

10. Richter K. Die Eigenschaften von Elektronen lawinen bei hohen Verstärkungen in Äther. Zs. Phys., 1964, B. 180, S. 489.
11. Raether H. Electron Avalanches and Breakdown in Gases. London, 1964. (Рус. перев.: Петер Г. Электронные лавины и разряд в газах. М., «Мир», 1968.)
12. Tholl H. Der Übergang der Elektronenlawine in den Kanalaufbau bei hoher Überspannung in Stickstoff (mit geringen CH_4 — Zusatz). Zs. Naturf, 1963, B. 18 a, № 5, S. 587.
13. Бычков Ю. И., Бычкова Л. Г. Вторичные процессы при импульсном пробое воздушных промежутков. Электронная техника, Серия 3, Газоразрядные приборы, 1967, вып. 2, стр. 39—44.
14. Мик Д., Крэгс Д. Электрический пробой в газах. Изд-во иностр. лит., 1960.

КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Л. А. Заклязьминский, А. Н. Черепанов

(Новосибирск)

Источник проводящего газа предполагается в виде плоскости $x = 0$. Из источника газ движется в направлении оси x .

На расстоянии $x = \pm l$ от источника расположены плоские токовые поверхности, токи в которых текут вдоль оси y и замыкаются на внешнюю нагрузку, состоящую из омического сопротивления R , и внешней электродвижущей силы (э. д. с.) E° .

Эти поверхности абсолютно проницаемы для газа и неограничены по оси z , так что магнитное поле, созданное токами, текущими в плоскостях $x = \pm l$, будет направлено по оси z .

Кроме того, имеется постоянное магнитное поле H_0 , также направленное по z .

Размеры системы бесконечны по z и y , поэтому в дальнейшем будем рассматривать внешний электрический контур, состоящий из омического сопротивления R , отнесенного к единице высоты, и внешней э. д. с. E° , подключенных к участку токовых поверхностей единичной высоты и ширины по y равной l . Примем следующие допущения.

1) Проводимость газа конечна и зависит от температуры

$$\sigma / \sigma_0 = (T / T_0)^n \quad (n \geq 0) \quad (1)$$

2) Газ идеальный, теплопроводность и вязкость не учитываются.

3) Справедливо приближение магнитной гидродинамики.

Тогда система уравнений, описывающих движение газа, распределение магнитного поля в среде и ток во внешнем электрическом контуре (в безразмерном виде) будет

$$\begin{aligned} \kappa M_0^2 g \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) &= - \frac{\partial f}{\partial \xi} - P h \frac{\partial h}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (g u) = 0 \\ \frac{g}{\kappa - 1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + g \theta \frac{\partial u}{\partial \xi} &= - P \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \xi} + P u h \frac{\partial h}{\partial \xi}, \quad f = g \theta \\ \frac{\partial h}{\partial \xi} &= R_m \varepsilon_1 (u h - \varepsilon), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = - \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 h d\xi + r i = E_1(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

где безразмерные величины определены следующим образом:

$$\begin{aligned} g &= \frac{\rho}{\rho_0}, \quad u = \frac{v}{v_0}, \quad f = \frac{P}{P_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad h = \frac{H}{H_0} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon = \frac{cE}{v_0 H_0}, \quad E_1 = \frac{cE^\circ}{v_0 H_0}, \quad i = \frac{4\pi I}{c H_0}, \quad r = \frac{c^2 R}{4\pi u_0} \\ \xi &= \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{v_0 t}{l}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad M_0 = \frac{v_0}{\sqrt{\kappa P_0 / \rho_0}}, \quad P = \frac{H_0^2}{4\pi P_0}, \quad R_m = \frac{4\pi \sigma_0 v_0 l}{c^2} \end{aligned}$$

В качестве масштабов для физических переменных здесь приняты ρ_0, v_0, P_0 и T_0 — максимальные значения плотности, скорости, давления и температуры газа на выходе из источника; H_0 — постоянная составляющая внешнего магнитного поля, σ_0 — проводимость при температуре T_0 , l — расстояние от источника до токовой поверхности.

При этом скорость v имеет составляющую только по x , электрическое поле E только по y и магнитное поле H по z .

Граничные условия: 1) для газодинамических величин задаются мощность источника и условия отражения возмущений при $\xi = 0.2$ для электромагнитных

$$\varepsilon(0, \tau) = 0, \quad h(1, \tau) = 1 + i(\tau) \quad (3)$$

Будем искать периодическое решение системы (2) при условии, что внешняя э.д.с. $E_1(\tau)$ — периодическая функция времени τ .

Рассмотрим случай, когда газодинамические величины на выходе из источника постоянны

$$f = g = u = 1 \text{ при } \xi = 0 \quad (4)$$

Решение системы (2) с граничными условиями (3) и (4) будем искать в виде рядов по степеням переменной ξ

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau) &= 1 + \sum_{k=1}^m f_k(\tau) \xi^k, & g(\xi, \tau) &= 1 + \sum_{k=1}^m g_k(\tau) \xi^k \\ \theta(\xi, \tau) &= 1 + \sum_{k=1}^m \theta_k(\tau) \xi^k, & u(\xi, \tau) &= 1 + \sum_{k=1}^m u_k(\tau) \xi^k \\ h(\xi, \tau) &= \sum_{k=0}^m h_k(\tau) \xi^k, & \varepsilon(\xi, \tau) &= - \sum_{k=0}^m \frac{\partial h_k}{\partial \tau} \frac{\xi^{k+1}}{k+1} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь m — целое число, определяющее порядок аппроксимации. Выражение для $\varepsilon(\xi, \tau)$ получено из шестого уравнения системы (2) с учетом условия (3).

Подставим теперь в систему (2) при $n = 1$ вместо величин f, g, θ, u, h и ε их выражения из (5) и приравняем члены при одинаковых степенях переменной ξ .

Ограничиваясь вторыми степенями ($m = 2$) рядов в (5), будем иметь следующие зависимости для временных коэффициентов:

$$\begin{aligned} h_1 &= R_m h_0, & h_2 &= \frac{R_m}{2} \left[h_0' + R_m h_0 + \frac{1 + M_0^2(1 - \kappa)}{1 - M_0^2} S h_0^3 \right], & S &= P R_m \\ j_1 &= \frac{M_0^2(1 - \kappa) - 1}{1 - M_0^2} S h_0^2, & j_2 &= \frac{M_0^2(\kappa - 1) + \kappa}{(1 - M_0^2)^2} S^2 h_0^4 + \frac{S}{1 - M_0^2} h_0 h_0' - u_2 + \theta_2 \\ \theta_1 &= M_0^2 \frac{1 - \kappa}{1 - M_0^2} S h_0^2, & \theta_2 &= - \frac{1 + \kappa M_0^2}{1 - M_0^2} S h_0 h_0' - \frac{S R_m}{2} h_0^2 - \frac{1 + M_0^2(\kappa - 1)}{(1 - M_0^2)^2} S^2 h_0^4 - \\ & - P h_0 h_2 + (1 - \kappa M_0^2) u_2, & u_1 &= \frac{S}{1 - M_0^2} h_0^2, & u_2 &= \frac{2\kappa + 1 + M_0^2(\kappa - 1)}{2\kappa(1 - M_0^2)} S h_0 h_0' + \\ & + \frac{1}{1 - M_0^2} S R_m h_0^2 + \frac{3 + M_0^2[\kappa - 2 + (1 - \kappa)(1 - M_0^2)]}{2(1 - M_0^2)^2} S^2 h_0^4 \end{aligned} \quad (6)$$

штрих означает дифференцирование по τ .

Из соотношений (6) видно, что все коэффициенты рядов (5) выражаются через $h_0(\tau)$ (магнитное поле в плоскости $\xi = 0$) и ее производные. Очевидно, что полученное решение имеет смысл при $M_0 < 1$ либо $M_0 > 1$.

Уравнения для $h_0(\tau)$ получим из последнего уравнения системы (2) с учетом граничного условия (3). Опуская промежуточные выкладки, запишем его в виде

$$h_0'' + p h_0' + q h_0 = \frac{6}{R_m} (r + E_1) - S \varphi(h_0, h_0') \quad (7)$$

$$\varphi(h_0, h_0') = 3 \frac{1 + M_0^2(1 - \kappa)}{1 - M_0^2} h_0^2 (h_0' + r h_0)$$

$$p = \frac{6}{R_m} \left[1 + \frac{R_m}{2} (1 + r) + \frac{R_m^2}{6} \right], \quad q = \frac{6r}{R_m} \left(1 + R_m + \frac{R_m^2}{2} \right) \quad (8)$$

Зададим внешнюю э.д.с. E_1 в виде

$$E_1 = E_0 \sin \omega \tau, \quad \omega = \Omega / v_0$$

Здесь E_0 — безразмерная амплитуда, а ω — безразмерная частота.

Будем искать периодическое решение уравнения (7) методом последовательных приближений, полагая параметр S , стоящий при нелинейном выражении $\varphi(h_0, h_0')$, малой величиной $S \ll 1$.

Тогда итерационную формулу можно представить в виде

$$h_{0k+1} = \frac{6}{R_m} \left[\frac{r}{q} + \frac{E_0}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin \left(\omega \tau + \arctg \frac{q - \omega^2}{p\omega} \right) \right] + \\ + \frac{S}{\lambda} \left[e^{\alpha_1 \tau} \int \Phi(h_{0k}, h'_{0k}) e^{-\alpha_1 \tau} d\tau - e^{\alpha_2 \tau} \int \Phi(h_{0k}, h'_{0k}) e^{-\alpha_2 \tau} d\tau \right] \quad (9) \\ \alpha_1 = 1/2 (\lambda - p), \quad \alpha_2 = -1/2 (\lambda + p), \quad \lambda = \sqrt{p^2 - 4q}$$

Здесь κ — порядок приближения.

Аппроксимация решения тремя членами ряда предполагает, что числа R_m малы ($R_m \ll 1$). Увеличение последних связано с необходимостью увеличивать число членов рядов (5).

Численный анализ проведен для случая $M_0 \ll 1$. При этом для аппроксимации решения удерживались четыре первых члена в (5) ($m = 3$). Временные коэффициенты при четверных членах рядов (5) при $M_0 \ll 1$ имеют вид

$$h_3 = 1/3 R_m (1/2 R_m^2 h_0 + R_m h_0' + (\kappa + 2) \kappa^{-1} S h_0^3 h_0' + 5/2 S R_m h_0^3 + 3/2 S^2 h_0^5) \\ f_3 = -1/3 S \{ 5/2 R_m h_0 h_0' + 2 R_m^2 h_0^2 + S [(\kappa + 2) \kappa^{-1} h_0' + 4 R_m h_0 + 3/2 S h_0^3] h_0 \} \\ \theta_3 = 1/3 S (1 - \kappa) \kappa^{-1} [1/2 R_m h_0 h_0' - h_0'^2 + S h_0^3 h_0'] \\ u_3 = 1/3 S \left(R_m h_0^2 + \frac{2\kappa + 4}{2\kappa} R_m h_0 h_0' + \frac{2\kappa + 4}{6\kappa} h_0'^2 + \frac{2\kappa - 4}{2\kappa} S h_0^3 h_0' + 6 S R_m h_0^4 + \right. \\ \left. + 15/2 S^2 h_0^6 + 1/2 \kappa h_0 h_0'' \right)$$

Коэффициенты при вторых и третьих членах получим из (6), если пренебречь членами, содержащими M_0 . Функция $h_0(\tau)$ определяется дифференциальным уравнением

$$h_0'' + p h_0' + q h_0 = \frac{12}{R_m(2 + R_m)} (r + E_1) - S \Phi(h_0, h_0', h_0'') \quad (10)$$

где

$$\Phi(h_0, h_0', h_0'') = \frac{6h_0}{2 + R_m} \left[\frac{\kappa + 2}{12\kappa} h_0 h_0'' + \left(1 + 5/4 R_m + \frac{\kappa + 2}{3\kappa} r R_m \right) \times \right. \\ \left. \times h_0 h_0' + \frac{\kappa + 2}{12\kappa} h_0'^2 + (1 + 5/3 R_m) r h_0^2 + S (5/4 h_0' + r h_0) h_0^3 \right] \\ p = \frac{6}{R_m} \frac{2 + R_m(1 + r) + 1/3 R_m^2 (1 + 2r + 1/4 R_m)}{2 + R_m} \quad (11)$$

$$q = \frac{6r}{R_m(2 + R_m)} (2 + 2R_m + R_m^2 + 1/3 R_m^3) \quad (12)$$

В первом и втором приближениях имеем

$$h_{01}(\tau) = \frac{12}{R_m(2 + R_m)} \left[\frac{r}{q} + \frac{E_0}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin \left(\omega \tau + \arctg \frac{q - \omega^2}{p\omega} \right) \right] \quad (13)$$

$$h_{02}(\tau) = \frac{12r}{R_m(2 + R_m)q} + S B_0 + B_1 \sin(\omega \tau + \delta_1) + B_2 \sin(2\omega \tau + \delta_2) + B_3 \sin(3\omega \tau + \delta_3) \quad (14)$$

Здесь

$$B_0 = 1/2 (a_5 - a_4 + 2a_3) / q, \quad B_1 = \{ [A_2 + S(A_2 + 3/4 A_8)]^2 + S^2 (A_3 + 1/4 A_9)^2 \}^{1/2}$$

$$B_3 = S(A_4^2 + S_5^2)^{1/2}, \quad B_4 = S[(A_6 + 1/4 A_8)^2 + (A_7 - 1/4 A_9)^2]^{1/2}$$

$$\delta_1 = \arctg \frac{q - \omega^2}{p\omega} + \arctg \frac{S(A_3 + 1/4 A_9)}{A_1 + S(A_2 + 3/4 A_8)}, \quad \delta_2 = \arctg \frac{A_5}{A_4}$$

$$\delta_3 = \arctg \frac{4A_7 - A_9}{4A_6 + A_8}, \quad A_2 = \Omega_1^{-1} \{ (q - \omega^2)^2 a_1 - \omega a_2 - 6\Omega_2^{-1} \omega^2 q [p^2 - q + \omega^2 (10q - 9\omega^2)] a_6 - 1/2 \omega a_7 + 1/2 (q - \omega^2) a_8 \}$$

$$A_3 = \Omega_1^{-1} [\omega a_1 + (q - \omega^2) (a_2 + 1/2 a_7) + 1/2 \omega a_8 + 6\Omega_2^{-1} (10\omega^2 + p^2 - 2q) p \omega^3 a_6]$$

$$A_4 = 1/2 \Omega_3^{-1} [2(q - 4\omega^2) a_3 + p \omega (a_4 + a_5)], \quad A_5 = 1/2 \Omega_3^{-1} [4\omega a_3 + (q - 4\omega^2) (a_4 + a_5)]$$

$$A_6 = 1/2 \Omega_2^{-1} [3\omega a_7 + (q - 9\omega^2) a_8], \quad A_7 = 1/2 \Omega_2^{-1} [3\omega a_8 - (q - 9\omega^2) a_7]$$

$$A_8 = \Omega_2^{-1} (q - 9\omega^2) a_6, \quad A_9 = 3\Omega_2^{-1} p \omega a_6$$

$$\Omega_1 = (q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2, \quad \Omega_2 = (q - 9\omega^2)^2 + 9p^2 \omega^2, \quad \Omega_3 = (q - 4\omega^2)^2 + 4p^2 \omega^2$$

$$a_1 = \left[(3 + 5R_m) r - \frac{\kappa + 2}{12\kappa} \omega^2 \right] a^2 A_1, \quad a_2 = \omega a^2 A_1 \left(1 + 5/4 R_m + \frac{\kappa + 2}{3\kappa} r R_m \right)$$

$$a_3 = \frac{a_2 A_1}{a}, \quad a_4 = a A_1^2 \left[\frac{\kappa + 2}{6\kappa} \omega^2 - (3 + 5R_m) r \right] \quad a_6 = \left(\frac{\kappa + 2}{12\kappa} \omega^2 + \frac{3 + 5R_m}{3} r \right) A_1^3$$

$$a_5 = \frac{\kappa + 2}{12\kappa} \omega^2 a A_1, \quad a_7 = \frac{\omega}{2} A_1^3 \left(1 + \frac{5}{4} R_m + \frac{\kappa + 2}{3\kappa} r R_m \right), \quad a_8 = \frac{\kappa + 2}{24\kappa} \omega^2 A_1$$

$$a_9 = \frac{3 + 5R_m}{3} r a^3, \quad a = \frac{12r}{R_m(2 + R_m)q}, \quad A_1 = \frac{12E_0}{R_m(2 + R_m)\Omega_1^{1/2}}$$

Величины p и q здесь определяются соотношениями (11) и (12) соответственно. Исследуем условия резонанса. Для этого рассмотрим вначале решение в первом приближении (13), представляющее собой линейное решение задачи и описывающее изменение магнитного поля во времени в точке $\xi = 0$.

Из (10) и (13) следует, что внешняя вынуждающая сила, имеющая постоянную составляющую $12r/R_m(2 + R_m)$ и синусоидальную составляющую $12E_0/R_m(2 + R_m) \sin \omega t$, воздействуя на систему, вызывает постоянное отклонение равное $12r/R_m(2 + R_m)q$ и синусоидальное колебание той же частоты, но другой амплитуды и фазы.

Разделив амплитуду при втором члене в (13) на ее значение при $\omega = 0$, найдем величину коэффициента усиления K , характеризующего динамическую восприимчивость системы по отношению к внешней силе

$$K(\mu) = [(1 - \mu^2)^2 + \nu^2 \mu^2]^{-1/2}$$

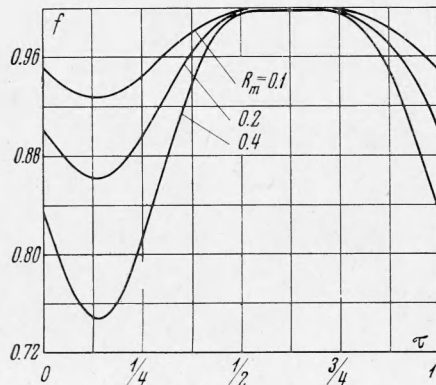
$$(\mu = \omega / \sqrt{q}, \nu = p / \sqrt{q}) \quad (15)$$

Из (15) имеем, что $k(0) = 1, K(\infty) = 0$ при любом ν . Если $\nu \geq \sqrt{2}$, т. е. $p \geq \sqrt{2q}$, то $K(\mu)$ убывает при всех μ . Если $\nu < \sqrt{2}$, т. е. $p < \sqrt{2q}$, то $K(\mu)$ достигает максимума в точке $\mu = 1 - \nu^2/2$.

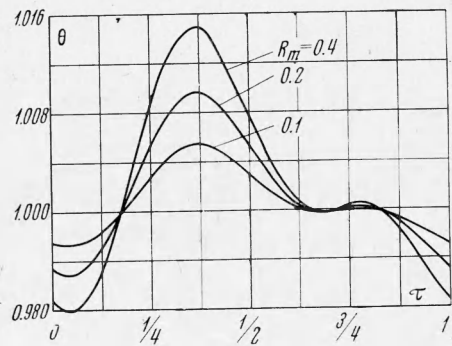
Следовательно, при $p \geq \sqrt{2q}$ (большом коэффициенте сопротивления) резонанса нет, при $p < \sqrt{2q}$ возможны резонансные колебания с частотой $\omega_* = \sqrt{q - p^2/2}$, которой соответствует коэффициент усиления

$$K_* = \frac{1}{\nu} (1 - 1/4 \nu^2)^{-1/2} = \frac{q}{p} (q - 1/4 p^2)^{-1/2}$$

Отсюда видно, что $K_* \rightarrow \infty$ и $\omega_* \rightarrow \sqrt{q}$ при $p \rightarrow 0$, т. е. резонанс будет более существенен при малых значениях коэффициента p и резонансных частотах, близких к \sqrt{q} .



Фиг. 2

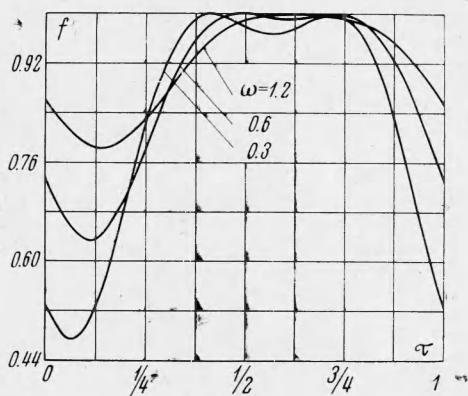


Фиг. 3

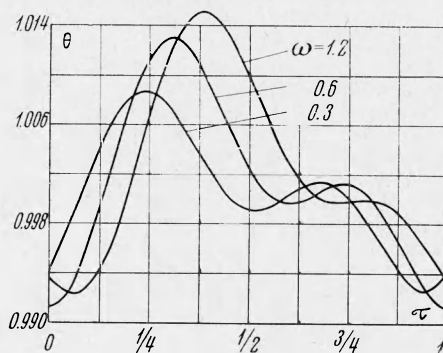
Величины p и q связаны с параметрами задачи соотношениями (11), (12). Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае $R_m < 1$, всегда $p > \sqrt{2q}$, следовательно, резонансных колебаний в системе не существует, а функция $K(\mu)$ является монотонно убывающей от 1 до 0 при изменении μ от 0 до ∞ .

Эти выводы будут справедливы и для случая конечных чисел $M_0 \neq 1$, так как параметры p и q (8) не зависят от M_0 , поэтому, как и в случае бесконечно малых чисел M_0 ($M_0 \ll 1$) при $R_m < 1$, будем иметь $p > \sqrt{2q}$. Можно показать, что нерезонансный характер колебаний будет и в случае, если граничные условия для газодинамических величин задать в виде $\theta = u = 1$ при $\xi = 0$ и $f = 1$ при $\xi = 1$. Учет нелинейности приводит к более быстрому затуханию величины $K(\mu)$ при увеличении μ , что иллюстрируется на фиг. 1, где приведены графики коэффициентов $K(\mu)$ (кружочки) при $S = 0.08$ и $\nu^2 = 30$, $S = 0$ (линейное приближение) и $K_s(\mu) = B_1/B_{10}$ (треугольники) для $S = 0.08$ и $\nu^2 = 30$, здесь B_1 — амплитуда при первой гармонике в решении (10), а B_{10} — ее значение при $\omega = 0$. При этом $K_s(\mu) = K(\mu)$, когда $S = 0$.

Были проведены численные расчеты. В качестве примера некоторые результаты их для случая малых чисел Маха $M_0 \ll 1$ приведены на фиг. 2—7.

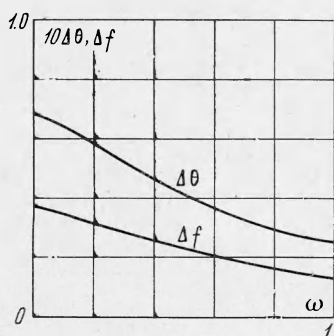


Фиг. 4

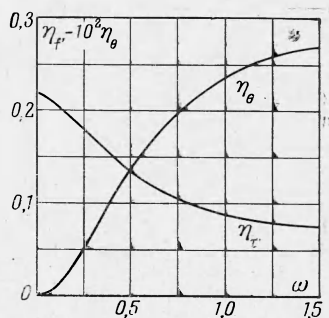


Фиг. 5

Фиг. 2—5 иллюстрируют изменение температуры и давления за период на выходе канала ($\xi = 1$) при $E_0 = 1$, $r = 0.5$, $P = 0.2$, $\kappa = 5/3$, различных числах R_m и безразмерных частот ω . Отметим, что колебания параметров системы не являются синусоидальными, хотя внешняя сила, вынуждающая колебания, по форме синусоидальна.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 представлены зависимости величин $\Delta\theta$ и Δf — расстояний от максимума до минимума (размах колебаний) температуры $\theta(\tau)$ и давления $f(\tau)$ соответственно на выходе канала от частоты ω при $E_0 = 1$, $r = 0.5$, $P = 0.2$, $R_m = 0.4$, $\kappa = 5/3$.

Обе величины являются монотонно убывающими функциями частоты ω , что связано с нерезонансным характером их колебаний. Фиг. 7 иллюстрирует зависимости

$$\eta_\theta = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [1 - \theta(1, \tau)] d\tau, \quad \eta_f = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [1 - f(1, \tau)] d\tau$$

— средних за период разностей между значениями температуры (давления) на входе и выходе канала от безразмерной частоты ω при тех же значениях E_0 , r , P , R_m и κ , что и выше. Отсюда видно, что величина η_θ всюду в рассматриваемом интервале частот и заданных параметрах E_0 , r , P , R_m и κ отрицательна, т. е. в среднем за период температура газа на выходе выше температуры на входе канала и, следовательно, к газу подводится энергия от источника электромагнитного поля.

Поступила 19 IX 1967