ПМТФ, № 1, 1969

ОБ УСТОЙЧИВОМ, ПО ЛЯПУНОВУ, РАВНОВЕСНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОБЛАКЕ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

С. В. Темко

(Москва)

Решение ряда проблем наталкивается на необходимость установления равновесного пространственного распределения заряженных частиц в облаке ионизованного газа, имеющем фиксированную форму и заданные размеры.

В данной работе найдено устойчивое, по Ляпунову, равновесное пространственное распределение заряженных частиц в ионизованном газообразном облаке, которое заключено в область пространства с фиксированной формой и данными размерами. Получено выражение для предельной энергии, запасенной ионизованным газом, при заданной степени ионизации нейтрального газа и установлены выражения для давления и химического потенциала ионизованного газа в облаке. При этом в данной работе использован общий метод решения определенного типа экстремальных задач, приведенный в работах [1,2], сводящий задачу оптимизации к решению соответствующей обратной задачи теории потенциала.

1. Пусть облако ионизованного газа имеет форму F, соответствующую эллипсоиду вращения. За ось вращения примем одну из осей эллипсоида. В данной работе ограничимся рассмотрением лишь случая устойчивого, по Ляпунову, равновесного скопления заряженных частиц, удерживаемых в эллиптической области F, и пренебрежем учетом собственного вращения облака как целого около одной из осей эллипсоида F. Поскольку эллиптическая область пространства принадлежит к классу выпуклых областей, ее граница удовлетворяет известному условию Пуанкаре [3], т. е. каждую точку границы области F можно рассматривать в качестве вершины некоторого конуса целиком расположенного внутри данной пространственной области F.

Найдем теперь устойчивое, по Ляпунову, равновесное распределение заряженных частиц в облаке ионизованного газа, имеющем эллиптическую форму и заданные размеры. С этой целью введем в рассмотрение распределение заряженных частиц в ионизованном газообразном облаке, обозначив это распределение через μ. Распределение μ будем искать в виде

$$d\mu = \chi(Q)\, dv_Q \tag{1.1}$$

Здесь dv_Q — трехмерный элемент объема; $\chi(Q)$ — плотность распределения заряженных частиц в ионизованном газе; Q — точка, принадлежащая эллиптической пространственной области F, заполненной ионизованным газом.

В дальнейшем условимся принадлежность точки Q к области F обозначать посредством $Q \in F$.

Скажем, что распределение зарядов μ сосредоточено в фиксированной пространственной области F, если частицы ионизованного газа будут отсутствовать вне области F. Это обстоятельство обозначают через $\mu \prec F$.

Пусть $\varphi(r)$ — потенциальная функция, соответствующая энергии взаимодействия пары единичных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга. В работе [1] было показано, что для достаточно широкого класса потенциальных функций $\varphi(r)$ справедлива теорема равновесия.

Подробный анализ потенциальных функций, для которых справедлива теорема равновесия, был проведен в работах [1,2].

В данной работе в качестве потенциальной функции для упрощения вычислений примем функцию, соответствующую «сглаженному» кулоновскому взаимодействию

$$\varphi(r) = r^{-1}(1 - e^{-\lambda r}) \tag{1.2}$$

приближенно учитывающему силы короткодействия [4-6]. Данное здесь рассмотрение проведено в основном для случая, когда параметр близкодействия λ^{-1} не мал и сравним со средним расстоянием между частицами ионизованного газа в облаке.

Поскольку $\varphi(r)$, взятая в виде (1.2), является выпуклой функцией, для нее справедлива теорема равновесия из [1].

Обозначим через $|P - Q|$ расстояние между точками P и Q. Пусть $P \in F$, $Q \in F$ и $\mu \prec F$, тогда функционал

$$I(\mu) = \int\limits_F \int\limits_F \varphi(|P - Q|)\chi(P)\chi(Q)\,dv_P dv_Q \tag{1.3}$$

(здесь интегрирование ведется по всей эллиптической области F, заполненной ионизованным газом) определяет потенциальную энергию всего облака ионизованного газа, имеющего фиксированную форму F и заданные размеры, при распределении заряженных частиц μ, представленном в виде (1.1), и при выбранной потенциальной функции $\varphi(r)$.

Известно [7], что система взаимодействующих частиц стремится занять такое положение, при котором ее потенциальная энергия достигает минимального значения. Состояние динамического равновесия совокупности частиц, при котором потенциальная энергия всей совокупности $I(\mu)$ принимает минимальное значение, отвечает устойчивому, по Ляпунову, равновесию данной совокупности [8].

Пусть $W(F)$ — минимальное значение потенциальной энергии облака ионизованного газа, имеющего эллиптическую форму и заданные размеры. Согласно [1] можно записать

$$W(F) = \inf_{\mu \prec F} I(\mu) \tag{1.4}$$

где нижняя грань берется по всем возможным распределениям заряженных частиц μ в ионизованном газообразном облаке F

Следуя работе [1], введем в рассмотрение φ-емкость пространственной области F.

Под φ-емкостью области F понимают [1] число $C(F; \varphi) > 0$, которое при конечном значении потенциальной энергии $W(F)$ определяется из уравнения

$$W(F) = K\varphi[c(F; \varphi)] \tag{1.5}$$

где K — коэффициент пропорциональности. В данном случае φ-емкость $C(F;\varphi)$ соответствует электроемкости ионизованного газообразного облака эллиптической формы F. Если $W(F) = +\infty$, то φ-емкость области F принимается равной нулю. Последнее отвечает случаю, когда, к примеру, весь ионизованный газ оказывается сосредоточенным в одной точке.

Эллиптическая область F с конечными размерами имеет положительную φ-емкость, поэтому вследствие [1] для данной области F существует единственное равновесное пространственное распределение заряженных частиц в облаке ионизованного газа μ^*, $d\mu^* = \chi^*(Q)\,dv_Q$, реализующее минимум потенциальной энергии $I(\mu)$, представленной функционалом (1.3).

Такое распределение заряженных частиц в облаке ионизованного газа будем называть устойчивым, по Ляпунову, равновесным пространственным распределением ионизованного газа в облаке с фиксированной формой F и заданными размерами.

Заметим, что ионизованный газ в состоянии устойчивого, по Ляпунову, равновесия в конечной пространственной области F в действительности сосредоточивается в области F_{μ^*}, называемой носителем распределения μ^*.

Вообще, носителем распределения μ называют такую область F_μ, входящую в данную область F, каждая точка P которой обладает свойством: какова бы ни была окрестность $O(P)$ точки P, выполняется требование: $\mu[O(P)] \neq 0$. Отметим, что область F_μ^* находится в результате решения задачи минимизации функционала $I(\mu)$.

2. Для нахождения устойчивого, по Ляпунову, равновесного распределения заряженных частиц μ^* в ионизованном газообразном облаке, обращающего в минимум функционал $I(\mu)$, введем в рассмотрение φ-потенциал $u(P)$, порожденный распределением μ. Согласно [1], φ-потенциал $u(P)$, порожденный распределением μ, представленным в виде (1.1), определяется интегралом следующего вида:

$$u(P) = \int_F \varphi(|P - Q|)\chi(Q)\, dv_Q \qquad (2.1)$$

Если φ-потенциал $u(P)$ порожден устойчивым, по Ляпунову, равновесным распределением μ^*, его называют φ-потенциалом равновесия и обозначают через $u^*(P)$ (см. [1]).

Так как потенциальная функция $\varphi(r)$, представленная в виде (1.2), удовлетворяет теореме равновесия из [1], для эллиптической области F положительной φ-емкости равновесное распределение заряженных частиц μ^* порождает φ-потенциал равновесия $u^*(P)$, обладающий следующими свойствами:

1). потенциал $u^*(P) = W(F)K^{-1/2}$ для всех точек $P \in F$,

2). потенциал $u^*(P) \leqslant W(F)K^{-1/2}$ для всех P, расположенных вне области F $(P \overline{\in} F)$.

Таким образом, для эллиптической области F, заполненной облаком ионизованного газа, граница которой удовлетворяет условию Пуанкаре, во всех точках $P \in F$ и $\mu^* \prec F$ имеем $u^*(P) = W(F)K^{-1/2}$. Отсюда вытекает

$$W(F)K^{-1/2} = \int_F \varphi(|P - Q|)\chi^*(Q)\, dv_Q \qquad (2.2)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $V(P)$, определив ее следующим образом:

$$V(P) = \begin{cases} W(F) & (P \in F) \\ 0 & (P \overline{\in} F) \end{cases}$$

Тогда для нахождения плотности распределения заряженных частиц $\chi(Q)$ в ионизованном газе в рассматриваемом здесь случае получим следующее интегральное уравнение первого рода:

$$V(P)K^{-1/2} = \int_F \varphi(|P - Q|)\chi(Q)\, dv_Q \qquad (3.2)$$

Можно показать, что распределение μ, удовлетворяющее уравнению типа (2.3), реализует минимум функционала (1.3).

3. Для решения интегрального уравнения (2.3) воспользуемся общим методом нахождения устойчивого, по Ляпунову, равновесного распределения μ^* для выбранной потенциальной функции $\varphi(r)$ и для фиксированной области F с заданными размерами, основанном на результатах работ [1,2]. Применяя к уравнению (2.3) преобразование Фурье, получаем следующее операторное уравнение:

$$V^\circ(P)\, K^{-1/2} = (2\pi)^{3/2}\, \varphi^\circ(P)\, \chi^\circ(P) \tag{3.1}$$

Здесь и в дальнейшем верхним индексом $^\circ$ обозначены образы Фурье функций. Равенство (3.1) для данной потенциальной функции $\varphi(r)$ вполне справедливо.

Для образа Фурье функции $V(P)$ получим

$$V^\circ(P) = W(F)\, \psi^\circ(P;\, F) \tag{3.2}$$

В этом соотношении $\psi^\circ(P;\, F)$ — образ Фурье характеристической функции области F

$$\psi^\circ(P;\, F) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_F e^{i(PM)}\, dv_M \tag{3.3}$$

Здесь (PM) — скалярное произведение радиус - векторов OP и OM точек $P = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ и $M\,(y_1,\, y_2,\, y_3)$.

Так как $\varphi(|M|) = \varphi(r)$ $(r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, то в силу [9] имеем

$$\varphi^\circ(P) = \varphi^\circ(\rho) \quad (\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Здесь $\varphi^\circ(\rho)$ — образ Ханкеля функции $\varphi(z)$

$$\varphi^\circ(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int\limits_0^\infty r^{3/2} \varphi(r)\, J_{3/2}(r\rho)\, dr, \tag{3.4}$$

при этом $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν.

Теперь операторное уравнение для $\chi^\circ(P)$ записывается в виде

$$W(F)\, \psi^\circ(P;\, F)\, K^{-1/2} = (2\pi)^{3/2}\, \varphi^\circ(\rho)\, \chi^\circ(P) \tag{3.5}$$

и задача отыскания $\chi^*(Q)$ сводится к определению оригинала Фурье для функции $\psi^\circ(P;\, F) / \varphi^\circ(\rho)$. Заметим, что в случае области произвольной формы оригинал Фурье для $\chi^\circ(P)$ может быть найден численными методами [10].

4. При помощи операторного уравнения (3.5) найдем явный вид для $\chi^*(Q)$ в случае эллиптической области F, в которой

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_3^2 + a_3^2 x_3^2 \leqslant 1 \quad (a_1,\, a_2,\, a_3 > 0) \tag{4.1}$$

(Для эллипсоида вращения $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = c$.)

Сначала найдем явный вид для $\psi^\circ(P;\, F)$. После перехода к новым переменным $t_k = a_k x_k$, $k = 1, 2, 3$ из (3.3) следует:

$$\psi^\circ(P;\, F) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \int\limits_{S^*} \exp\{i\,(P_1 T)\}\, dv_T \tag{4.2}$$

Здесь S^* — шар единичного радиуса

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \leqslant 1,\ P_1 = (x_1 / a_1,\, x_2 / a_2,\, x_3 / a_3),\ T = (t_1,\, t_2,\, t_3),\ dv_T = dt_1,\, dt_2\, dt_3$$

Перейдем от декартовых t_1, t_2, t_3 к сферическим координатам r, φ, ϑ; здесь ϑ — угол между OP_1 и OT. В результате получим

$$\psi^\circ(P;\, F) = \frac{1}{a_1 a_2 a_3}\, \frac{1}{R^{3/2}}\, J_{3/2}(R), \qquad R^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \tag{4.3}$$

Будем искать распределение заряженных частиц в облаке ионизованного газа в следующем виде:

$$d\mu^* = \chi^*(\,|\,a_1^2y_1^2 + a_2^2y_2^2 + a_3^2y_3^2\,|\,) \quad (Q = (y_1,\ y_2,\ y_3),\ Q \in F) \tag{4.4}$$

Теперь для образа Фурье $\chi^\circ(P)$ плотности распределения заряженных частиц $\chi(Q)$ получим

$$\chi^\circ(P) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_D \chi(|\,a_1^2y_1^2 + a_2^2y_2^2 + a_3^2y_3^2\,|)\, e^{i(PQ)}\, dv_Q \tag{4.5}$$

$$D\colon \{a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 \leqslant 1\}$$

После подстановки $t_k = a_ky_k$, $\zeta^2 = a_1^2y_1^2 + a_2^2y_2^2 + a_3^2y_3^2$ и перехода к сферическим координатам находим

$$\chi^\circ(P) = (a_1a_2a_3)^{-1}\chi^\circ(R) \tag{4.6}$$

Здесь $\chi^\circ(R)$ — образ Ханкеля искомой плотности распределения $\chi(\zeta)$

$$\chi^\circ(R) = \frac{1}{\sqrt{R}} \int\limits_0^1 \zeta^{3/2}\chi(\zeta)\, J_{1/2}(\zeta R)\, d\zeta \tag{4.7}$$

В результате операторное уравнение (3.5) для рассматриваемого случая переписывается в виде

$$W(F)\, R^{-3/2} J_{3/2}(R)\, K^{-1/2} = (2\pi)^{3/2}\chi^\circ(R)\,\varphi^\circ(\rho) \tag{4.8}$$

Для дальнейшего удобно преобразовать операторное уравнение (4.8). Пусть

$$x_k = Ra_kt_k \qquad (k = 1,2,3)$$

$$R^2 = x_1^2\,/\,a_1^2 + x_2^2\,/\,a_2^2 + x_3^2\,/\,a_3^2,\quad t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \leqslant 1$$

Так как $\rho^2 = R^2(a_1^2t_1^2 + a_2^2t_2^2 + a_3^2t_3^2)$, то

$$W(F)R^{-3/2}J_{3/2}(R)K^{-1/2} = (2\pi)^{3/2}\chi^\circ(R)\varphi^\circ(R[a_1^2t_1^2 + a_2^2t_2^2 + a_3^2t_3^2]^{1/2}) \tag{4.9}$$

Проинтегрировав обе часть равенства (4.9) по поверхности шара единичного радиуса $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$, найдем

$$K^{-1/2}SW(F)R^{-3/2}J_{3/2}(R) = (2\pi)^{3/2}\chi^\circ(R)\varphi^{\circ *}(R) \tag{4.10}$$

Здесь S — величина поверхности единичного шара S^*

$$\varphi^{\circ *}(R) = \int\limits_{S^*} \varphi^\circ(R\,[a_1^2t_1^2 + a_2^2t_2^2 + a_3^2t_3^2]^{1/2})\, d\sigma \tag{4.11}$$

($d\sigma$ — элемент поверхности S^*)

Для существования устойчивого, по Ляпунову, равновесного распределения заряженных частиц в облаке ионизованного газа, достаточно, чтобы существовала функция $\chi(\zeta)\zeta^{1/2}$, образом Ханкеля которой служит функция $\chi^\circ(R)R^{1/2}$, являющаяся решением операторного уравнения (4.10).

5. Для конкретности найдем прообраз Ханкеля $\chi^*(\zeta)$ для выбранной потенциальной функции $\varphi(r)$. Подставляя (1.2) в (3.4), находим

$$\varphi^\circ(\rho) = \sqrt{2/\pi}\,\lambda^2/\rho^2(\lambda^2 + \rho^2) \tag{5.1}$$

Теперь для $\varphi^{\circ *}(R)$ получим

$$\varphi^{\circ *}(R) = 4\pi R^{-2}\sqrt{2/\pi}\, B(R) \tag{5.2}$$

Здесь в зависимости от соотношения между осями эллипсоида вращения F имеем

$$\text{а)}\ B(R) = \frac{1}{2a\beta}\ln\frac{1+\beta/a}{1-\beta/a} - \frac{R}{2\alpha(R)\beta}\ln\frac{1+\beta R/\alpha(R)}{1-\beta R/\alpha(R)} \quad \text{при } a > c \tag{5.3}$$

$$\text{б)}\ B(R) = \frac{1}{a\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{a} - \frac{R}{\alpha(R)\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta R}{\alpha(R)} \quad \text{при } a < c \tag{5.4}$$

$$\alpha(R) = (\lambda^2 + a^2R^2)^{1/2}$$

(Если $a > c$, то $\beta^2 = a^2 - c^2$; если $a < c$, то $\beta^2 = c^2 - a^2$. Заметим, что при $a > c$ для всех R от 0 до $+\infty$ выполняется неравенство вида $(\beta R\,/\,\alpha(R)) < 1$.)

При помощи операторного уравнения (4.10) после обратного преобразования Ханкеля порядка $^1/_2$ находим выражение для плотности устойчивого, по Ляпунову, равновесного распределения

$$K^{1/2}\chi(\zeta)=\frac{W(F)}{4\pi\zeta^{1/2}}\int\limits_0^\infty\frac{R^2}{B(R)}J_{3/2}(R)\,J_{1/2}(\zeta R)\,dR \tag{5.5}$$

Условие нормировки для $\chi(\zeta)$ дает общее число заряженных частиц $\mu(F)$, заключенных в объеме ионизованного газообразного облака

$$\mu(F)=W(F)\omega(F) \tag{5.6}$$

Здесь $1/\omega(F)$ — химический потенциал для рассматриваемого случая ионизованного газа, образующего облако эллиптической формы [1]

$$\omega(F)=\frac{1}{a^2cK^{1/2}}\int\limits_0^{R_{\max}}R\,[J_{3/2}(R)]^2\frac{dR}{B(R)} \tag{5.7}$$

Из условия нормировки для $\chi(\zeta)$, в частности, вытекает, что $K^{1/2}$ равно общему числу заряженных частиц в облаке ионизованного газа, т. е. $K^{1/2}=\mu(F)$.

6. Пусть теперь n — средняя концентрация нейтральных молекул, тогда при степени ионизации f концентрация заряженных частиц в газе составит fn и общее число заряженных частиц $\mu(F)$ в облаке ионизованного газа, имеющем объем $^4/_3\pi a^2c$, будет составлять $\mu(F)={}^4/_3\,\pi a^2cfn$. Приравнивая оба значения для $\mu(F)$, находим величину потенциальной энергии

$$W(F)=\frac{4\pi}{3}\frac{a^2cfn}{\omega(F)} \tag{6.1}$$

Разделим энергию $W(F)$ на объем облака ионизованного газа и получим давление газа внутри облака $p(F)=fn/\omega(F)$

Равновесие устанавливается тогда, когда давление ионизованного газа становится равным внешнему давлению, в частности при условии $p(F)=p_0$, где p_0 — внешнее давление. Отсюда находим выражение для степени ионизации $f(F)$

$$f(F)=\frac{1}{2a^2cn}\left(\frac{3p_0}{\pi}\int\limits_0^{R_{\max}}R\,[J_{3/2}(R)]^2\frac{dR}{B(R)}\right)^{1/2} \tag{6.2}$$

которая зависит от формы облака ионизованного газа F, его размеров a, c, величины внешнего давления p_0 и температуры ионизованного газа, входящей через параметр λ. Можно, в частности, показать, что для сильно разреженного газа параметр λ^{-1} оказывается равным параметру близкодействия, введенному Л. Д. Ландау в [11], т. е. $\lambda^{-1}=e^2/\theta$, где θ — средняя температура ионизованного газа; e — элементарный заряд.

7. Для получения приближенных выражений плотности устойчивого, по Ляпунову, равновесного распределения заряженных частиц $\chi(\zeta)$ в ионизованном газообразном облаке воспользуемся разложением в ряды.

Пусть $a>c$. Разложим $1/B(R)$ в ряд по формуле геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии, равным

$$\frac{R}{2b^2\beta\alpha(R)}\ln\frac{1+\beta R/\alpha(R)}{1-\beta R/\alpha(R)}\qquad\left(b^2=\frac{1}{2a\beta}\ln\frac{1+\beta/a}{1-\beta/a}\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{B(R)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^kb^{2k+2}\beta^k}\left(\frac{R}{\alpha(R)}\right)^k\left[\ln\frac{1+\beta R/\alpha(R)}{1-\beta R/\alpha(R)}\right]^k \tag{7.1}$$

После дальнейшего разложения в степенной ряд входящего в (7.1) логарифма, ограничиваясь лишь первыми членами разложения, находим

$$\frac{1}{B(R)}\approx\frac{1}{b^2}-\frac{R^2}{b^4[\alpha(R)]^2} \tag{7.2}$$

Подставим в (5.5) приближенное выражение для $1/B(R)$, при условии $a\gg c$, так как

$$J_{1/2}(\zeta R)=\sqrt{2/\pi R\zeta}\sin R\zeta,\quad J_{3/2}(R)=\sqrt{2/\pi R}\,(R^{-1}\sin R-\cos R)$$

---

[1] Введение верхнего предела $R_{\max}$ отвечает представлению о конечном радиусе частиц ионизованного газа.

получаем плотность равновесного распределения заряженных частиц в «шнуровидном» разряде конечных размеров

$$\chi(\zeta) \approx \frac{W(F)}{4\pi}\left(\frac{1}{2\ln(2a/c)}\right)\frac{\delta(1-\zeta)}{\zeta} +$$

$$+\frac{W(F)}{4\pi}\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\left(\frac{1}{2\ln(2a/c)}\right)e^{-\lambda/a}\left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda\zeta/a)}{\zeta}\right) \tag{7.3}$$

Таким образом, плотность равновесного распределения заряженных частиц в «шнуре» возрастает к периферии, что согласуется с выводом А. А. Власовым [12], сделанным в результате гидродинамического рассмотрения. В работе [12], в частности, было показано, что облако ионизованного газа эллиптической формы обладает гидродинамической устойчивостью по отношению к малым возмущениям формы.

Пусть теперь $a < c$. Воспользуемся выражением для $B(R)$, справедливым при $a < c$. Разделим в выражении (5.5) весь интервал интегрирования по R от 0 до $+\infty$ на два интервала: от 0 до R_1 и от R_1 до $+\infty$. Выберем R_1 так, чтобы при $0 \leqslant R < R_1$ выполнялось неравенство $(\beta R / \alpha(R)) < 1$. Это возможно при $R_1 = \lambda / (\beta^2 - a^2)^{1/2}$. Теперь после соответствующих разложений $B(R)$ в ряды из (5.5) вытекает приближенное выражение для $\chi(\zeta)$ при $a < c$. Это выражение включает линейную комбинацию произведений тригонометрических функций на соответствующие интегральный синус и интегральный косинус. При $\zeta = 0$ плотность равновесного распределения заряженных частиц $\chi(\zeta)$ имеет максимум и убывает при $\zeta \to 1$. Из-за громоздкости полученного приближенного выражения для $\chi(\zeta)$ при $a < c$ оно здесь не приводится.

Заметим, что выражение (5.5) для $\chi(\zeta)$ является точным и допускает выполнение интегрирования численными методами, например, по формуле Симпсона [13, 14].

Здесь рассмотрен случай «сглаженного» кулоновского взаимодействия заряженных частиц в ионизованном газе без учета равномерного вращения всего облака около одной из осей эллипсоида. Однако нет каких-либо принципиальных затруднений для более подробного учета короткодействия, например, с помощью потенциалов Ленарда — Джонса (см. [4]) и для учета влияния равномерного вращения облака ионизованного газа как целого.

В заключение пользуюсь возможностью выразить глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову, Б. Б. Кадомцеву и Ю. Н. Барабаненкову за участие в обсуждении данной работы и сделанные замечания.

Поступила 27 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Темко К. В., Темко С. В. О потенциале равновесия. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, вып. 3.
2. Темко К. В. О потенциале равновесия, выпуклой емкости и единственности тригонометрических рядов. Матем. сб., 1959, т. 49 (91), вып. 1.
3. Poincare H. Figures d'e'quilibre d'une masse fluide. Paris, Gauthier — Villars, 1902.
4. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946.
5. Глауберман А. Е., Юхновский И. Р. К статистической теории концентрированных растворов сильных электролитов. ЖЭТФ, 1952, т. 22, вып. 5.
6. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М., Атомиздат, 1964.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. Механика, М., Физматгиз, 1958.
8. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М. Физматгиз, 1966.
9. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. М., Физматгиз, 1962.
10. Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск, «Наука и техника», 1968.
11. Landau L. Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung. Physikulische Zeitschrift der Sowietunion, 1936, Bd. 10, H. 2.
12. Власов А. А. О переносе массы и заряда поверхностными волнами. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 2 (8).
13. Крылов В. И. Приближенные вычисления интегралов, М., Физматгиз, 1967.
14. Гнеденко Б. В., Королюк В. С., Ющенко Е. Л. Элементы программирования. М., Физматгиз, 1961.