

УДК 536.3+536.42

Моделирование таяния льда на вертикально расположенной подложке*

С.Д. Слепцов¹, Н.А. Саввинова²

¹*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

²*Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск*

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Методами математического моделирования проведен численный расчет влияния различных видов непрозрачных подложек на таяние льда. Показано, что при поддержании постоянной низкой температуры левой границы теплопроводящей подложки таяние льда не зависит от ее теплофизических свойств. Найдено пороговое значение теплофизических свойств, ниже которого зависимость от подложки необходимо учитывать.

Ключевые слова: лед, плавление, задача Стефана, анизотропное рассеяние, селективность, подложка.

Введение

Лед — распространенное в природе вещество. Прикладное применение льда обусловлено свойствами, проявляющимися при его взаимодействии с разными материалами через поток тепла теплопроводностью, конвекцией и излучением. В работах [1, 2] было показано сильное влияние материала подложек на таяние льда. В исследовании [3] проводились эксперименты в климатической камере, где левая граница подложки поддерживалась при постоянной низкой температуре, и эта температура являлась начальным условием для постановки задачи в расчетных работах [4–6]. В исследовании [7] для установления температуры примыкания подложки ко льду использовалось решение для полуограниченного тела с заданным на границе тепловым потоком. В работах [5, 6] для упрощения постановки задачи и снижения затрат на расчеты авторы отказались от рассмотрения подложки, исходя из предположения отсутствия потока тепла от нее, и тем не менее было получено удовлетворительное согласование с опытными данными [3].

Целью настоящей работы является математическое моделирование системы «подложка–лед», рассмотренной в работе [3], а также модельные расчеты подложек с различными теплофизическими параметрами.

* Исследования выполнены в рамках государственного задания ИТ СО РАН 121031800219-2.

Постановка задачи

В геометрическом смысле постановка задачи системы «подложка–лед» подобна приведенной в работе [4] схеме (см. рис. 1). В климатической камере с постоянной температурой T_∞ на вертикальной подложке толщиной L_1 по нормали к падающему потоку излучения от источника с температурой нити накаливания 3200 К и с постоянным падающим потоком E_v^* закреплен слой анизотропно рассеивающего свет плоского слоя льда с начальной толщиной L_2 . Свет рассеивается от пузырьков воздуха со средним радиусом r_b , равномерно распределенных по объему с долей f_V . Спектральный состав излучения аналогичен изученному в работе [6], значения приведены в таблице. Отметим, что в представленной работе, так же как в исследовании [3], левая граница подложки поддерживается при постоянной температуре T_{sub} , в отличие от работ [1, 2].

Предполагается, что поверхности льда диффузно поглощают, отражают и пропускают излучение таким образом, что $A_i + R_i + D_i = 1$, где A_i , R_i и D_i — полусферические поглощательные, отражательные и пропускательные способности соответственно. Также на поверхности выполняется условие $A_i = \varepsilon_i$, где ε_i — степень черноты поверхности, индекс $i = 1, 2$ относится к левой и правой сторонам льда соответственно.

Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе рассматривается нагрев за счет поглощения и рассеяния падающего излучения плоским слоем льда до достижения правой облучаемой границей последнего температуры таяния T_f . Далее начинается второй этап, в котором температура правой границы фиксирована: $T(L(t), t) = T_f$. Таким образом, в этой точке начинается таяние льда и выполняется условие Стефана. Образующаяся на поверхности вода стекает под действием силы тяготения, оставляя за собой тонкую пленку воды с температурой T_{fil} , превышающей температуру T_f . Будем предполагать, что толщина пленки пренебрежимо мала по сравнению с толщиной слоя льда, тогда перепадом температуры в ней можно пренебречь, считая её изотермичной. Таким образом, наличие пленки воды может быть учтено с помощью условия на межфазной границе в рамках однофазной задачи Стефана.

Нестационарные уравнения энергии для непрозрачной подложки $T_1(z, t)$ и плоского слоя льда $T_2(x, t)$ записываются следующим образом [4]:

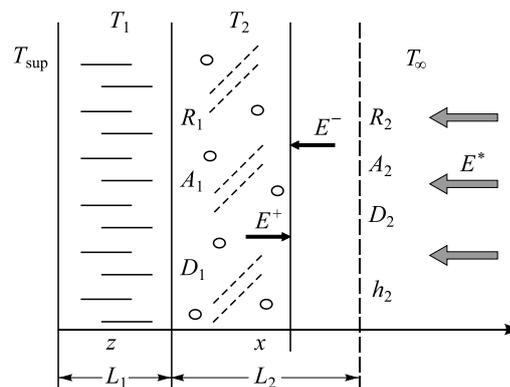


Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

Таблица
Спектральные характеристики льда и источника излучения

j	$\nu_j, 10^{14}$ Гц	$\lambda_j, \text{мкм}$	$\alpha_j, \text{м}^{-1}$	$E_j^*, \text{Вт/м}^2$
1	9,09–2,02	0,33–1,2	0,01	2073
2	2,02–1,18	1,2– ∞	1	1883

$$\begin{aligned}
c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial t} &= \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1(z, t)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < L_1, \\
c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} - E_v(x, t) \right), \quad 0 < x < L_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

здесь c_i — теплоемкость, λ_i — коэффициент теплопроводности ($i = 1, 2$ — подложка и лед соответственно), ρ_i — плотность, $a_i = \lambda_i / (c_i \rho_i)$ — температуропроводность, $E(x, t) = E^+(x, t) - E^-(x, t) = 2\pi \int_0^1 \int_0^\infty (I_v^+(x, \mu, t) - I_v^-(x, \mu, t)) \mu d\mu d\nu$ — плотность потока результирующего излучения, I_v^\pm — спектральная интенсивность излучения, μ — косинус угла между направлением излучения и осью координат x , ν — частота излучения.

Граничные условия для этапа нагрева льда имеют вид:

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_{\text{sub}}, \quad z = 0, \\
-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + A_1 E^-(x, t), \quad z = L_1, \quad x = 0, \\
\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - h(T_2 - T_\infty) - |E_{\text{res},2}| &= 0, \quad x = L_2,
\end{aligned} \tag{2}$$

здесь h — коэффициент теплоотдачи, $|E_{\text{res},2}| = A_2 [E^+(x, t) + E^*] - \varepsilon_2 \sigma_0 (T_2^4(x, t) - T_\infty^4)$, σ_0 — постоянная Стефана–Больцмана. Уравнения (1) и (2) дополняются начальным условием: $T_1(z, 0) = T_2(x, 0) = T_{\text{sub}}$.

На втором этапе граничные условия (2) для подложки и левой поверхности льда не меняются, температура облучаемой поверхности льда фиксирована: $T_2(x, t) = T_f$, а граничное условие правой поверхности трансформируется в условие Стефана с учетом образующейся пленки воды:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + h(T_{\text{fil}} - T_\infty) - |E_{\text{res},\text{fil}}| = \rho_2 \gamma \frac{\partial L_2}{\partial t}, \quad x = L_2(t), \tag{3}$$

здесь $|E_{\text{res},\text{fil}}| = A_2 [E^+(x, t) + E^*] - \varepsilon_2 \sigma_0 (T_2^4(x, t) - T_{\text{fil}}^4 - T_\infty^4)$, γ — скрытая теплота фазового перехода.

Входящие в уравнения (1)–(3) плотности результирующих радиационных потоков излучения E^\pm и $E_v = \sum_j (E_j^+ - E_j^-)$ (здесь j — номер спектральной полосы) определяются из решения уравнения переноса излучения в плоском слое излучающей, поглощающей и рассеивающей среды с известным распределением температур по слою. Расчет переноса излучения проводится с использованием простого, но достаточно точного модифицированного метода средних потоков [7, 8]. Согласно этому подходу, интегродифференциальное уравнение переноса излучения

$$\frac{\partial I_v(\tau, \mu, t)}{\partial \tau_v} + I_v(\tau_v, \mu, t) = (1 - \omega_v) n^2 B_v(T) + \frac{\omega_v}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I_v(x, \mu') d\mu'$$

сводится к системе двух дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной поглощающей и рассеивающей среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса для полусферических потоков E_j^\pm с учетом рассеяния излучения записывается как [7]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_j}(E_j^+ - E_j^-) + (1 - \omega_{j,\text{tr}})(m_j^+ E_j^+ - m_j^- E_j^-) &= (1 - \omega_{j,\text{tr}})n^2 B_j, \\ \frac{d}{d\tau_j}(m_j^+ l_j^+ E_j^+ - m_j^- l_j^- E_j^-) + (1 - \omega_{j,\text{tr}})(E_j^+ - E_j^-) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{j,\text{tr}} = 0: E_j^+ &= \varepsilon_1 \frac{B_j}{4} + R_1 E_j^-, \\ \tau_{j,\text{tr}} = \tau_j: E_j^- &= (1 - R_2) E_j^* + \left(1 - \frac{n^{*2}}{n^2} (1 - R_2)\right) E_j^+. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь B_j — функция Планка, $\omega_{j,\text{tr}} = \beta_{\text{tr}}/\kappa_{j,\text{tr}}$ — транспортное альбедро однократного рассеяния, n — показатель преломления среды, n^* — показатель преломления окружающего воздуха, β_{tr} — транспортный коэффициент рассеяния, $\kappa_{j,\text{tr}} = \beta_{\text{tr}} + \alpha_j$ — транспортный коэффициент ослабления, α_j — коэффициент поглощения, $\tau_{j,\text{tr}} = \kappa_{j,\text{tr}} L(t)$ — оптическая толщина. Значения коэффициентов m^\pm , l^\pm определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения [8].

Анизотропное рассеяние решается простым и эффективным методом транспортного приближения. Соотношение для рассеивающих сферических частиц, приведенное в работах [9, 10] и также использованное в [6], имеет следующий вид:

$$\beta_{\text{tr}} = 0,675(n-1)f_V/r_b. \quad (6)$$

Уравнение (1) с граничными условиями (2), (3) и уравнение (4) с граничными условиями (5) с учетом (6) приводятся к безразмерному виду аналогично тому, как это было сделано в работе [4]. Решение комбинированной задачи сводится к определению динамики таяния льда и роста температуры его необлучаемой поверхности, представляющей собой плоский слой селективно поглощающей, излучающей и рассеивающей среды.

Анализ полученных результатов

Ниже приводится анализ результатов численного расчета системы «подложка — лед» для физических параметров: толщина подложки $L_1 = 0,015$ м, начальная толщина льда $L_2 = 0,045$ м, температура левой границы подложки и начальная температура льда $T_{\text{sub}} = 260$ К, постоянная температура атмосферы внутри камеры и температура таяния льда $T_\infty = T_f = 273$ К, температура пленки воды $T_{\text{fil}} = 277$ К, постоянная плотность падающего потока излучения $E_V^* = 4649$ Вт/м² [3]. Теплофизические свойства бакелитовой подложки и льда следующие: теплопроводность $\lambda_1 = 0,232$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 1,87$ Вт/(м·К); температуропроводность $a_1 = 1,1 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $a_2 = 9,3 \cdot 10^{-7}$ м²/с; скрытая теплота фазового перехода $\gamma = 335$ кДж/кг. Оптические параметры льда имеют значения: показатель пре-

ломления льда $n = 1,31$ (для воздуха $n^* = 1$), коэффициенты отражения $R_1 = 0,96$ и $R_2 = 1 - \varepsilon_2$, степень черноты левой границы $\varepsilon_1 = 1 - R_1$. Соотношение для рассеяния $f_V/n_b = 10 \text{ м}^{-1}$. Спектральные характеристики льда и источника излучения представлены в таблице.

При решении задачи варьировались следующие параметры: коэффициент теплоотдачи h , степень черноты облучаемой поверхности льда ε_2 , отношения теплопроводностей подложки и льда $\Lambda = \lambda_1/\lambda_2$ и температу по проводности $A = a_1/a_2$. На первом этапе принималось $h = 9 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, $\varepsilon_2 = 0,31$, на втором этапе — $h = 90 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, $\varepsilon_2 = 0,99$. Эти значения были получены в ходе численного эксперимента.

На рис. 2 приведены для сравнения данные по динамике таяния льда $L_2(t)$ на подложках из бакелита ($\Lambda = A \approx 0,1$), модельных подложках ($A = \Lambda = 0,01, 1, 100$), а также экспериментальные результаты [3] и данные работы [6] без учета подложки. Видно, что практически все зависимости совпадают и удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, следовательно можно предположить, что темп таяния не зависит от теплофизических параметров подложки.

Рост температуры левой необлучаемой границы $T_2(0, t)$, представленной на рис. 3, имеет расхождение при малых значениях A и Λ ($0,01$ и $0,1$) и одинаков для более теплопроводящих подложек. При $A = \Lambda = 0,01$ температура достигает положительного значения на 13-й минуте и расчет задачи заканчивается. Данное расхождение можно также объяснить условием сопряжения на стыке подложки и льда (граничное условие 2): так как кроме безразмерных соотношений теплопроводности и температуропроводности другие параметры остаются постоянными, изменяются потоки тепла от льда и, соответственно, наблюдаются другие температурные поля. Таким образом, для соотношения системы «лед – подложка» значение $A = \Lambda = 0,1$ является пороговым значением, ниже которого реализуется граничное условие для изолирующих материалов.

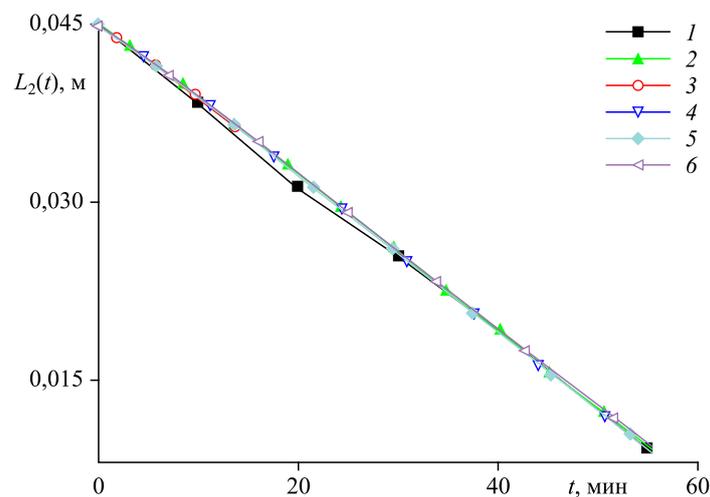


Рис. 2. Динамика таяния льда на разных подложках.

1 — результаты эксперимента [3], 2 — данные для подложки из бакелита, 3–5 — соответственно данные для модельных подложек при $A = \Lambda = 0,01, 1, 5$ и 100 , 6 — результаты расчета [6].

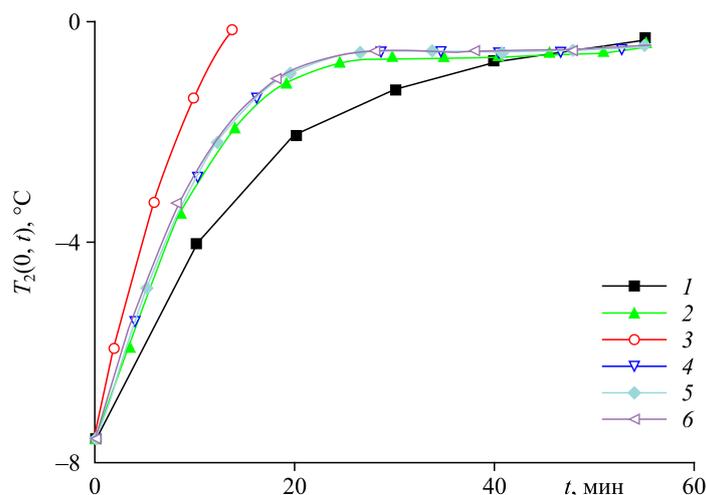


Рис. 3. Динамика роста температуры левой границы поверхности льда на разных подложках.

Обозначения см. на рис. 2.

Заключение

Методами численного моделирования в рамках однофазной задачи Стефана проведена оценка теплового влияния подложки на таяние льда. В решении тепловой задачи использовались как реальный материал, так и модельные материалы с разными теплофизическими свойствами. Радиационная часть решалась модифицированным методом средних потоков, учет анизотропного рассеяния осуществлялся транспортным методом. Получены данные по темпам таяния льда и роста температуры необлучаемой поверхности для разных подложек. Сопоставление с результатами работ [5, 6] показывает, что в теплопроводящих подложках при создании тех же условий, что и в работе [3], нет необходимости учета подложки. Сравнение с экспериментом показывает удовлетворительное согласование.

Список литературы

1. Savvinova N.A., Timofeev A.M., Malyshev A.V., Sleptsov S.D. Radiation heating of ice formed on the substrate // IEEE Xplore. 2020. P. 1–4.
2. Song B., Viskanta R. Deicing of solids using radiant heating // J. Thermophysics and Heat Transfer. 1990. Vol. 4, No. 3. P. 311–317.
3. Seki N., Sugawara M., Fukusaki S. Radiative melting of a horizontal clear ice layer // Wärme- und Stoffübertragung. 1978. Vol. 11, Iss. 2. P. 207–216.
4. Слепцов С.Д., Рубцов Н.А., Саввинова Н.А. Моделирование нагрева и таяния льда в приближении задачи Стефана с учетом излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 3. С. 439–446.
5. Sleptsov S.D., Savvinova N.A., Rubtsov N.A. Ice melting with allowance for selective absorption in the medium // J. Engng. Thermophys. 2019. Vol. 28, No. 1. P. 114–122.
6. Слепцов С.Д., Саввинова Н.А., Гришин М.А. Численное исследование теплового состояния льда содержащего пузырьки воздуха // Прикл. механика и техн. физика. 2021. Т. 62, № 3. С. 118–125.
7. Тимофеев А.М. Моделирование радиационного нагрева снежно-ледяного покрова // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 5. С. 797–804.
8. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 212 с.
9. Dombrovsky L.A., Kokhanovsky A.A. Solar heating of ice sheets containing gas bubbles // J. Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer. 2020. Vol. 250. P. 106991.
10. Dombrovsky L.A., Kokhanovsky A.A., Randrianalisoa J.H. On snowpack heating by solar radiation: A computational model // J. Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer. 2019. Vol. 227. P. 72–85.

Статья поступила в редакцию 10 марта 2022 г.,
после доработки — 25 апреля 2022 г.,
принята к публикации 17 июня 2022 г.