

УДК 519.6+550.8

ЧИСЛЕННАЯ ИНВЕРСИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУМУДУ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМНЫХ НЕДР

М.И. Эпов¹, О.В. Нечаев¹, В.Н. Глинских^{1,2}

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Академика Котляго, 3, Россия

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Россия

Интегральное преобразование Сумуду (Sumudu) было предложено в качестве альтернативы преобразованию Лапласа в 1990-х годах. К особым свойствам преобразования Сумуду относятся сохранение размерности функции: единицы измерения самой функции и ее изображения совпадают. К его недостаткам можно отнести то, что не существует явной формулы вычисления обратного преобразования. Обращение можно осуществить через решение соответствующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода, которое сводится к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений. Для регуляризации такой системы используется метод Тихонова. В работе предлагается метод построения параметризованной регуляризирующей матрицы, учитывающей особенности Сумуду-изображений, полученных при моделировании сигналов электромагнитного зондирования земных недр. Рассматривается способ выбора параметров регуляризации Тихонова и регуляризирующей матрицы. Эффективность предложенного метода обращения преобразования Сумуду рассматривается на модельной задаче электромагнитного зондирования земных недр установкой с двумя разнесенными петлями.

Преобразование Сумуду, регуляризация Тихонова, электромагнитное зондирование земных недр, численное моделирование

NUMERICAL INVERSION OF THE SUMUDU INTEGRAL TRANSFORM IN THE SIMULATION OF ELECTROMAGNETIC SOUNDING OF THE EARTH'S INTERIOR

M.I. Epov, O.V. Nechaev, V.N. Glinskikh

The integral Sumudu transform was established as an alternative to the Laplace transform in the 1990s. The Sumudu transform fundamental properties include preservation of the dimensionality of a function, ensuring measurement units both in the function and its image to be equivalent. Among its disadvantages is the absence of an explicit formula for calculating the inverse transform. The transforms are inverted by solving the corresponding Fredholm integral equation of the first kind, which is reduced to solving an ill-conditioned system of linear algebraic equations. We apply Tikhonov's method for regularization of this type system. The paper proposes a technique for constructing a parametrized regularizing matrix that takes into account the properties of the Sumudu images obtained by modeling the electromagnetic sounding process of the Earth's interior. A method for choosing the Tikhonov regularization parameters and the regularizing matrix is considered. The effectiveness of the proposed method for the Sumudu transform inversion is examined on a model problem of electromagnetic sounding of the Earth's interior by a measurement system consisting of two loops spaced apart.

Sumudu transform, Tikhonov regularization, electromagnetic sounding of the Earth's interior, mathematical modeling

ВВЕДЕНИЕ

Интегральное преобразование Сумуду (Sumudu) было предложено в [Watugala, 1993] в качестве альтернативы преобразованию Лапласа. Оно определяется следующим образом:

$$S[f(t)] = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{t}{u}\right) f(t) dt = f(u). \quad (1)$$

Областью определения Сумуду-преобразования является следующее множество функций:

$$A = \left\{ f(t) \mid \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, t \in (-1)^j \times [0, \infty] \right\},$$

при этом Сумуду-изображение определено на интервале $u \in (-\tau_1, \tau_2)$.

© Эпов М.И., Нечаев О.В., Глинских В.Н., 2023

✉ e-mail: EpovMI@ipgg.sbras.ru

Если исходная функция f имеет аргумент t , то Сумуду-изображение этой функции имеет то же обозначение, но ее аргумент заменяется на u . Необходимо отметить, что Сумуду-изображение действительной функции является действительной функцией. Таким образом, при последующих вычислениях, в отличие от использования преобразования Лапласа или Фурье, не возникает необходимости прибегать к комплексным числам. Это снижает вычислительные затраты и требования к оперативной памяти в случае нахождения Сумуду-изображения функции. Кроме того, вычисление электромагнитных сигналов на поздних временах после включения источника через Фурье-преобразование становится весьма затратным из-за необходимости интегрирования быстро осциллирующих и слабозатухающих подынтегральных выражений [Табаровский, Соколов, 1982].

К важным свойствам этого преобразования относится сохранение размерности функции: единицы измерения самой функции и ее изображения совпадают. Преобразование Сумуду обладает следующими свойствами [Watugala, 1993]:

$$S[af(t) + bg(t)] = af(u) + bg(u),$$

$$S[f(ct)] = f(cu),$$

$$S[a + bt] = a + bu,$$

где a, b, c — любые константы.

Во избежание двусмысленности, отметим, что при помощи верхнего индекса в дальнейшем будем обозначать номер элемента вектора g^i , а возведение числа в степень будет обозначаться как $(a)^p$. Сумуду-изображение степенной функции имеет вид

$$S[(t)^{a-1}] = \Gamma(a)(u)^{-a}, \quad a > 0,$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция [Градштейн, Рыжик, 1963]. Зная разложение аналитической функции в степенной ряд, можно легко получить представление в виде степенного ряда ее Сумуду-изображения, и наоборот:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (t)^n,$$

$$S[f(t)] = \sum_{n=0}^{n=\infty} n! a_n (u)^{-n}.$$

Здесь $n!$ — факториал целого числа n . Преобразование Сумуду производной и интеграла выглядят следующим образом [Watugala, 1993]:

$$S\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \frac{f(u) - f(t=0)}{u},$$

$$S\left[\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau\right] = uf(u).$$

Используя предыдущее соотношение и определение дельта функции — $\delta(t)$, можно показать, что Сумуду-изображение этой функции имеет вид:

$$S[\delta(t)] = \frac{1}{u}.$$

Свертка двух функций обладает следующим Сумуду-изображением [Watugala, 1993]:

$$S[(f \cdot g)(t)] = uf(u)g(u).$$

При условии существования $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ или $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ имеют место следующие предельные соотношения соответственно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u), \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u). \quad (2)$$

Путем замены переменной в (1) можно показать следующую связь между преобразованиями Сумуду (S) и Лапласа (L) [Belgacem, Karaballi, 2006]:

$$L[f(t)] = f(s) = \frac{S[f(t)]\left(\frac{1}{s}\right)}{s}, \quad (3)$$

$$S[f(t)] = f(u) = \frac{L[f(t)]\left(\frac{1}{u}\right)}{u}, \quad (4)$$

где $L[f(t)] = f(s)$ — преобразование Лапласа. Таким образом, изложенный способ численного вычисления обратного преобразования Сумуду можно использовать для обращения действительно-значного преобразования Лапласа. Также, зная связь между двумя преобразованиями, получим Сумуду-изображение для функций, у которых известны их изображения Лапласа.

К недостаткам преобразования Сумуду можно отнести то, что не существует явной формулы вычисления его обратного преобразования. Обращение можно осуществить (без использования свойств преобразования Сумуду и таблицы с изображениями для некоторых функций) либо, решая соответствующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода, либо, используя связь преобразования Сумуду с преобразованием Лапласа. Помимо этого, можно использовать один из численных способов расчета обратного преобразования Лапласа, которые сводятся к вычислению соответствующего интеграла вдоль траектории в комплексной плоскости. Это приводит к необходимости вычисления значений Сумуду-изображения в точках комплексной плоскости, что обуславливает потерю вычислительных преимуществ его использования. Необходимо отметить, что для преобразования Лапласа тоже существует возможность вычисления только в поле действительных чисел, но в этом случае для его обращения также надо решать соответствующее интегральное уравнение первого рода. Более подробно свойства преобразования Сумуду рассматриваются в [Belgacem, Karaballi, 2006; Belgacem, 2006]. Там же можно найти таблицу Сумуду-изображений для некоторых функций.

Данная работа посвящена разработке численного метода обращения преобразования Сумуду при помощи решения соответствующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода, которое сводится к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений. Для регуляризации такой системы используется метод Тихонова. В работе предлагается способ построения параметризованной регуляризирующей матрицы, учитывающей особенности Сумуду-изображений, полученных при моделировании сигналов электромагнитного зондирования земных недр. Рассматривается способ выбора параметров регуляризации Тихонова и регуляризирующей матрицы, без использования информации об уровне шума в Сумуду-изображении. Эффективность предложенного метода обращения преобразования Сумуду рассматривается на модельной задаче электромагнитного зондирования земных недр установкой с двумя разнесенными петлями, имеющей аналитическое решение.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМНЫХ НЕДР ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУМУДУ

Рассмотрим процесс электромагнитного зондирования земных недр. В качестве источника будет выступать импульс тока в генераторной круглой петле радиуса r . Результатом зондирования является временная развертка ЭДС, наведенная в круглой измерительной петле того же радиуса на удалении d от источника тока: d — расстояние между центрами генераторной и измерительной петель, причем $d > 2r$. Для получения математической модели, описывающей процесс зондирования, воспользуемся системой уравнений Максвелла. В качестве границы расчетной области Ω будем использовать поверхность $\partial\Omega$, удаленную от генераторной петли настолько, что значения электромагнитных полей на ней можно полагать равными нулю. Источником электромагнитного поля является токовый импульс, описываемый функцией Хевисайда $\chi(t)$:

$$J_0(t) = J_0\chi(t),$$

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases},$$

здесь J_0 — векторное поле, описывающее распределение плотности тока в генераторной петле. Поэтому начальные значения электромагнитных полей будут равны нулю.

Воспользовавшись уравнениями состояния, и полагая относительные диэлектрическую и магнитные проницаемости, равными единице, исключим из системы уравнений Максвелла векторы электрической и магнитной индукции. В результате сформулируем следующую математическую модель:

$$\operatorname{rot} E(t) = -\mu_0 \frac{\partial H(t)}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} H(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial E(t)}{\partial t} + \sigma E(t) + J_0(t), \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 E(t) = \rho(t), \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mu_0 H(t) = 0, \quad (8)$$

$$E(t)|_{t=0} = 0, \quad (9)$$

$$H(t)|_{t=0} = 0, \quad (10)$$

$$E(t) \times n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (11)$$

$$H(t) \times n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (12)$$

где $E(t)$ — напряженность электрического поля, $H(t)$ — напряженность магнитного поля, $J_0(t)$ — плотность стороннего электрического тока, σ — удельная электропроводность, ε_0 — диэлектрическая и μ_0 — магнитная проницаемости, $\rho(t)$ — плотность сторонних зарядов, далее будем полагать эту величину, равной нулю.

Используя преобразование Сумуду по времени, преобразуем математическую модель (5)—(8) и (11), (12) к следующему виду:

$$\operatorname{rot} E(u) = -\frac{\mu_0}{u} H(u), \quad (13)$$

$$\operatorname{rot} H(u) = \frac{\varepsilon_0}{u} E(u) + \sigma E(u) + J_0(u), \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 E(u) = 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \mu_0 H(u) = 0, \quad (16)$$

$$E(u) \times n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (17)$$

$$H(u) \times n|_{\partial\Omega} = 0. \quad (18)$$

Исключая из уравнений (13)—(18) напряженность магнитного поля и полагая $\rho(u) = 0$, получим следующую краевую задачу относительно Сумуду-изображения вектора напряженности электрического поля:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} E(u) + \left(\frac{\sigma}{u} + \frac{\varepsilon_0}{u^2} \right) E(u) = -\frac{1}{u} J_0(u), \quad (19)$$

$$E(u) \times n|_{\partial\Omega} = 0. \quad (20)$$

Соответствующая краевая задача во временной области имеет вид

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} E(t) + \sigma \frac{\partial E(t)}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E(t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial J_0(t)}{\partial t}, \quad (21)$$

$$E(t)|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial E(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (23)$$

$$E(t) \times n \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (24)$$

Плотность тока $J_0(u)$ не будет зависеть от u , что эквивалентно ступенчатому включению тока в момент времени $t = 0$. В этом случае правая часть (19) будет соответствовать (с точностью до знака) Сумуду-изображению δ -функции. Таким образом, решение краевой задачи (19), (20) будет Сумуду-изображением фундаментального решения дифференциального уравнения (21)—(23) по времени. При помощи данного решения и операции свертки можно вычислить напряженность электрического поля для импульса стороннего тока с любой зависимостью от времени.

От того, как удельная электропроводность зависит от пространственных координат, можно выбрать подходящий метод решения краевой задачи (19), (20) в частных производных например, векторный метод конечных элементов [Эпов и др., 2007]. В результате получим Сумуду-изображение напряженности электрического поля, интегрируя которое по контуру измерительной петли, можно найти Сумуду-изображение ЭДС, наведенной в этой петле. Для получения зависимости ЭДС от времени необходимо провести обратное преобразование Сумуду. Поскольку полученное поле $\tilde{E}(u)$ является фундаментальным решением, предположим, что ЭДС и ее Сумуду-изображение значимо отличаются от нуля только при $0 \leq t \leq b$ и $0 \leq u \leq b$ соответственно. Тогда для выполнения обратного преобразования Сумуду относительно изображения ЭДС необходимо решить следующее интегральное уравнение:

$$\tilde{E}(u) = \int_0^b \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{t}{u}\right) \tilde{E}(t) dt,$$

где $\tilde{E}(t)$ — ЭДС, наведенная в измерительной петле, $\tilde{E}(u)$ — Сумуду-изображение ЭДС, наведенной в измерительной петле.

ЧИСЛЕННОЕ ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУМУДУ

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int_0^b K(u, t) f(t) dt = g(u), \quad (25)$$

где $K(u, t) = \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{t}{u}\right)$.

Будем полагать, что функция $g(u)$ представлена в виде множества своих значений g^i (возможно, искаженных некоторым шумом) в точках u^0, u^1, \dots, u^n , принадлежащих отрезку $[0, b]$:

$$g^i = g(u^i), 0 \leq u^0 < u^1 < \dots < u^n \leq b.$$

В этом случае заменим уравнение (25) следующей системой уравнений:

$$\int_0^b K(u^i, t) f(t) dt = g^i, i = 0, 1, \dots, n. \quad (26)$$

Функцию $f(t)$ будем приближать при помощи ее значений f^i в точках t^i :

$$f^i = f(t^i), 0 \leq t^0 < t^1 < \dots < t^n \leq b.$$

Интегралы в системе уравнений (26) аппроксимируем при помощи квадратурной формулы метода трапеций с узлами t^i :

$$\int_0^b K(u^i, t) f(t) dt = \sum_{j=0}^{j=n-1} \frac{K(u^i, t^{j+1}) f(t^{j+1}) + K(u^i, t^j) f(t^j)}{2} (t^{j+1} - t^j), i = 0, 1, \dots, n.$$

Таким образом, от решения интегрального уравнения (25) перейдем при помощи основанного на квадратурных формулах метода коллокации [Nair, 2012] к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=0}^{j=n-1} \frac{K(u^i, t^{j+1})f^{j+1} + K(u^i, t^j)f^j}{2} (t^{j+1} - t^j) = g^i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (27)$$

которую для краткости будем обозначать:

$$Kf = g. \quad (28)$$

СЛАУ (27) плохо обусловлена, так как является дискретным аналогом интегрального уравнения первого рода (25) [Тихонов, Арсенин, 1979]. При этом элементы вектора правой части g могут содержать некоторый шум различной интенсивности. Для решения СЛАУ (28) воспользуемся методом регуляризации Тихонова [Тихонов, Арсенин, 1979] и перейдем к следующей задаче минимизации:

$$\min_f \|g - Kf\|^2 + \alpha \|Rf\|^2, \quad (29)$$

где α — параметр регуляризации, R — регуляризирующая невырожденная матрица. Решение задачи (29) имеет вид:

$$f_\alpha = (K^T K + \alpha R^T R)^{-1} K^T g.$$

Определение конкретного вида матрицы R зависит от свойств ядра $K(u, t)$ и правой части $g(u)$ интегрального уравнения (25), и, как следствие, от свойств предполагаемого решения $f(t)$. Такой выбор часто носит эвристический характер. Одним из распространенных вариантов вида матрицы R является единичная матрица. Выбор конкретного вида матрицы R , в контексте решаемой задачи электромагнитного зондирования, будет рассмотрен ниже.

Для выбора значения параметра α воспользуемся квазиоптимальным критерием [Леонов, 1978; Тихонов, Арсенин, 1979], для этого введем следующую функцию:

$$\psi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{df_\alpha}{d\alpha} \right\|^2. \quad (30)$$

В качестве квазиоптимального значения α будем выбирать наименьшее из значений $\alpha > 0$, реализующих локальный минимум $\psi(\alpha)$. Согласно [Тихонов, Арсенин, 1979], имеет место следующее соотношение:

$$\alpha \frac{df_\alpha}{d\alpha} = (K^T K + \alpha R^T R)^{-1} K^T (g - Kf_\alpha) = f_\alpha - (K^T K + \alpha R^T R)^{-1} K^T K f_\alpha.$$

Данное выражение представим как разность двух векторов:

$$\alpha \frac{df_\alpha}{d\alpha} = f_\alpha - \tilde{f}_\alpha, \quad (31)$$

где $\tilde{f}_\alpha = (K^T K + \alpha R^T R)^{-1} K^T K f_\alpha$.

Введем матрицу P_α :

$$P_\alpha = (K^T K + \alpha R^T R)^{-1} K^T. \quad (32)$$

Тогда разность в правой части (31) можно представить следующим образом:

$$f_\alpha - \tilde{f}_\alpha = P_\alpha g - P_\alpha K f_\alpha = P_\alpha (g - K f_\alpha).$$

Рассмотрим использование метода простой итерации с матрицей преобуславливания P_α для решения системы уравнений (28). Первые две итерации метода будут иметь вид

$$f_\alpha = P_\alpha g,$$

$$f'_\alpha = f_\alpha + P_\alpha (g - K f_\alpha). \quad (33)$$

Второе слагаемое в (33) является уточнением приближенного решения f_α , полученного на первой итерации. Таким образом, разность в правой части (31) можно проинтерпретировать как добавку к приближенному решению f_α в методе простой итерации с матрицей предобуславливания P_α . Исходя из этого, можно сделать вывод, что выбор параметра α , согласно критерию квазиоптимальности, осуществляется так, чтобы матрица предобуславливания P_α обеспечивала малую поправку к первому приближению f_α метода простой итерации и эту поправку можно было бы опустить, не теряя сильно в точности решения.

ОСОБЕННОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУМУДУ ДЛЯ СИГНАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Согласно начальным условиям (22) и (23), при $t = 0$ ЭДС, наведенная в измерительной петле, будет равна нулю. Учитывая это и предельное свойство (2), положим элементы векторов f и g с индексом 0 равными нулю, так как они соответствуют значениям ЭДС и Сумуду-изображениям ЭДС в точках $t = 0$ и $u = 0$ соответственно. Исходя из этого, исключим из СЛАУ (27) элемент вектора неизвестных f^0 и первое уравнение. В результате получим модифицированную СЛАУ:

$$\frac{K(u^i, t^1)}{2} t^1 + \sum_{j=1}^{j=n-1} \frac{K(u^i, t^{j+1}) f^{j+1} + K(u^i, t^j) f^j}{2} (t^{j+1} - t^j) = g^j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (34)$$

Далее, под СЛАУ $Kf = g$ будет подразумеваться модифицированная система уравнений (34).

Поскольку область интегрирования $[0, b]$ содержит в себе сильно разномасштабные значения t , точки t^i и u^i , используемые для дискретизации интегрального уравнения (25), будем задавать при помощи следующего соотношения:

$$t^i = u^i = t^1 (h)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

где

$$h = \left(\frac{b}{t^1} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Значения t^1 и b выбираются в зависимости от ожидаемых свойств наведенной в измерительной петле ЭДС от времени.

Согласно [Nabighian, 1988], абсолютные значения ЭДС, наведенной в измерительной петле, могут в разные моменты времени отличаться более чем на 6 порядков. Соответственно, различные элементы вектора f_α будут различаться во столько же раз. Поэтому выбор единичной матрицы в качестве регуляризирующей матрицы R не приводит к удовлетворительному результату. Это можно объяснить тем, что элементы вектора f_α , соответствующие значениям искомой функции на поздних временах после включения тока в источнике, не оказывают значимого влияния при вычислении второго слагаемого в (29) по сравнению с элементами, соответствующими значениям функции на ранних временах. Для того чтобы второе слагаемое в (29) обладало достаточной чувствительностью ко всем элементам вектора f_α , предлагается в качестве матрицы R использовать диагональную матрицу R_q , элементы диагонали которой задаются следующим образом:

$$[R]_{i,i} = (t^i)^q, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где q — параметр. Увеличение параметра q ведет к увеличению чувствительности второго слагаемого (29) к значениям искомой функции на поздних временах. При этом чувствительность к значениям функции на ранних временах снижается. Определение значения q требует соблюдения баланса чувствительности на всех временах.

Таким образом, выполнить приближенное обратное преобразование Сумуду-изображения ЭДС можно при помощи следующего соотношения:

$$f_{\alpha,q} = \left(K^T K + \alpha R_q^T R_q \right)^{-1} K^T g. \quad (36)$$

Для определения пары параметров α и q воспользуемся идеей выбора оптимальной в некотором смысле матрицы предобуславливания в методе простой итерации. В этом случае матрица предобуславливания будет зависеть уже от двух параметров α и q :

$$P_{\alpha,q} = \left(K^T K + \alpha R_q^T R_q \right)^{-1} K^T.$$

При решении задачи обращения Сумуду-изображения ЭДС непосредственное использование квазиоптимального критерия выбора параметра α тоже сталкивается с трудностями, связанными с различным масштабом элементов вектора f_{α}^i , соответствующих разным временам. Элементы вектора разности (31) являются сильно разномасштабными и чувствительность нормы разности векторов к элементам, связанным с поздними временами, является крайне низкой. Для устранения данного недостатка введем масштабирование элементов вектора разности из (31). Определим следующую функцию:

$$\varphi(\alpha, q) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{\alpha, q}^i - \tilde{f}_{\alpha, q}^i}{|f_{\alpha, q}^i| + |\tilde{f}_{\alpha, q}^i|} \right)^2,$$

где

$$f_{\alpha, q} = P_{\alpha, q} g,$$

$$\tilde{f}_{\alpha, q} = P_{\alpha, q} K f_{\alpha, q}.$$

В качестве оптимальной пары параметров α^* и q^* будем выбирать $\alpha > 0$ и $q \geq 0$, доставляющие минимум функции $\varphi(\alpha, q)$. Приближенное решение задачи минимизации осуществляем путем перебора значений (α^i, q^j) из множества, элементы которого заданы следующим образом:

$$(\alpha^i, q^j) = (\alpha^0 (p)^i, q^0 + hj), \quad i = 0, 1, \dots, k_{\alpha}, \quad j = 0, 1, \dots, k_q.$$

Необходимо отметить, что предложенный выше способ приближенного решения интегрального уравнения (25) можно использовать для вычисления обратного преобразования Лапласа действительной функции. Данная функция может быть известна сама по себе либо получена при помощи (3) из некоторого Сумуду-изображения. Для выполнения обратного преобразования Лапласа необходимо заменить Сумуду-ядро $K(u, t) = \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{t}{u}\right)$ на ядро Лапласа $K(s, t) = \exp(-ts)$, а точки коллокации u^i — на s^i по следующей формуле:

$$s^i = \frac{1}{u^{n-i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, вычисление обратного преобразования Сумуду можно выполнить двумя способами: использовать предложенный выше метод непосредственно к Сумуду-изображению или использовать данный метод для обращения изображения Лапласа, полученного при помощи (3). Вычислительные свойства этих двух подходов будут зависеть от различных спектральных свойств матриц СЛАУ (34), аппроксимирующих ядра преобразований Сумуду и Лапласа.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Использование преобразования Сумуду для моделирования сигналов электромагнитного зондирования рассмотрим на следующем примере. Область моделирования разделена горизонтальной плоскостью на два однородных по физическим свойствам полупространства: верхнее полупространство — непроводящий воздух, нижнее полупространство — проводящая геологическая среда. На земной поверхности расположены круглые генераторная и измерительная петли. Пусть плотность тока в генераторной петле во времени представляет собой прямоугольный импульс достаточно большой продолжительности, чтобы к моменту выключения тока напряженность электрического поля стала близка нулю (а напряженность магнитного поля вышла на константу). Включение тока происходит в момент времени $t = 0$. Можно показать, что напряженность электрического поля, полученного при подобных условиях, будет являться фундаментальным решением по времени задачи (21)—(25). Соответственно, ее Сумуду-изображение по времени будет удовлетворять (19), (20). Если при этом радиусы петель достаточно малы по сравнению с расстоянием между их центрами, то генераторную петлю можно заменить вертикальным магнитным диполем, а ЭДС в измерительной катушке принять пропорциональной производной по времени от z -компоненты напряженности магнитного поля $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ в центре измерительной петли. Необходимо отметить, что ЭДС в измерительной катушке при включении тока в источнике отличается от соответствующей ЭДС при выключении постоянного тока в источнике только знаком.

Для изображения Лаплас-функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ при выключении тока в источнике существует аналитическое выражение [Nabighian, 1988]:

$$L\left[\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}\right] = \frac{m}{2\pi\mu_0\sigma d^5} \left(9s^{-1} - \left(9s^{-1} + 9as^{-\frac{1}{2}} + 4a^2 + a^3s^{\frac{1}{2}} \right) \exp\left(-as^{\frac{1}{2}}\right) \right), \quad (37)$$

где $a = \sqrt{\mu_0\sigma d}$, σ — удельная электропроводность нижнего полупространства, d — расстояние между центрами петель, m — величина момента магнитного диполя. Воспользовавшись связью между преобразованиями Лапласа и Сумуду (4), запишем Сумуду-изображение функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ следующим образом:

$$S\left[\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}\right] = \frac{m}{u2\pi\mu_0\sigma d^5} \left(9u - \left(9u + 9au^{\frac{1}{2}} + 4a^2 + a^3u^{-\frac{1}{2}} \right) \exp\left(-au^{\frac{1}{2}}\right) \right). \quad (38)$$

Выполнив аналитическое обратное преобразование Лапласа для (37), получим следующее аналитическое выражение для $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ [Nabighian, 1988]:

$$\frac{\partial H_z(t)}{\partial t} = \frac{-m}{2\pi\mu_0\sigma d^5} \left(9\operatorname{erf}(\theta d) - 2d\pi^{-\frac{1}{2}} \left(9 + 6\theta^2 d^2 + 4\theta^4 d^4 \right) \exp\left(-\theta^2 d^2\right) \right), \quad (39)$$

где $\theta = \sqrt{\mu_0\sigma/4/t}$, $\operatorname{erf}(t)$ — функция ошибок:

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^t \exp(-\tau^2) d\tau.$$

На рисунке 1 представлены функция $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ и ее Сумуду-изображение (38) при $d = 100$ м, $\sigma = 0.01$ См/м. На примере функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ и ее Сумуду-изображения рассмотрим особенности выполнения обратного преобразования Сумуду в контексте задачи электромагнитного зондирования при помощи численного решения интегрального уравнения первого типа (25). Функция $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ обладает характерными свойствами для ЭДС, наведенной в измерительной петле (см. рис. 1). На малых временах функция меняется не очень быстро, а на более поздних временах начинает меняться пропорционально $t^{-2.5}$.

Рассмотрим использование предложенного вычислительного метода для вычисления обратного преобразования Сумуду-функции (38). Определим множество точек t^i и u^i при помощи (35). Для этого необходимо задать значения параметров n , b и t^1 . Как показали вычислительные эксперименты, достаточно точный результат получается, если для задания значений b и t^1 использовать следующее эвристическое правило: $t^1 = 10^{-6}b$, где b — точка временной оси, в которой выполняется соотношение:

$$\max_{\tau} \left| \frac{\partial H_z(\tau)}{\partial \tau} \right| = 10^{-8} \left| \frac{\partial H_z(t)}{\partial t} \right|.$$

Нахождение значения b требует знания функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ заранее. Получить оценку (возможно, не очень точную) этой функции можно при помощи предложенного в представленной работе метода, задав значение параметра b априори большим. Значение параметра n далее везде выбрано равным 100. Имея набор точек t^i и u^i , сгенерируем матрицу и вектор правой части СЛАУ (34). Для решения этой системы уравнений будем использовать метод регуляризации Тихонова (36). Параметры α и q найдем при помощи предложенной модификации квазиоптимального критерия в следующем диапазоне:

$$(\alpha, q) \in [1, 10^5] \times [0, 3].$$

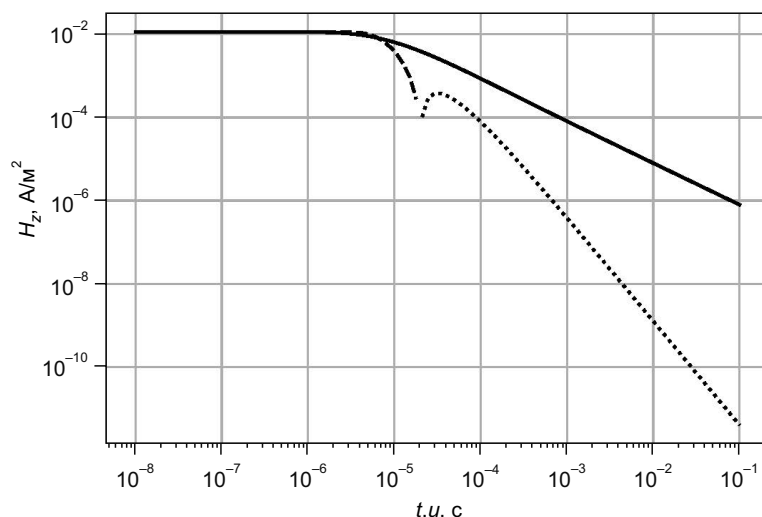


Рис. 1. Сумуду-изображение функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ (сплошная линия); положительная часть графика функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ (штриховая линия); абсолютное значение отрицательной части графика функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$ (пунктирная линия).

Расстояние между центрами петель 100 м, удельная электропроводность нижнего полупространства 0.01 См/м.

Вектор правой части СЛАУ (28) может быть искажен шумом. Это произойдет в случае получения элементов этого вектора из решения задачи (19), (20), которое было найдено при помощи сеточных методов (метод конечных разностей, метод конечных элементов и т.п.) или каких-либо других приближенных методов. Поскольку в данных тестах вектор правой части вычисляется согласно (38) точно, для имитации эффекта погрешности элементы вектора правой части g_0 без шума будем модифицировать следующим образом:

$$g_{\delta}^i = g_0^i \left(1 + \delta(-1)^i\right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где δ — задаваемый относительный уровень шума. Уровень шума у конкретного элемента вектора правой части зависит от значения самого элемента. Это связано с тем, что различные элементы вектора правой части обладают различным масштабом. Как следствие, использование аддитивного шума будет сильно искажать отдельные элементы вектора при незначительном влиянии на другие.

Введем функцию относительной погрешности:

$$v(t) = \left| \frac{f_{\delta}(t) - f(t)}{f(t)} \right|,$$

где $f(t)$ — точная функция, $f_{\delta}(t)$ — аппроксимация функции $f(t)$.

Рассмотрим влияние уровня шума δ в Сумуду-изображении (38) на относительную погрешность результата обращения Сумуду-изображения при помощи предложенного метода. На рисунке 2 представлены зависимости относительной погрешности $v(t)$ от времени и уровня шума для сигналов электромагнитного зондирования при расстоянии между петлями 100 м и удельной электропроводности нижнего полупространства 0.01 и 0.1 См/м соответственно. Ранее отмечалось, что предложенный метод вычисления обратного преобразования Сумуду с небольшими изменениями может быть применен для обращения действительного изображения Лапласа. Воспользуемся этим для получения приближения функции (39) из изображения Лапласа (37). На рисунке 3 представлены относительные погрешности $v(t)$ для уровня шума $\delta = 0$ и $\delta = 10^{-2}$ в изображении Лапласа (37) при расстоянии между петлями 100 м и удельной электропроводности нижнего полупространства 0.01 и 0.1 См/м.

Как следует из приведенных рисунков, относительная погрешность вычисления обратных преобразований Сумуду и Лапласа при помощи предложенного метода напрямую зависит от уровня шума в исходных изображениях. Чем меньше уровень шума, тем меньше погрешность у восстановленной функции. При этом, если уровень шума не очень большой, то более точные результаты получаются при обращении преобразования Лапласа. Но при достаточно большом уровне шума обращение преобразования Лапласа не позволяет получить удовлетворительный результат. Большой уровень относительной погрешности у восстановленных функций на ранних временах связан с осцилляциями данных функций вокруг точного значения. Для решения обратных задач электромагнитного зондирования требуются значения ЭДС на более поздних временах, на которых уровень относительной погрешности (в зависимости от уровня шума) принимает приемлемые значения. Возрастание относительных погрешностей в середине временной оси связано с переходом восстанавливаемой функции через ноль.

Таким образом, для вычисления обратного преобразования Сумуду предложенным методом при малых уровнях шума в изображении Сумуду следует воспользоваться связью между изображениями преобразований Лапласа и Сумуду, получить изображение Лапласа и выполнить обращение изображения Лапласа. Однако при достаточно больших уровнях шума необходимо использовать предложенный метод непосредственно для обращения преобразования Сумуду.

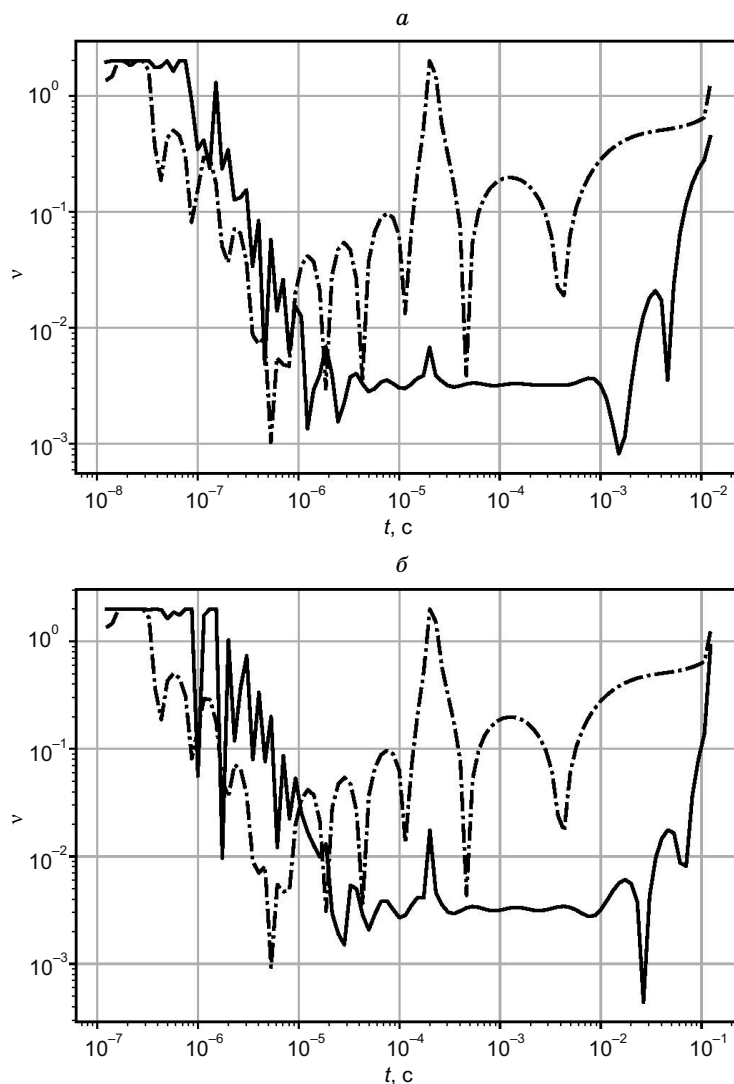


Рис. 2. Относительная погрешность функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$, восстановленной из ее Сумуду-изображения.

Расстояние между центрами петель 100 м, удельная электропроводность нижнего полупространства 0.01 См/м (а), 0.1 См/м (б). Сплошная линия — уровень шума в Сумуду-изображении $\delta = 0$, штрихпунктирная линия — $\delta = 10^{-2}$.

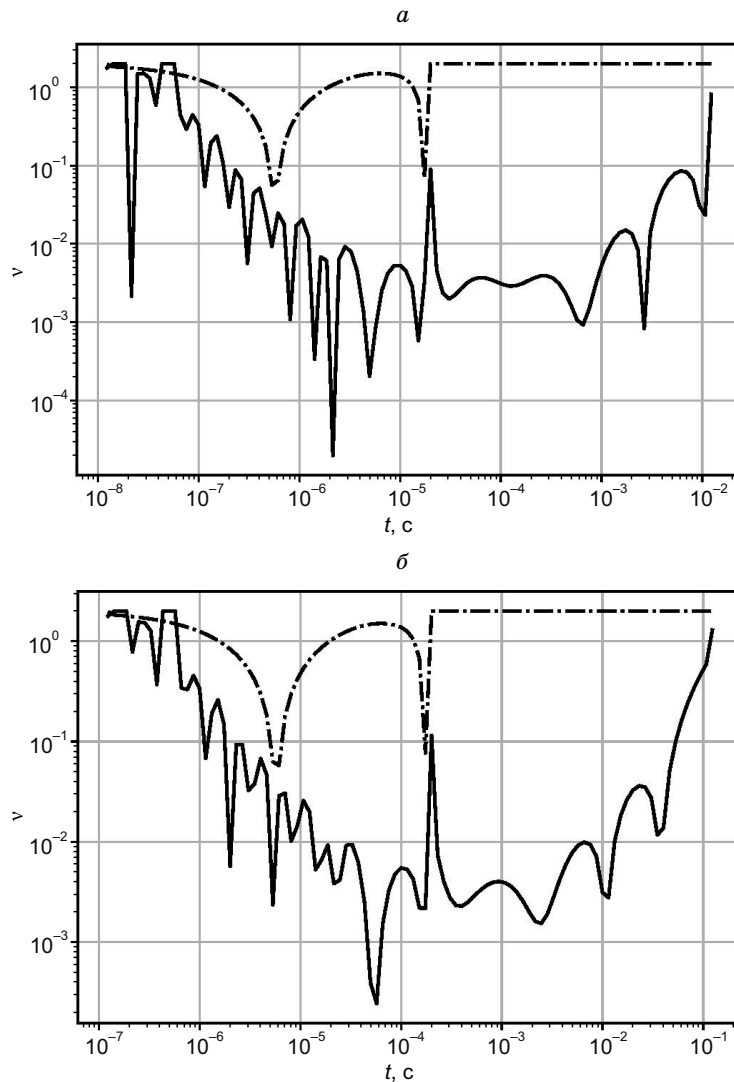


Рис. 3. Относительная погрешность функции $\frac{\partial H_z(t)}{\partial t}$, восстановленной из ее изображения Лапласа.

Расстояние между центрами петель 100 м, удельная электропроводность нижнего полупространства 0.01 См/м (а), 0.1 См/м (б). Сплошная линия — уровень шума в Сумуду-изображении $\delta = 0$, штрихпунктирная линия — $\delta = 10^{-2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных вычислительных экспериментов при моделировании сигналов электромагнитного зондирования земных недр можно сделать следующие выводы. Предложенный метод вычисления обратного преобразования Сумуду, ориентированный на Сумуду-образы, применим для получения временной зависимости наведенной в приемной петле ЭДС в практически значимом диапазоне времен. Это делает возможным использовать преобразование Сумуду для решения практических задач и делает его прямой альтернативой преобразованиям Лапласа и Фурье. Благодаря тому, что преобразование Сумуду позволяет проводить вычисления только в поле действительных чисел, при моделировании в сложных по геометрическим и физическим свойствам областях достигается существенная экономия вычислительных ресурсов.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 22-17-00181 «Импульсное электромагнитное зондирование многолетнемерзлых пород: теоретическое и экспериментальное развитие высокоразрешающего геофизического метода, научное обоснование и создание инновационной технологии мониторинга криолитозоны», <https://rscf.ru/project/22-17-00181/>.

ЛИТЕРАТУРА

- Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1963, 1100 с.
- Леонов А.С.** К обоснованию выбора параметра регуляризации по критериям квазиоптимальности и отношения // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1978, т. 18, № 6, с. 1363—1376.
- Табаровский Л.А., Соколов В.П.** Программа расчета нестационарного поля дипольных источников в горизонтально-слоистой среде (АЛЕКС) // Электромагнитные методы геофизических исследований. Новосибирск, ИГиГ СО АН СССР, 1982, с. 57—77.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979, 288 с.
- Эпов М.И., Шурина Э.П., Нечаев О.В.** Прямое трехмерное моделирование векторного поля для задач электромагнитного каротажа // Геология и геофизика, 2007, т. 48 (9), с. 989—995.
- Belgacem F.V.M.** Introducing and analysing deeper Sumudu properties // Nonlinear Stud., 2006, v. 13 (1), p. 23—41.
- Belgacem F.V.M., Karaballi A.A.** Sumudu transform fundamental properties investigations and applications // J. Appl. Math. Stochastic Anal., 2006, v. 2006, p. 1—23, doi: 10.1155/JAMSA/2006/91083.
- Nabighian M.** Electromagnetic methods in applied geophysics: v. 1, theory. Oklahoma, SEG, 1988, 531 p., doi: 10.1190/1.9781560802631.
- Nair M.T.** Quadrature based collocation methods for integral equations of the first kind // Adv. Comput. Math., 2012, v. 36 (2), p. 315—329, doi: 10.1007/s10444-011-9196-1.
- Watugala G.K.** Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems // Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 1993, v. 24 (1), p. 35—43, doi: 10.1080/0020739930240105.