

УДК 539.37

## РАДИАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЕЙ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. М. Садовский, О. В. Садовская, А. А. Лукьянов\*

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия

\* Абингдонский технологический центр “Шлюмберже”,

OX14 1UJ Абингдон, Великобритания

E-mails: Sadov@icm.krasn.ru, O\_Sadov@icm.krasn.ru, ALukyanov@slb.com

В рамках теории малых упругопластических деформаций однородной изотропной пористой среды в замкнутой форме строится решение, описывающее поля перемещений и напряжений вокруг расширяющихся полостей сферической и цилиндрической формы с учетом схлопывания пор. Переход среды в пластическое состояние моделируется с помощью условия текучести Треска — Сен-Венана. Изменение пористости описывается на основе разработанной математической модели, учитывающей увеличение жесткости пористого материала в момент схлопывания пор. Показано, что на стадии упругого деформирования пористость не меняется, с увеличением давления в окрестности полости образуется зона пластического уплотнения, в части которой поры схлопываются. Построены поля напряжений и перемещений в пористой среде в процессе разгрузки. Показано, что при определенных условиях за стадией упругой разгрузки следует стадия повторного пластического течения с образованием зоны расширения пор, граница которой по мере понижения давления одновременно достигает зоны повторного пластического течения и зоны схлопывания пор.

Ключевые слова: пористая среда, упругость, пластичность, схлопывание пор, разгрузка, расширение пор.

**Введение.** Задача о расширении и схлопывании полости в безграничной среде имеет приложения в аэрокосмической, судостроительной и нефтедобывающей отраслях, а также в геомеханике и геодинамике. В классической постановке для изотропной однородной сплошной среды задача решалась в работах [1–6]. С помощью ее решения на микроуровне построены определяющие соотношения для пористых материалов, что позволило исследовать процессы распространения ударных волн в пористых средах [7–9], эффекты упрочнения и разрушения [10], а также процессы горения в твердом топливе [11].

Особое значение задача о квазистатическом расширении полости в пористой среде под действием внутреннего давления имеет в нефтегазовой геофизике. В процессе разработки месторождений в добывающих и закачивающих скважинах реализуются различные режимы, связанные с повышением или понижением давления в призабойной зоне. Повышение давления в скважине приводит к сжатию и последующему схлопыванию пор, что препятствует протеканию фильтрационных процессов вблизи поверхности скважины вплоть

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00130).

до полного запираания углеводородов в породном массиве. При понижении давления после стадии упругой разгрузки может возникнуть стадия повторного пластического течения с образованием зоны расширения пор, граница которой постепенно достигает зоны повторного пластического течения и зоны схлопывания пор. На практике в первом случае большое значение имеет оценка характерного размера зоны запираания в зависимости от величины давления при заданных механических параметрах геоматериала. Во втором случае важно определить характерный размер зоны расширения пор и остаточные деформации среды, что позволяет оценить коэффициент восстановления фильтрационных свойств призабойной зоны.

В настоящей работе процесс схлопывания-расширения пор, обуславливающий скачкообразное изменение жесткости материала, учитывается на феноменологическом уровне. Решение задачи строится для безграничной упругопластической пористой среды на основе математической модели, механическими параметрами которой являются коэффициенты упругости изотропного пористого материала, предел текучести при чистом сдвиге и пористость.

**1. Расширение сферической полости.** Пористость определяется как отношение объема пор к объему материала:  $\theta_0 = V_0/V$ . Обозначим через  $\rho$  плотность материала без пор. Тогда, пренебрегая наличием жидкости или газа в порах, плотность пористого материала можно вычислить по формуле  $\rho_0 = \rho(V - V_0)/V$ . Следовательно,  $\theta_0 = (\rho - \rho_0)/\rho$ . Для высокопористых материалов деформация объема, вызванная схлопыванием пор, значительно больше сопутствующей деформации объемного сжатия скелета, поэтому поры исчезают при объемной деформации  $\theta \approx ((V - V_0) - V)/V = -\theta_0$ . В этом приближении до момента схлопывания пор выполняется строгое неравенство  $\theta > -\theta_0$ .

Реологические модели одноосной деформации пористых сред разного уровня сложности построены в [12]. На рис. 1,а приведена простейшая реологическая схема, учитывающая основные особенности деформирования таких сред. Поведение материала при растяжении и сжатии до момента схлопывания пор имитируется упругой пружиной с модулем Юнга  $E$ , а увеличение жесткости после схлопывания — пружиной с модулем Юнга  $E_0$ . Звенья представленной на рис. 1,б кривой одноосного растяжения-сжатия с изломом в точке  $\varepsilon = -\theta_0$  определяются уравнениями  $\sigma = E\varepsilon$ ,  $\sigma = E\varepsilon + E_0(\varepsilon + \theta_0)$ . Данная схема описывает процесс упругого деформирования, при котором не происходит диссипации механической энергии. На рис. 2 приведена более общая реологическая схема с пластическим шарниром. Предполагается, что при растягивающем напряжении  $\sigma_s^+$  материал переходит в состояние

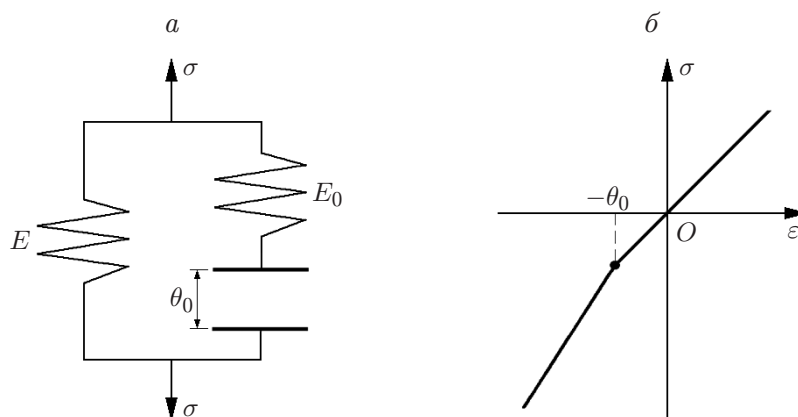


Рис. 1. Реологическая схема (а) и диаграмма (б) одноосного растяжения-сжатия упругого пористого материала

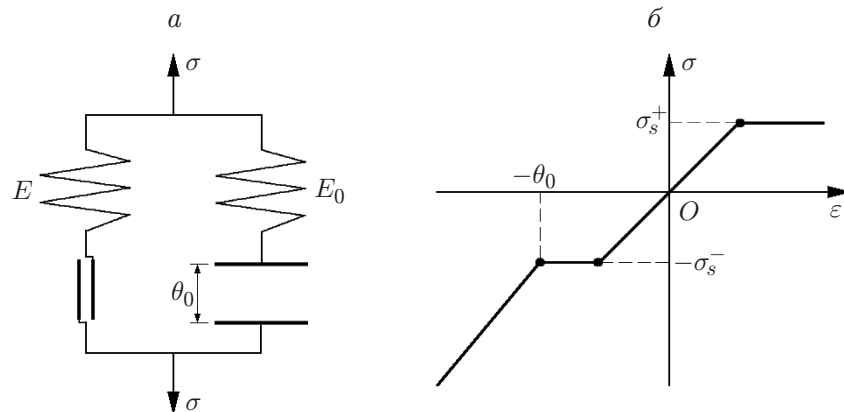


Рис. 2. Реологическая схема (а) и диаграмма (б) одноосного растяжения-сжатия упругопластического пористого материала

текучести, а при сжимающем напряжении  $-\sigma_s^-$  происходит пластическая потеря устойчивости пористого скелета. Диаграмма одноосного деформирования представляет собой четырехзвенную ломаную. Этапу упругого деформирования, как и выше, соответствует уравнение  $\sigma = E\varepsilon$ , а этапу упругопластического деформирования сплошного материала после схлопывания пор — уравнение  $\sigma = E_0(\varepsilon + \theta_0) - \sigma_s^-$ . В процессе упругой разгрузки пластическая составляющая деформации не меняется. Если поры расширены, то разгрузка описывается уравнением  $d\sigma = E d\varepsilon$ , а если поры находятся в состоянии схлопывания, — уравнением  $d\sigma = (E + E_0) d\varepsilon$ .

Радиальное расширение сферической полости радиусом  $r_0$  в безграничной среде под действием медленно увеличивающегося давления  $p_0$  опишем на основе пространственного обобщения представленной модели. На стадии упругого деформирования отличные от нуля напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi = \sigma_\psi$ , деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\psi$ , рассматриваемые в сферической системе координат, и радиальное перемещение  $u_r$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_r + 2\sigma_\varphi = 3k(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi), \quad \sigma_\varphi - \sigma_r = 2\mu(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $k, \mu$  — модули объемного сжатия и сдвига пористого материала. Система (1.1) имеет два линейно независимых решения  $u_r = A_1/r^2$  и  $u_r = B_1r$  ( $A_1 = \text{const}, B_1 = \text{const}$ ). Первое из этих решений описывает формоизменение среды при равной нулю объемной деформации:  $\theta = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi = 0$ . Поле перемещений удовлетворяет условию убывания на бесконечности, которое выполняется в случае безграничной среды. С помощью второго решения, описывающего объемную деформацию без формоизменения, можно решить более сложную задачу о расширении сферического слоя конечных размеров.

После подстановки первого выражения для  $u_r$  в (1.1) с учетом граничного условия при  $r = r_0$  получаем

$$\sigma_r = -2\sigma_\varphi = -p_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3, \quad u_r = \frac{p_0 r_0^3}{4\mu r^2}. \quad (1.2)$$

Состояние упругости реализуется вплоть до момента достижения на поверхности полости предельного давления  $p_s = 4\tau_s/3$ , определяемого по условию Треска — Сен-Венана

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2\tau_s \quad (1.3)$$

( $\tau_s$  — предел текучести пористого материала при чистом сдвиге).

Стадия пластической деформации описывается системой, получаемой из (1.1) путем замены последнего уравнения на (1.3). Из этой системы с учетом граничного условия при  $r = r_0$  находим

$$\sigma_r = -p_0 + 4\tau_s \ln(r/r_0), \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + 2\tau_s. \quad (1.4)$$

Перемещение в зоне пластичности определяется из уравнения упругой деформации объема

$$\frac{k}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} = \frac{\sigma_r + 2\sigma_\varphi}{3} = \sigma_r + p_s.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$3k u_r = -p_0 r + 4\tau_s r \ln(r/r_0) + C_1/r^2. \quad (1.5)$$

На поверхности раздела между зоной пластической деформации  $r_0 < r < r_s$  и зоной упругого деформирования  $r > r_s$  выполняются условия непрерывности радиальных напряжения и перемещения, а также дополнительное условие предельного упругого состояния среды в окрестности зоны упругого деформирования. В зоне упругого деформирования решение задается формулами (1.2), в которых радиус полости  $r_0$  заменяется на  $r_s$ , а давление  $p_0$  внутри полости — на  $p_s$ . Кроме того, имеет место равенство  $p_s = p_0 - 4\tau_s \ln(r_s/r_0)$ , из которого следует

$$r_s = r_0 \exp((p_0 - p_s)/(4\tau_s)).$$

Постоянная интегрирования, входящая в (1.5), определяется из условия непрерывности перемещения при переходе через границу раздела

$$C_1 = (k/\mu + 4/3)\tau_s r_s^3.$$

Полученное выражение для перемещения позволяет вычислить полные деформации среды в зоне пластичности вплоть до момента схлопывания пор. С помощью (1.4) и закона Гука можно определить упругие составляющие деформаций  $\varepsilon_j^e$  ( $j = r, \varphi$ ), а затем их пластические составляющие по формулам  $\varepsilon_j^p = \varepsilon_j - \varepsilon_j^e$ . Критическое давление  $p_c > p_s$ , при котором на поверхности полости происходит схлопывание пор, вычисляется на основе равенства  $\theta = -\theta_0$  с помощью приведенной выше формулы для деформации объема:  $p_c = k\theta_0 + p_s$ . Дальнейшее повышение давления приводит к образованию внутри зоны пластичности зоны уплотненного, непористого материала  $r_0 < r < r_c$ . Исследуем напряженно-деформированное состояние в этой зоне в рамках математической модели с реологической схемой, представленной на рис. 2.

Определяющие соотношения жесткого контакта, соответствующего данной схеме, приводятся к двум эквивалентным вариационным неравенствам [12]

$$(\tilde{\sigma}_j - \sigma_j^c)(\varepsilon_j^c + \theta_0/3) \leq 0, \quad \tilde{\sigma} \in K, \quad \sigma^c \in K, \quad \sigma_j^c(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j^c) \leq 0, \quad \tilde{\varepsilon} \in C, \quad \varepsilon^c \in C.$$

Здесь  $C = \{\varepsilon: \theta(\varepsilon) \geq -\theta_0\}$  и  $K = \{\sigma: \sigma_j = -q \leq 0\}$  — сопряженные конусы допустимых деформаций и напряжений в жестком контакте; знаком “ $\sim$ ” отмечены произвольные варьируемые величины; по индексу  $j = r, \varphi, \psi$  проводится суммирование.

Переходя к геометрической интерпретации, можно показать, что решение вариационных неравенств принимает вид  $\theta(\varepsilon^c) = -\theta_0$ ,  $\sigma_r^c = \sigma_\varphi^c = -q \leq 0$ . Таким образом, полные напряжения в зоне схлопывания пор вычисляются через напряжения в пластическом элементе  $\sigma_j^p$  по формулам  $\sigma_r = \sigma_r^p - q$ ,  $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^p - q$ , а величину  $q$  можно интерпретировать как дополнительное давление, обусловленное схлопыванием.

Так как  $\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_\varphi^p - \sigma_r^p$ , то из уравнения равновесия с учетом непрерывности радиального напряжения на поверхности раздела между зоной схлопывания пор и зоной пластичности следует, что полные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  в этих зонах задаются одними и

теми же формулами (1.4). Различаются лишь выражения для деформаций. В соответствии с реологической схемой в зоне схлопывания  $\theta = -\theta_0 - q/k_0$ , где  $k_0$  — модуль объемного сжатия упругого элемента, последовательно соединенного с жестким контактом. В то же время

$$\theta = (\sigma_r^p + 2\sigma_\varphi^p)/(3k) = (\sigma_r + 2\sigma_\varphi + 3q)/(3k).$$

Следовательно,

$$(1/k + 1/k_0)q = -\theta_0 - (\sigma_r + 2\sigma_\varphi)/(3k).$$

Для объемной деформации выполняется уравнение

$$\frac{k_0 + k}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} = -k_0 \theta_0 - p_0 + p_s + 4\tau_s \ln \frac{r}{r_0}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$3(k_0 + k)u_r = -(k_0 \theta_0 + p_0)r + 4\tau_s r \ln(r/r_0) + C_2/r^2. \quad (1.6)$$

Постоянная интегрирования  $C_2$  и радиус зоны схлопывания  $r_c$  находятся из условия непрерывности перемещения и условия  $\theta = -\theta_0$  на границе раздела со стороны зоны пластичности. Из последнего условия получаем

$$-k \theta_0 = -p_0 + p_s + 4\tau_s \ln(r_c/r_0), \quad r_c = r_0 \exp((p_0 - p_c)/(4\tau_s)).$$

Перемещение в зоне пластичности вычисляется по формуле (1.5) после замены  $p_0$  на  $p_c$  и  $r_0$  на  $r_c$ . В зоне схлопывания пор справедливо уравнение (1.6). При  $r = r_c$  из условия непрерывности  $u_r$  следует

$$kC_2 = -k_0 p_s r_c^3 + (k_0 + k)C_1.$$

Выражение (1.6) для перемещения позволяет определить обратимые и необратимые составляющие деформаций в зоне схлопывания пор.

**2. Упругая разгрузка и повторное течение.** Пусть  $\Delta\sigma_r$ ,  $\Delta\sigma_\varphi$  и  $\Delta\varepsilon_r$ ,  $\Delta\varepsilon_\varphi$  — приращения напряжений и деформаций, вызванные понижением давления внутри полости на величину  $\Delta p < 0$ . В соответствии с реологической схемой модели в зоне схлопывания пор (при наличии такой зоны) приращение объемной деформации удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\sigma_r + 2\Delta\sigma_\varphi + 3\Delta q}{3k} = -\frac{\Delta q}{k_0},$$

где  $\Delta q$  — приращение давления на жестком контакте. Разрешая эти уравнения относительно  $\Delta q$ , получаем

$$\Delta\sigma_r + 2\Delta\sigma_\varphi = 3(k_0 + k) \Delta\theta. \quad (2.1)$$

Еще одно уравнение является следствием закона Гука для сдвигов:

$$\Delta\sigma_\varphi - \Delta\sigma_r = 2\mu(\Delta\varepsilon_\varphi - \Delta\varepsilon_r). \quad (2.2)$$

В оставшейся области ( $r > r_c$ ) приращения напряжений и деформаций удовлетворяют аналогичным уравнениям с модулем объемного сжатия  $k$  вместо  $k_0 + k$ .

Чтобы определить распределение напряжений и радиального перемещения при разгрузке, необходимо проинтегрировать систему, включающую уравнение равновесия для приращений напряжений и определяющие уравнения (2.1), (2.2), с граничным условием  $\Delta\sigma_r = -\Delta p$  на поверхности полости и условием убывания на бесконечности. Искомое решение задается формулами (1.2), записанными в приращениях, после замены  $p_0$  на  $\Delta p$ . Это решение, не зависящее от модуля объемного сжатия, описывает процесс деформации

среды при постоянном объеме ( $\Delta\theta = 0$ ), поэтому радиус зоны схлопывания пор  $r_c$ , который вычисляется из уравнения  $\theta = -\theta_0$ , на стадии упругой разгрузки не изменяется.

Следовательно, остаточные напряжения и перемещения в пористой среде на стадии упругой разгрузки вычисляются независимо от размера зоны схлопывания пор путем сложения исходных напряжений и перемещения, соответствующих монотонному нагружению до значения давления  $p_0$ , с упругими приращениями:

$$\Delta\sigma_r = -2\Delta\sigma_\varphi = -\Delta p \left(\frac{r_0}{r}\right)^3, \quad \Delta u_r = \frac{\Delta p r_0^3}{4\mu r^2}. \quad (2.3)$$

Такой способ вычисления корректен вплоть до момента достижения напряжениями на поверхности полости значений, соответствующих противоположной грани призмы текучести Треска — Сен-Венана:

$$\sigma_\varphi + \Delta\sigma_\varphi - \sigma_r - \Delta\sigma_r = 2\tau_s + (3/2)\Delta p = -2\tau_s, \quad \Delta p = -2p_s.$$

Дальнейшее понижение давления приводит к образованию вблизи полости зоны повторного пластического течения. Режим повторного течения наступает в тот момент, когда давление внутри полости достигает значения  $p_u = p_0 - 2p_s$ . Если  $p_0 > 2p_s$ , то этот режим наступает до момента полной разгрузки, а если  $p_s < p_0 < 2p_s$ , то после разгрузки при нагружении давлением с противоположным знаком.

В близкой постановке режим повторного пластического течения изучался в работах [13, 14]. Наблюдаемый эффект имеет простое объяснение. Переход в пластическое состояние вызван действием разгружаемой упругой части среды на необратимо деформированную пластическую часть.

В силу уравнения равновесия в зоне повторного пластического течения выполняются равенства

$$\sigma_r = -p - 4\tau_s \ln(r/r_0), \quad \sigma_\varphi = \sigma_r - 2\tau_s, \quad (2.4)$$

где  $p < p_u$  — давление внутри полости. На границе этой зоны реализуется предельное состояние упругой разгрузки, в котором радиальное напряжение повышается на величину  $-\Delta p = 2p_s$ . Радиус зоны  $r_u$ , определяемой из условия непрерывности радиального напряжения

$$-p_0 + 4\tau_s \ln(r/r_0) + 2p_s = -p - 4\tau_s \ln(r/r_0), \quad r_u = r_0 \exp((p_u - p)/(8\tau_s)),$$

не превышает радиуса зоны пластичности  $r_s$  и стремится к  $r_s$  при нагружении отрицательным давлением  $p = -p_0$ .

Остаточные напряжения и радиальное перемещение в зоне упругой разгрузки  $r \geq r_u$  получаются путем добавления к исходным напряжениям и перемещению приращений, вычисленных по формулам (2.3) после замены  $r_0$  на  $r_u$  и  $\Delta p$  на  $-2p_s$ . Определение перемещения в зоне повторной пластичности представляет собой более сложную задачу. Если первоначальное нагружение сопровождалось схлопыванием пор, т. е. если  $p_0 > p_c$ , то при понижении давления в полости до значения  $p_e = k\theta_0 - p_s$  начинается обратный процесс — расширение пор вблизи поверхности полости. Формула для давления  $p_e$  может быть получена из уравнения упругого изменения объема среды с расширенными порами  $k\theta = \sigma_r - p_s$  и условия схлопывания  $\theta = -\theta_0$ . Радиус зоны расширения определяется с использованием (2.4):

$$r_e = r_0 \exp((p_e - p)/(4\tau_s)) \quad (p < p_e).$$

Заметим, что значение  $r_e$  не может быть больше  $r_u$ , поскольку расширение пор возможно только в процессе пластического деформирования среды. Совпадение зон расширения и

повторного пластического течения ( $r_e = r_u$ ) наблюдается в том случае, если давление достигает критического значения  $p_d = 2k\theta_0 - p_0$ . При этом давлении выполняется равенство  $r_u = r_c$ , означающее, что зона повторного пластического течения полностью охватывает зону схлопывания пор. Дальнейшее понижение давления  $p < p_d$  сопровождается деформированием среды с расширенными порами.

Условием корректности полученного решения является условие  $q \geq 0$ , которое выполняется всюду. До момента появления зоны расширения (при  $p_e \leq p < p_u$ ) перемещение в области  $r_0 \leq r < r_u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{k_0 + k}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} = -k_0 \theta_0 + \sigma_r - p_s,$$

общее решение которого имеет вид

$$3(k_0 + k)u_r = -(k_0 \theta_0 + p)r - 4\tau_s r \ln(r/r_0) + C_3/r^2. \quad (2.5)$$

Если  $p_d \leq p < p_e$ , то в зоне расширения при  $r_0 \leq r < r_e$  имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{k}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} = \sigma_r - p_s.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$3ku_r = -pr - 4\tau_s r \ln(r/r_0) + C_4/r^2. \quad (2.6)$$

В оставшейся части  $r_e \leq r < r_u$  радиальное перемещение задается формулой (2.5) после замены  $r_0$  и  $p$  на  $r_e$  и  $p_e$ . Если  $p < p_d$ , то в зоне повторного пластического течения справедлива формула (2.6).

При построении решения постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  определяются из условия непрерывности перемещения на границах раздела. Эти постоянные зависят от конфигурации зон и могут быть вычислены последовательно при компьютерных расчетах. Если начальное давление находится в интервале  $p_c < p_0 < 2k\theta_0$ , то до момента полной разгрузки ( $p = 0$ ) последовательно реализуются все рассмотренные выше режимы: схлопывание пор на этапе пластического сжатия среды, образование зоны повторного пластического течения в процессе разгрузки и расширение пор в области, охватывающей зону повторного пластического течения и образовавшуюся на стадии нагружения зону схлопывания пор.

**3. Расширение цилиндрической полости.** В случае цилиндрической полости уравнения упругого деформирования принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = 0, \\ \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = 3k(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi), \quad \sigma_r - \sigma_z = 2\mu\varepsilon_r, \quad \sigma_\varphi - \sigma_z = 2\mu\varepsilon_\varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поле перемещений в неограниченной среде задается формулой  $u_r = A_2/r$ , подставляя которую в (3.1) с учетом граничного условия, получаем

$$\sigma_r = -\sigma_\varphi = -p_0(r_0/r)^2, \quad \sigma_z = 0, \quad u_r = p_0 r_0^2 / (2\mu r). \quad (3.2)$$

Еще одно решение  $u_r = B_2 r$  может быть использовано при исследовании процесса расширения цилиндрического слоя (трубы) конечной толщины.

По условию пластичности (1.3) определяется величина предельного упругого давления  $p_s = \tau_s$ . В зоне пластичности, которая образуется вблизи полости при  $p_0 > p_s$ , два последних уравнения системы (3.1) заменяются уравнением (1.3) и уравнением упругости в направлении оси  $z$ . В этой зоне справедливы равенства

$$\sigma_r = -p_0 + 2\tau_s \ln(r/r_0), \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + 2\tau_s, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi), \quad (3.3)$$

где  $\nu = (3k - 2\mu)/(6k + 2\mu)$  — коэффициент Пуассона пористого материала. Для определения перемещения используется уравнение упругого изменения объема

$$\frac{k}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z}{3} = \frac{2(1 + \nu)}{3} (\sigma_r + p_s).$$

Интегрирование уравнения приводит к следующему соотношению:

$$2(k + \mu/3)u_r = -p_0r + 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_5/r. \quad (3.4)$$

Радиус зоны пластичности  $r_s$  и постоянная  $C_5$  находятся из условий непрерывности радиального напряжения и перемещения с учетом того, что в зоне упругого деформирования  $r > r_s$  решение задается формулами (3.2) с заменой  $p_0$  и  $r_0$  на  $p_s$  и  $r_s$ :

$$r_s = r_0 \exp((p_0 - p_s)/(2\tau_s)), \quad C_5 = (k/\mu + 4/3)\tau_s r_s^2.$$

Построенное поле напряжений реализуется только в том случае, если выполняются неравенства  $\sigma_r \leq \sigma_z \leq \sigma_\varphi$ , характеризующие состояние неполной пластичности, которому соответствует грань призмы Треска — Сен-Венана. Можно показать, что первое из этих неравенств справедливо всегда, а второе — только для давлений, не превышающих критического значения

$$p_f = ((3k + 4\mu)/(3\mu))p_s.$$

При  $p_0 > p_f$  часть пластической зоны, примыкающая к полости, переходит в состояние полной пластичности, которому соответствует ребро призмы Треска — Сен-Венана. В этом состоянии напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  вычисляются по формулам (3.3), а напряжение  $\sigma_z$  оказывается равным  $\sigma_\varphi$ . Радиус зоны полной пластичности находится из уравнения  $\sigma_r = -p_f$ :

$$r_f = r_0 \exp((p_0 - p_f)/(2\tau_s)). \quad (3.5)$$

Путем интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{k}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} = \frac{\sigma_r + 2\sigma_\varphi}{3} = \sigma_r + \frac{4p_s}{3}$$

определяется перемещение в этой зоне:

$$2ku_r = (p_s/3 - p_0)r + 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_6/r.$$

В примыкающей к ней зоне неполной пластичности  $r_f < r < r_s$  перемещение задается формулой (3.4), в которой  $p_0$  заменяется на  $p_f$ , а  $r_0$  — на  $r_f$ . Из условия непрерывности  $u_r$  на поверхности раздела следует равенство

$$(k + \mu/3)C_6 = (\mu/3)p_s r_f^2 + kC_5.$$

Заметим, что в зоне полной пластичности, в отличие от остальной части среды, появляется необратимая составляющая осевой деформации  $\varepsilon_z^p$ . С точностью до знака она равна упругой составляющей осевой деформации, которую можно вычислить через напряжения по закону Гука.

Дальнейшее построение решения связано с описанием зоны схлопывания пор. В этой зоне  $\sigma_j = \sigma_j^p - q$  ( $q > 0$ ,  $j = r, \varphi, z$ ). В зависимости от пористости среды зона схлопывания может образоваться как на стадии неполной пластичности, так и на стадии полной пластичности. Последний вариант реализуется, если  $\theta_0 > \tau_s/\mu$ . Давление, при котором начинается процесс схлопывания пор в состоянии полной пластичности, равно  $p_c = k\theta_0 + 4p_s/3 > p_f$ . Если  $\theta_0 \leq \tau_s/\mu$ , то зона схлопывания появляется на стадии неполной пластичности при достижении давления  $p'_c = (k + \mu/3)\theta_0 + p_s$ .



Формулы для давлений получены из условия схлопывания пор ( $\theta = -\theta_0$ ) вблизи полости. Развитие зоны схлопывания по мере повышения давления  $p_0$  в указанных двух случаях также происходит по-разному. Если  $\theta_0 > \tau_s/\mu$  и  $p_0 > p_c$ , то зона схлопывания находится внутри зоны полной пластичности. Радиус зоны схлопывания  $r_c < r_f$  вычисляется по формуле (3.5) после замены  $p_f$  на  $p_c$ . В этой зоне напряжения остаются такими же, как в состоянии полной пластичности среды с расширенными порами. Объемная деформация удовлетворяет уравнениям

$$\theta = (\sigma_r^p + \sigma_\varphi^p + \sigma_z^p)/(3k) = -\theta_0 - q/k_0, \quad (3.6)$$

позволяющим выразить дополнительное давление  $q$ :

$$((k_0 + k)/k_0)q = -k\theta_0 - (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)/3.$$

Перемещение определяется из уравнения

$$\frac{k_0 + k}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} = -k_0\theta_0 + \sigma_r + \frac{4p_s}{3},$$

в результате интегрирования которого имеем

$$2(k_0 + k)u_r = (-k_0\theta_0 - p_0 + \tau_s/3)r + 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_7/r. \quad (3.7)$$

Для определения  $C_7$  используется условие непрерывности  $u_r$  на границе  $r = r_c$ :

$$kC_7 = -k_0\tau_s r_c^2 + (k_0 + k)C_6.$$

Если  $\theta_0 \leq \tau_s/\mu$  и  $p_0 > p'_c$ , то радиус зоны схлопывания  $r'_c$  вычисляется по формуле, получаемой из (3.5) после замены давления  $p_f$  на  $p'_c$ . В силу уравнений (3.6) с помощью дополнительного равенства  $\sigma_z^p = \nu(\sigma_r^p + \sigma_\varphi^p)$ , которое выполняется в состоянии неполной пластичности, получаем уравнение для перемещения

$$\left(k_0 + k + \frac{\mu}{3}\right) \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} = -k_0\theta_0 + \sigma_r + p_s.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$2(k_0 + k + \mu/3)u_r = -(k_0\theta_0 + p_0)r + 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_8/r.$$

Постоянная интегрирования  $C_8$  находится из условия непрерывности перемещения на поверхности раздела  $r = r'_c$  с учетом того, что при  $r > r'_c$  вблизи этой поверхности перемещение определяется по формуле (3.4) после замены  $r_0$  и  $p_0$  на  $r_c$  и  $p_c$ :

$$(k + \mu/3)C_8 = -k_0\tau_s r_c'^2 + (k_0 + k + \mu/3)C_5.$$

При значении давления  $p_0$ , превышающем критическое значение

$$p'_f = -k_0\theta_0 + ((3k_0 + 3k + 4\mu)/(3\mu))p_s,$$

неравенство  $\sigma_z^p \leq \sigma_\varphi^p$  нарушается. Внутри зоны схлопывания пор образуется зона полной пластичности, радиус  $r'_f$  которой задается формулой (3.5) после замены  $p_f$  на  $p'_f$ . Для перемещения справедливо выражение (3.7) с постоянной интегрирования  $C_9$  вместо  $C_7$ , определяемой из условия непрерывности  $u_r$ :

$$(k_0 + k + \mu/3)C_9 = -(\mu p_s/3)r_f'^2 + (k_0 + k)C_8.$$

Таким образом, рассмотрены все возможные варианты расположения границ зон пластичности и схлопывания пор вокруг цилиндрической полости при монотонном нагружении давлением.

**4. Процесс разгрузки.** В отличие от сферически-симметричного случая в задаче с цилиндрической симметрией при описании разгрузки возможны два состояния пластичности. На этапе упругой разгрузки приращения напряжений и радиального перемещения в пористой среде вычисляются по формулам (3.2) с заменой давления  $p_0$  на приращение давления  $\Delta p < 0$ . Повторное пластическое течение возникает при достижении критического значения давления  $p_u = p_0 - 2p_s$ , при котором на поверхности полости выполняется равенство

$$\sigma_\varphi + \Delta\sigma_\varphi - \sigma_r - \Delta\sigma_r = 2\tau_s - 2\Delta\sigma_r = -2\tau_s.$$

Радиус зоны повторного течения

$$r_u = r_0 \exp((p_u - p)/(4\tau_s))$$

находится из условия непрерывности радиального напряжения с учетом того, что на границе раздела зон реализуется предельное состояние упругой разгрузки. В зоне повторного пластического течения

$$\sigma_r = -p - 2\tau_s \ln(r/r_0), \quad \sigma_\varphi = \sigma_r - 2\tau_s. \quad (4.1)$$

Анализируя условие  $\sigma_\varphi^p \leq \sigma_z^p \leq \sigma_r^p$ , можно показать, что напряженное состояние в этой зоне является состоянием неполной пластичности с  $\sigma_z^p = \nu(\sigma_r^p + \sigma_\varphi^p)$ , если по окончании процесса первоначального нагружения среды образовалась зона неполной пластичности, или состоянием полной пластичности с  $\sigma_z^p = \sigma_r^p$ , если при нагружении возникла зона полной пластичности. Это явление обусловлено симметрией призмы текучести Треска — Сен-Венана. На стадии упругой разгрузки девиатор тензора напряжений проходит по прямолинейному отрезку через начало координат на противоположную грань призмы текучести, если точка выхода находилась на грани, или на ребро призмы, если точка выхода располагалась на ребре.

Дополнительный анализ показывает, что если разгрузка происходит из состояния полной пластичности, то при давлении, меньшем некоторого критического значения, часть зоны повторного пластического течения вблизи полости переходит в состояние неполной пластичности. В случае если зона неполной пластичности формируется в уплотненной среде со схлопнутыми порами, это давление равно  $p_n = p_f - 2p_s$ , а в случае если поры расширены, оно равно  $p'_n = p'_f - 2p_s$ . Радиус зоны неполной пластичности вычисляется по формуле

$$r_n = r_0 \exp((p_n - p)/(2\tau_s)) \quad (4.2)$$

или по аналогичной формуле после замены  $p_n$  на  $p'_n$ . Напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  в зонах неполной и полной пластичности задаются формулами (4.1), при этом выражения для  $\sigma_z$  различаются.

Как и в задаче о сферической полости, остаточные напряжения и радиальное перемещение в зоне упругой разгрузки  $r \geq r_u$  получаются путем суммирования исходных величин с упругими приращениями:

$$\Delta\sigma_r = -\Delta\sigma_\varphi = 2p_s(r_u/r)^2, \quad \Delta\sigma_z = 0, \quad \Delta u_r = -p_s r_u^2/(\mu r).$$

Перемещение в зоне повторного пластического течения определяется с учетом конфигурации зон. Если разгрузка происходит из состояния неполной пластичности без схлопывания пор, то в этой зоне

$$2(k + \mu/3)u_r = -pr - 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_{10}/r \quad (p < p_u). \quad (4.3)$$

Напряжение  $\sigma_z$  задается выражением  $\sigma_z = 2\nu(\sigma_r - \tau_s)$ . Такой вариант разгрузки осуществляется в двух случаях: при  $\theta_0 \leq \tau_s/\mu$ , когда  $p_s < p_0 \leq p'_c$ , и при  $\theta_0 > \tau_s/\mu$ , когда  $p_s < p_0 \leq p_f$ .

Вариант разгрузки в зоне схлопывания в состоянии неполной пластичности реализуется при выполнении неравенств  $\theta_0 \leq \tau_s/\mu$ ,  $p'_c < p_0 \leq p'_f$ . В этом варианте при понижении давления до значения  $p'_e = (k + \mu/3)\theta_0 - p_s$  на поверхности полости начинается процесс расширения пор. Если  $p_u > p \geq p'_e$ , то

$$2(k_0 + k + \mu/3)u_r = -(k_0\theta_0 + p)r - 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_{11}/r. \quad (4.4)$$

Радиус зоны расширения  $r'_e$  находится по формуле (4.2) после замены  $p_n$  на  $p'_e$ . В этой зоне радиальное перемещение задается уравнением (4.3). В оставшейся части зоны повторного пластического течения перемещение вычисляется в силу уравнения (4.4) после соответствующей замены величин  $r_0$  и  $p$ .

При понижении давления от значения  $p'_e$  до значения  $p'_d = 2p'_e - p_u$  зона расширения пор находится строго внутри зоны схлопывания. При достижении значения  $p'_d$  радиусы  $r'_e$ ,  $r_u$ ,  $r'_c$  становятся равными. В этот момент зона расширения охватывает зоны повторного пластического течения и схлопывания пор. Дальнейшее деформирование среды происходит с расширенными порами.

В процессе разгрузки из состояния полной пластичности с расширенными порами, когда  $\theta_0 > \tau_s/\mu$  и  $p_f < p_0 \leq p_c$ , на начальном этапе повторного пластического течения  $\sigma_z = \sigma_r$  и

$$2ku_r = -(p - p_s/3)r - 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_{12}/r \quad (p_u > p \geq p'_n). \quad (4.5)$$

При  $p = p'_n$  вблизи полости формируется зона неполной пластичности, радиус которой  $r'_n$  увеличивается по мере уменьшения давления. В этой зоне  $\sigma_z = 2\nu(\sigma_r - \tau_s)$ , а  $u_r$  определяется по формуле (4.3). При достижении значения давления  $p'_t = 2p'_n - p_u$  радиусы  $r'_n$  и  $r_u$  становятся равными: состояние неполной пластичности охватывает всю зону пластичности и при дальнейшем изменении давления в диапазоне  $-p_0 \leq p < p'_t$  остается единственной границей раздела с областью упругой разгрузки  $r = r_u$ .

Наиболее сложная картина наблюдается при разгрузке в зоне схлопывания пор в состоянии полной пластичности. На начальном этапе по окончании стадии упругого деформирования вблизи полости образуется зона повторного пластического течения. Радиальное перемещение в этой зоне определяется по формуле

$$2(k_0 + k)u_r = -(k_0\theta_0 + p - p_s/3)r - 2\tau_s r \ln(r/r_0) + C_{13}/r, \quad (4.6)$$

в которой учтено, что среда в пределах данной зоны находится в состоянии схлопывания пор.

Такой вариант разгрузки реализуется в двух случаях: при  $p_0 > p'_f$ ,  $\theta_0 \leq \tau_s/\mu$  и при  $p_0 > p_c$ ,  $\theta_0 > \tau_s/\mu$ . В первом случае сначала при давлении  $p = p_n$  на поверхности цилиндрической полости образуется зона неполной пластичности, радиус которой равен  $r_n$ , а затем при  $p = p'_e \leq p_n$  появляется зона расширения пор радиусом  $r'_e$ . При достижении критического значения давления  $p_t = 2p_n - p_u \leq p'_e$  состояние полной пластичности исчезает, а при  $p = p'_d \leq p_t$  зона расширения пор охватывает и зону пластичности, и сформировавшуюся на стадии первоначального нагружения среды зону схлопывания пор.

Во втором случае возникает обратный процесс. Сначала при понижении давления до значения  $p_e = k\theta_0 - 2p_s/3$  вблизи полости образуется зона расширения пор, радиус  $r_e$  которой вычисляется по формуле (4.2) после замены  $p_n$  на  $p_e$ , а затем при  $p = p'_n$  — зона неполной пластичности радиусом  $r'_n$ .

К моменту разгрузки до критического значения давления  $p_d = 2p_e - p_u$  зона расширения пор охватывает всю зону пластичности и ранее образовавшуюся зону схлопывания. При  $p = p'_t < p_d$  зона полной пластичности исчезает, после чего процесс разгрузки продолжается в среде с раскрытыми порами при наличии упругопластической границы  $r = r_u$ .

Заметим, что в каждом из рассмотренных вариантов разгрузки радиальное перемещение  $u_r$  представляет собой непрерывную кусочно-аналитическую функцию, которую можно построить, выбрав соответствующие постоянные интегрирования в формулах (4.3)–(4.6).

**5. Численный пример.** Полученные формулы позволяют определить напряженно-деформированное состояние вокруг сферической и цилиндрической полостей при произвольном наборе феноменологических параметров пористого материала и при любом значении давления внутри полости как в случае монотонного нагружения, так и при разгрузке вплоть до отрицательного давления  $p = -p_0$ . Дальнейшее понижение давления приводит к образованию новых зон пластичности, что усложняет общую картину. Упрощенное решение может быть получено в предположении о несжимаемости среды после схлопывания пор, которому соответствует предельный переход при  $k_0 \rightarrow \infty$ .

На основе построенного решения в системе Matlab разработана компьютерная программа, автоматически выбирающая подходящий вариант расположения зон пластичности, схлопывания и расширения пор с использованием входных параметров задачи и позволяющая представить поля напряжений, перемещений, обратимых и необратимых деформаций в графическом виде. На рис. 3, 4 приведены характерные распределения остаточных напряжений и перемещений вокруг сферической и цилиндрической полостей радиусом  $r_0 = 0,01$  м в безграничной пористой среде, соответствующие циклу нагружение — разгрузка. В расчетах были выбраны феноменологические параметры среды, близкие к параметрам пористого (ячеистого) алюминия [7]:  $k = 2$  ГПа,  $k_0 = 70$  ГПа,  $\mu = 2,5$  ГПа,  $\tau_s = 0,03$  ГПа. Давление  $p_0$  выбиралось таким образом, чтобы зоны пластичности и уплотнения были достаточно протяженными: для сферической полости  $p_0 = 0,3$  ГПа, для цилиндрической полости  $p_0 = 0,2$  ГПа.

В соответствии с точными решениями к моменту полной разгрузки остаточные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  (кривые 1, 2 на рис. 3, а, 4, а) не зависят от начальной пористости среды. И в случае сферической полости, и в случае цилиндрической полости пористость существенно влияет на остаточное деформированное состояние (см. рис. 3, б, 4, б).

При  $\theta_0 = 1$  % процесс расширения сферической полости сопровождается возникновением пластических деформаций и схлопыванием пор (см. рис. 3, б). Вплоть до момента полной разгрузки в зоне повторной пластичности поры не расширяются. При разгрузке при  $\theta_0 = 10$  %, наоборот, происходит расширение пор во всей зоне схлопывания. В случае

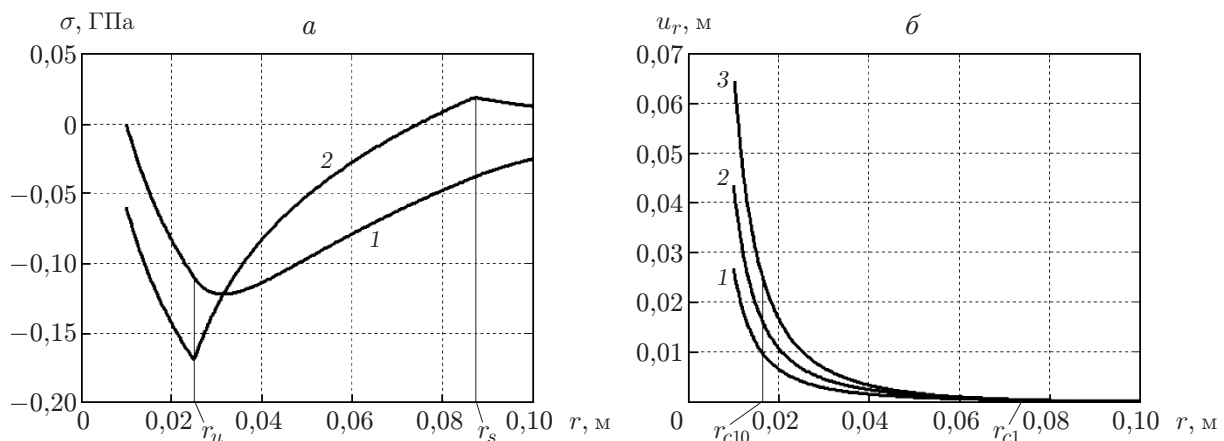


Рис. 3. Остаточные напряжения и перемещения вокруг сферической полости: а — остаточные напряжения (1 —  $\sigma_r$ , 2 —  $\sigma_\varphi$ ), б — перемещения (1 —  $\theta_0 = 0$ , 2 —  $\theta_0 = 1$  %, 3 —  $\theta_0 = 10$  %);  $r_{c1}$  — значение  $r_c$  при  $\theta_0 = 1$  %,  $r_{c10}$  — значение  $r_c$  при  $\theta_0 = 10$  %

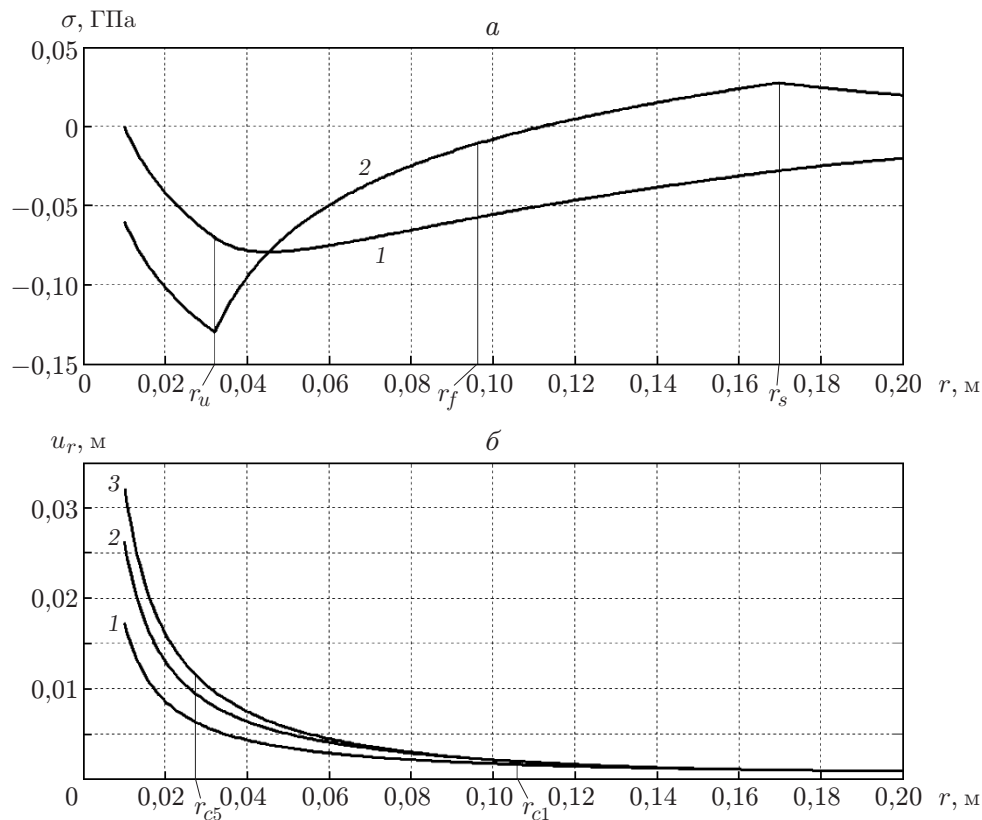


Рис. 4. Остаточные напряжения и перемещения вокруг цилиндрической полости:  $a$  — остаточные напряжения (1 —  $\sigma_r$ , 2 —  $\sigma_\varphi$ ),  $b$  — перемещения (1 —  $\theta_0 = 0\%$ , 2 —  $\theta_0 = 1\%$ , 3 —  $\theta_0 = 5\%$ );  $r_{c5}$  — значение  $r_c$  при  $\theta_0 = 5\%$

цилиндрической полости при  $\theta_0 = 1\%$  реализуется вариант решения, когда граница зоны схлопывания пор находится внутри зоны неполной пластичности, а к моменту разгрузки до значения  $p = 0$  расширения пор не происходит. При  $\theta_0 = 5\%$  на стадии нагружения зона схлопывания находится в зоне полной пластичности, и после разгрузки поры расширяются во всей этой зоне. Приведенные результаты имеют качественный характер, поскольку в действительности параметры жесткости материалов меняются в зависимости от пористости.

Заметим в заключение, что в работах [15–17] при различного рода упрощающих предположениях задача о квазистатическом расширении полости решалась с учетом влияния гидростатического давления на условие пластичности, характерного для материалов с дилатансионным изменением объема.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача // Прикл. математика и механика. 1946. Т. 10, вып. 3. С. 367–386.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 2.
4. Шемякин Е. И. Расширение газовой полости в несжимаемой упругопластической среде (К изучению действия взрыва на грунт) // ПМТФ. 1961. № 5. С. 91–99.
5. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950.

6. **Снеддон И. Н.** Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. М.: Физматгиз, 1961.
7. **Carroll M. M., Holt A. C.** Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. P. 1626–1636.
8. **Carroll M. M., Kim K. T., Nesterenko V. F.** The effect of temperature on viscoplastic pore collapse // J. Appl. Phys. 1986. V. 59. P. 1962–1967.
9. **Tong W., Ravichandran G.** Dynamic pore collapse in viscoplastic materials // J. Appl. Phys. 1993. V. 74. P. 2425–2435.
10. **Голубев В. К.** О расширении пор в пластичных металлах при отколе // ПМТФ. 1983. № 6. С. 159–165.
11. **Киселев А. Б., Юмашев М. В.** Математическая модель деформирования и разрушения твердого топлива при ударном нагружении // ПМТФ. 1992. № 6. С. 126–134.
12. **Садовская О. В.** Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. М.: Физматлит, 2008.
13. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.** Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций: Сб. ст. к 70-летию Д. Д. Ивлева. М.: Физматлит, 2001. С. 74–94.
14. **Ковтанюк Л. В., Мурашкин Е. В.** Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 94–104.
15. **Вонг Г. К., Капустянский С. М., Николаевский В. Н., Шляпоберский Я. В.** Упругопластический расчет поврежденности призабойной зоны скважины // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 121–135.
16. **Александров С. Е., Гольдштейн Р. В.** Влияние зависимости условия текучести от среднего напряжения на остаточные напряжения и деформации // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 2. С. 185–188.
17. **Садовский В. М.** Радиальное расширение сыпучей среды в сферическом и цилиндрическом слоях // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 190–196.

*Поступила в редакцию 21/II 2013 г.,  
в окончательном варианте — 5/VI 2013 г.*

---