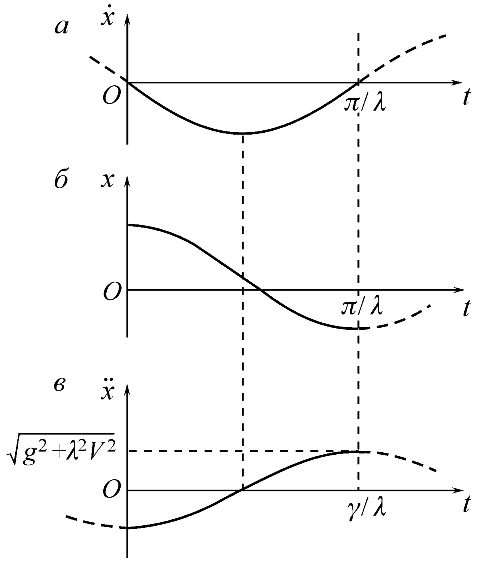

Рис. 3. Графики зависимостей скорости, смещения и ускорения при отскоке

При этом скорость $\dot{x}$ после отскока обращается в ноль при $t = \pi / \lambda$, смещение x в этот момент времени равно значению $x_* = (g - \sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}) / \lambda^2$, ускорение из отрицательных значений переходит в область положительных со значением $\ddot{x} = \sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2} \geq g$.

Поскольку значение x_* отрицательно, это означает, что тело после отскока находится на поверхности массива пород. Величина подъема над поверхностью $x = 0$ равна $h = |x_* - x_{\max}| = 2\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2} / \lambda^2$. Если эту величину фиксировать, обозначив ее h, то отсюда получаем уравнение для определения параметра λ^2: $\lambda^2 h = 2\sqrt{g^2 + \lambda^2 V^2}$, решая которое находим

$$\lambda^2 = \frac{R_1}{m} = \frac{2(V^2 + \sqrt{V^4 + h^2 g^2})}{h^2}. \tag{14}$$

Дальнейшее движение повторяет то, что изложено в формулах $(1)-(14)$. При этом получаем новое выражение скорости (2): $V=\sqrt{2hg}$ и т. д.

Сделаем несколько замечаний:

1. Если скорость V = 0, то максимальная величина смещения x, согласно (7), будет равна $x=2g/\lambda^2=2gm/R_1$. Отсюда, согласно (3), максимальная сила сопротивления получается в два раза превышающей вес груза.

2. Если V = 0, то R_1, согласно (14), также равно $2gm$.

Случай 2. Пусть сопротивление среды определяется константой, зависящей от формы и геометрии ударника. В этом случае уравнение движения Ньютона имеет вид:

$$m\ddot{x}=mg-R, \tag{15}$$

где R — const.

Интегрируя (15) при начальных условиях (5), получаем зависимость:

$$\begin{cases} \dot{x}=\left(g-\dfrac{R}{m}\right)t+V, \\ x=\left(g-\dfrac{R}{m}\right)\dfrac{t^2}{2}+Vt, \\ \ddot{x}=\left(g-\dfrac{R}{m}\right). \end{cases} \tag{16}$$

Скорость $\dot{x}$ обращается в нуль, если $t=\dfrac{V}{R/m-g}$.

Поскольку время t положительно, то отсюда следует ограничение:

$$\frac{R}{m}\geq g. \tag{17}$$

На рис. 4 представлены графики функций (16).

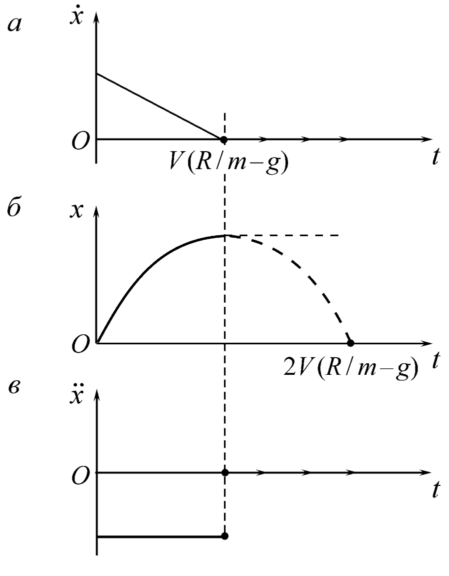

Рис. 4. Зависимости скорости, смещения, ускорения с ростом времени t при сопротивлении среды, равной константе

Из (16) и рис. 4*б* следует, что глубина проникания исходного тела в массив горных пород составляет величину $H=H_*$, где $H_*=\dfrac{V^2/2}{R/m-g}$, откуда вычисляется

$$R = m\left[g + \frac{V^2}{2H_*}\right]. \tag{18}$$

Из (18) получена формула $RH_* = mgH_* + mV^2/2$, выражающая собой закон сохранения энергии.

Необходимо отметить, что в формуле (18) величиной, зависящей от формы и геометрии рабочего органа инструмента при данном значении скорости *V*, является H_*. Меняя геометрию при данном значении *V*, будем находить разные значения H_* и разные значения сопротивления массива пород *R*.

Случай 3. Пусть сопротивление массива пород при внедрении в него инструмента определяется выражением

$$R = R_0 + R_1 x, \tag{19}$$

где R_0, R_1 — неизвестные априори постоянные.

Подставляя (19) в уравнение движения Ньютона, получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\ddot{x} + \frac{R_1}{m}x = g - \frac{R_0}{m}. \tag{20}$$

Решение (20) записывается в виде

$$x = C_1\cos\lambda t + C_2\sin\lambda t + \left(g - \frac{R_0}{m}\right)\frac{t^2}{2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\lambda^2 = R_1/m$.

При начальных условиях $x\big|_{t=0} = 0$, $\dot{x}\big|_{t=0} = V$ получаем выражения:

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\lambda t + \left(g - \dfrac{R_0}{m}\right)t, \\ x = \dfrac{V}{\lambda}\sin\lambda t + \left(g - \dfrac{R_0}{m}\right)\dfrac{t^2}{2}t, \\ \ddot{x} = -V\lambda\sin\lambda t + g - \dfrac{R}{m}. \end{cases} \tag{21}$$

Выражения (21) представляют собой суммы двух слагаемых – первые слагаемые связаны с колебаниями (с упругими колебаниями), вторые слагаемые с пластичными (неупругими) деформациями. Здесь есть момент времени, при котором скорость $\dot{x}$ обращается в ноль, после которого происходит восстановление упругих смещений.

Случай 4. Пусть сопротивление массива пород определяется выражением

$$R = R_0 + R_1\dot{x}, \tag{22}$$

где R_0, R_1 — неизвестные априори постоянные.

Подставляя (22) в уравнение движения Ньютона, получаем дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} = mg - R_0 - R_1\dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + \frac{R_1}{m}\dot{x} = g - \frac{R_0}{m},$$

решение которого является функция: $x = C_1 + C_2 e^{-\frac{R_1}{m}t} + \left(g - \frac{R_0}{m}\right)t$.

Удовлетворяя начальным условиям (5), получаем

$$\begin{cases} \dot{ч} = \left(V + \frac{R_0}{m} - g\right) e^{-\frac{R_1}{m}t} - \left(\frac{R_0}{m} - g\right), \\ x = \frac{m}{R_1}\left(V + \frac{R_0}{m} - g\right)(1 - e^{-\frac{R_1}{m}t}) - \left(\frac{R_0}{m} - g\right) t, \\ \ddot{x} = -\frac{R_1}{m}\left(V - g + \frac{R}{m}\right) e^{-\frac{R_1}{m}t}. \end{cases} \tag{23}$$

Из (23) непосредственно следует, что ускорение $\ddot{x}$ при $t \ge 0$ всегда отрицательно, т. е. функция $\dot{x} = \dot{x}(t)$ — убывающая от значения $\dot{x} = V$ при $t = 0$ до значения $\dot{x} = -\left(\frac{R_0}{m} - g\right)$ при $t \to \infty$.

При этом существует время t при котором скорость $\dot{x}$ обращается в ноль, тело останавливается. Это время определяется выражением

$$t = t_* = \frac{m}{R_1} \ln\left(1 + \frac{V}{\frac{R_0}{m} - g}\right). \tag{25}$$

Подставляя это значение t в выражение для x из (23), находим глубину проникания

$$H_* = \frac{mV}{R_1} - \left(\frac{R_0}{m} - g\right) t_*. \tag{26}$$

Отсюда находим $\frac{m}{R_1} = \frac{H_* + \left(\frac{R_0}{m} - g\right) t_*}{V}$, подставляя это выражение в (25). В результате получаем уравнение для отыскания неизвестной величины R_0:

$$Vt_* = \left[H_* + \left(\frac{R_0}{m} - g\right) t_*)\right] \ln\left(1 + \frac{V}{\frac{R_0}{m} - g}\right).$$

В этом уравнении предполагаются известными (из эксперимента) величины V, t_*, H_*, m, g. Неизвестной величиной является R_0. Отсюда находится R_0 и из (26) R_1.

Случай 5. Пусть сопротивление среды определяется зависимостью

$$R = R_0 + R_1(\dot{x})^2. \tag{27}$$

Подставляя (27) в уравнение движения Ньютона, находим следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \frac{R_2}{m}\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{R_0}{m} - g = 0. \tag{28}$$

Чтобы найти решение (28), делается замена [10] $\dot{x} = p(x)$, тогда $\ddot{x} = p'(x)px$ уравнение (28) переписывается в терминах функции p: $pdp/\partial x = -(R_2p^2 + R_0 - mg)/m$.

Интегрируя это уравнение, получаем

$$R_2p^2 + R_0 - mg = Ce^{-2R_2\frac{x}{m}}, \tag{29}$$

где C — произвольная постоянная. Удовлетворяя начальному условию $\dot{x} = p = V$ при $t = 0$, устанавливаем что

$$C = R_2 V^2 + R_0 - mg\,. \tag{30}$$

Разрешая (29) относительно $p = dx/\partial t$, находим, что

$$p = \frac{dx}{\partial t} = +\sqrt{\frac{C}{R_2} e^{-2R_2 \frac{x}{m}} - \frac{R_0}{R_2} + \frac{mg}{R_2}}\,. \tag{31}$$

Интегрируя (31), замечаем что

$$\sqrt{\frac{R_2}{R_0 - mg}} \arcsin \sqrt{\frac{R_0 - mg}{C}} e^{R_2 \frac{x}{m}} = t + C_1\,. \tag{32}$$

Из начального условия $x\big|_{t=0} = 0$, находим C_1 в (32):

$$C_1 = \sqrt{\frac{R_2}{R_0 - mg}} \arcsin \sqrt{\frac{R_0 - mg}{C}}\,. \tag{33}$$

Из (32) следует, что

$$e^{R_2 \frac{x}{m}} = \sqrt{\frac{C}{R_0 - mg}} \sin\left[\sqrt{\frac{R_0 - mg}{R_2}}(t + C_1)\right]. \tag{34}$$

Из (34) находим, что

$$\frac{R_2 x_{\max}}{m} = \ln \sqrt{\frac{C}{R_0 - mg}}\,, \tag{35}$$

где $x_{\max}$ — наибольшее значение x, которое достигается, когда аргумент синуса в (34) будет равен $\pi/2$. С учетом (33) получаем время, при котором x достигнет максимального значения:

$$x_{\max} = \frac{m}{2R_2} \ln\left(1 + \frac{R_2 V^2}{R_0 - mg}\right) \tag{36}$$

при соответствующем значении времени

$$t = t_{\max} = \sqrt{\frac{R_2}{R_0 - mg}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{1 + \dfrac{R_2 V^2}{R_0 - mg}}}\right] \tag{37}$$

Зная из опыта значения $x_{\max}$, $t_{\max}$, видим что (36), (37) образуют систему двух уравнений для определения параметров R_0, R_2 сопротивления материалов R.

Отметим, что формула (36) с точностью до ускорения свободного падения g совпадает с приведенной в [11, 12]. В [12] нет формулы (37), образующей с (36) систему уравнений для нахождения R_0, R_2.

ВЫВОДЫ

Показано, что наиболее ответственным за проникание твердых тел в преграду является вязко-пластическое сопротивление. Функция вязко-пластического сопротивления восстанавливается опытным путем при измерениях глубины и времени проникания. Для отыскания оптимальной геометрии инструмента необходимо провести серию экспериментов для разных геометрий инструмента: оптимальной считается та, при которой сопротивление среды для заданной глубины проникания минимально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Hertz H**. Uber die Beruhrung iester elastischer Korper, J. reine angeu. math. (Crelle), 92, 1881, 155 pp.
2. **Lyav A.** Mathematical Theory of Elasticity. ONTI, 1935. [**Ляв А.** Математическая теория упругости. — ОНТИ, 1935.]
3. **Daris R. M.** The determination os static and dynamic yield stresses using a steel fall. Proc. Roy., Soc. London., A, 197, 1949, 416 pp.
4. **White M. P. and Griffis L.** The propogation of plastieity in uniaxial compression. J. Appl.mech, 15, 1998, 256 pp.
5. **Taylor G. I.** The use flat-ended projectiles for determining Dynamic yield stress. I Theoretical considerations. Proc. Roy. Soc. London., A. 194, 1948, 289 pp.
6. **Thomson W. T.** An approximate theory of armor penetration, Journal of Applied Physics, 26, 1955, 80 pp.
7. **Danilov B. B., Smolyanitsky B. N., Chanyshev A. I., and Cheshchin D. O.** Finding forces required to change air hammer path in soil, Journal of Mining Science, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 676 – 685. [**Данилов Б. Б., Смоляницкий Б. Н., Чанышев А. И., Чещин Д. О.** Определение усилий для изменения траектории движения пневмопробойника в грунте // ФТПРПИ. — 2017. — № 4. — С. 69–79.]
8. **Danilov B. B., Smolyanitsky B. N., Chanyshev A. I., and Cheshchin D. O.** Determination of pneumatic puncher turn radius during change of its motion path in soil, Journal of Mining Science, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 397 – 403. [**Данилов Б. Б., Смоляницкий Б. Н., Чанышев А. И., Чещин Д. О.** Определение радиуса поворота пневмопробойника при изменении траектории его движения в грунте // ФТПРПИ. — 2018. — № 3. — С. 43 – 50.]
9. **Danilov B. B., Chanyshev A. I., and Cheshchin D. O.** Study of factors affecting adjustment of a pneumatic-punch penetration path in soil, Interexpo Geo-Siberia, 2017. vol. 2, no. 2, pp. 268 – 272.] [**Данилов Б. Б., Чанышев А. И., Чещин Д. О.** Определение усилий для изменения траектории движения пневмопробойника в грунте // Интерэкспо Гео-Сибирь. — 2017. — Т. 2. — № 2. — С. 268 – 272.]
10. **Vygodsky M. Ya.** Handbook of Higher Mathematics, Moscow, AST, Astrel, 2006, 991 pp. [**Выгодский М. Я.** Справочник по высшей математике. — М.: АСТ, Астрель, 2006. — 991 с.]
11. **Allen W. A., Mayfield E. B. and Morrison H. L.** Dynamics of a projectile penetrating sand, Journal of Applied Physics, 1957, vol. 28, pp. 370–376.
12. **Goldsmith W.** Beat. Theory and physical properties of colliding bodies, Moscow, Publishing House of Building Literature, 1965, 448 pp. [**Гольдсмит В.** Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. — М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965. — 448 с.]