

КОНЦЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
КАНАЛАХ ПРИ КОНЕЧНЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ
РЕЙНОЛЬДСА

B. Ф. Васильев, И. В. Лаврентьев

(Ленинград)

На основании решения задачи о распределении магнитных полей, индуцированных при движении среды в плоском канале с проводящими стенками в присутствии неоднородного магнитного поля, анализируется влияние магнитного числа Рейнольдса, проводимости стенок и геометрии внешнего магнитного поля на характер распределения индуцированных токов, электрического и магнитного полей по сечению канала, а также джоулевых потерь. Подобные вопросы для каналов с изоляционными стенками рассмотрены ранее в работе [1].

1. Рассмотрим плоский канал $|x| < \infty, |y| < a$ с тонкими проводящими стенками $y = \pm a$, по которому с постоянной скоростью $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ движется среда с проводимостью σ во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_e = (0, 0, B_e(x))$. При этом в проводящей среде наводятся электрические токи, создающие собственное магнитное поле \mathbf{B}_i , которое удовлетворяет системе уравнений

$$\text{rot } \mathbf{B}_i = \mu \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}/\sigma = -\nabla \varphi + \mathbf{V} \times (\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_i) \quad (1.1)$$

Здесь φ и \mathbf{j} — электрический потенциал и плотность тока в канале. Предполагая далее, что все величины не зависят от координаты z и $j_z = 0$, из (1.1) имеем $\mathbf{B}_i = (0, 0, B_i(x, y))$. Справедливость такого предположения в реальных ситуациях должна быть обоснована в каждом конкретном случае (см. п. 2). При принятых допущениях из (1.1) следует, что $B_i(x, y)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial y^2} - \mu \sigma V \frac{\partial B_i}{\partial x} = \mu \sigma V \frac{\partial B_e}{\partial x} \quad (1.2)$$

Границные условия для $B_i(x, y)$ можно найти, используя граничные условия Шерклифа [2] для электрического потенциала на внутренней стороне тонкой проводящей стенки канала

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \pm \frac{\sigma_1 t}{\sigma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = V [B_e(x) + B_i(x)] \quad \text{при } y = \pm a \quad (1.3)$$

Используя (1.1), после интегрирования по x с учетом условия $B_i = j_x = 0$ при $x = \pm \infty$ из последнего соотношения получаем искомое граничное условие для B_i

$$B_i \pm \frac{\sigma_1 t}{\sigma} \frac{\partial B_i}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm a \quad (1.4)$$

Переходя к безразмерным переменным

$$x^\circ = x/a, \quad y^\circ = y/a, \quad j = \sigma V B j^\circ, \quad \varphi = B V a \varphi^\circ \\ B_i = B b(x^\circ, y^\circ), \quad B_e = B f(x^\circ)$$

и опуская для простоты записи индекс нуль у безразмерных величин, используя (1.2) и (1.4), приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - R_m \frac{\partial b}{\partial x} &= R_m \frac{\partial f}{\partial x} & (R_m = \mu \sigma V a) \\ b \pm d \frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = \pm 1 & \left(d = \frac{\sigma_1 t}{\sigma a} \right) \\ \frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = 0, |x| < \infty; \quad b \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь B — некоторая базисная величина магнитного поля, σ_1 и t — проводимость и толщина стенок канала, R_m — магнитное число Рейнольдса.

Решение задачи (1.5) можно построить в виде тригонометрических рядов

$$b(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n b_n(x) \cos \mu_n y \quad (1.6)$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным корням уравнения

$$d \mu_n \operatorname{tg} \mu_n = 1 \quad (1.7)$$

при этом $\cos \mu_n y$ образуют полную систему ортогональных в интервале $y \in [-1, 1]$ функций. Тогда, подставляя (1.6) в (1.5) и используя ортогональность $\cos \mu_n y$, получаем

$$\begin{aligned} b_n(x) &= e^{\gamma_+ x} \int_{-\infty}^{-x} \frac{df}{dx} e^{-\gamma_+ x} dx + e^{\gamma_- x} \int_x^{\infty} \frac{df}{dx} e^{-\gamma_- x} dx \\ A_n &= \frac{4R_m \sin \mu_n}{(2\mu_n + \sin 2\mu_n) \sqrt{R_m^2 + 4\mu_n^2}}, \quad 2\gamma_{\pm} = R_m \pm \sqrt{R_m^2 + 4\mu_n^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Используя полученное выше решение задачи (1.5), можно определить распределение электрического потенциала и джоулевы потери в канале. Из (1.1), полагая потенциал равным нулю при $x = \pm \infty$ после интегрирования по x , получаем

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{R_m} \int_{-\infty}^x \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} dx \quad (1.9)$$

Джоулевы потери в канале определяются как работа лоренцевой силы в единицу времени¹

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-a}^a (\mathbf{B} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{V} dy \quad (1.10)$$

Подставляя (1.1) и (1.5) в (1.10) и интегрируя по частям, получаем выражение для безразмерной джоулевой диссипации

$$q = \frac{Q}{\sigma E^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n) (R_m^2 + 4\mu_n^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} b_n dx \quad (1.11)$$

$E = 2BVa$

2. Для качественной и количественной оценки влияния магнитного числа Рейнольдса, проводимости стенок канала и характера распределения

¹ В формуле (1.10) все величины размерные.

ния внешнего магнитного поля необходимо выбрать более или менее реальную модель. Обычно в реальной ситуации канал находится в середине между полюсами магнита, и ширина канала существенно больше его высоты. Если, кроме того, ширина полюсных наконечников превышает ширину канала не менее, чем на зазор магнита, то с большой степенью точности можно считать, что $\mathbf{B}_e = (B_{ex}(x, z), 0, B_{ez}(x, z))$.

Более того, зависимостью \mathbf{B}_e от z можно пренебречь и считать, что $B_{ex} \approx 0$, если высота канала мала по сравнению с величиной зазора. В этом случае распределение внешнего магнитного поля будет соответствовать выбранному в п. 1.

Что касается магнитного поля токов, наводимых в канале, то ситуация здесь намного сложнее. В части канала, находящейся в зазоре магнита, можно считать, что \mathbf{B}_i не зависит от z и $B_{ix} = B_{iy} = 0$, если магнитная проницаемость полюсных наконечников равна бесконечности. Такое предположение не является очевидным для зоны канала, находящейся вне зазора магнита, так как магнитное поле токовых вихрей на входе и выходе из внешнего поля будет замыкаться как по магнитопроводу, так и рассеиваться вне его. В этом случае появляется зависимость B_{iz} от координат y, z и B_{ix} и B_{iy} становятся отличными от нуля.

Такое положение усугубляется с ростом магнитного числа Рейнольдса особенно на выходе из канала, что приводит к появлению в граничных условиях на стенках канала искомой величины индуцированного магнитного поля, и задача становится незамкнутой. Справедливость принятых в п. 1 предположений и граничных условий (1.4) может быть проверена лишь экспериментальным путем или моделированием, так как аналитическое решение соответствующей задачи весьма сложное.

Здесь необходимо отметить, что предположения п. 1 и вытекающее из них решение задачи справедливы в том случае, когда стенки канала, перпендикулярные внешнему магнитному полю, будут идеально магнитопроводящими или полюсные наконечники распространены на бесконечность в обе стороны вдоль потока. В дальнейшем будем иметь в виду именно такую модель канала, полагая, однако, что внешнее магнитное поле задается зависимостью, реально отображающей характер распределения поля вдоль оси x .

Итак, пусть внешнее магнитное поле задано в таком же виде, как и в работе [3]

$$f(x) = \begin{cases} 1 - A_1 \exp v_1 (|x| - c) & \text{при } |x| < c \\ A_2 \exp v_2 (c - |x|) & \text{при } |x| > c \end{cases} \quad (2.1)$$

Значения параметров

$$A_1 = 0.17, A_2 = 0.83, v_1 = 5.29 / 2\delta_*, v_2 = 1.07 / 2\delta_*, \delta_* = \delta / 2a, c = \lambda / a$$

будут соответствовать реальному спаду магнитного поля.

Здесь δ — зазор между полюсами магнита, 2λ — длина полюсного наконечника. Тогда распределение индуцированного магнитного поля согласно (1.6), (1.8) и (2.1) примет вид

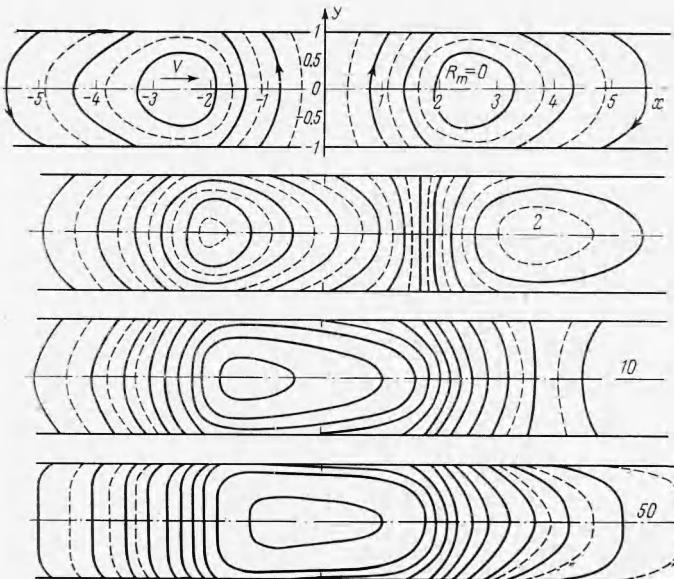
$$\begin{aligned} b(x, y) &= 4R_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n \cos \mu_n y b_n(x)}{(2\mu_n + \sin 2\mu_n)(R_m^2 + 4\mu_n^2)^{1/2}} \quad (2.2) \\ b_n(x) &= \pm \frac{v_1 v_2 (R_m^2 + 4\mu_n^2)^{1/2} \exp [\pm v_2 (x \pm c)]}{(v_1 + v_2)(v_2 \mp \gamma_{\pm})(v_2 \mp \gamma_{\pm})} + \left[\frac{v_1 v_2 \exp (-\gamma_{\pm} c)}{(v_1 - \gamma_{\pm})(v_2 + \gamma_{\pm})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_1 v_2 \exp (\gamma_{\pm} c)}{(v_1 + \gamma_{\pm})(v_2 - \gamma_{\pm})} - \frac{2v_1 v_2 \gamma_{\pm} \exp (-v_1 c)}{(v_1 + v_2)(v_1^2 - \gamma_{\pm}^2)} \right] \exp \gamma_{\pm} x \end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует $x \in (-\infty, -c]$, а нижний — $x \in [c, \infty)$

$$b_n(x) = \pm \frac{v_1 v_2 (R_m^2 + 4\mu_n^2)^{1/2} \exp [\mp v_1 (x \pm c)]}{(v_1 + v_2)(v_1 + \gamma_-)(v_1 \pm \gamma_+)} \mp \frac{v_1 v_2 \exp [\gamma_\pm (x \pm c)]}{(v_1 \pm \gamma_+)(v_2 + \gamma_\mp)} \pm \\ \pm \left[\frac{v_1 v_2 \exp (+\gamma_\pm c)}{(v_1 + \gamma_\pm)(v_2 \pm \gamma_\pm)} \mp \frac{2v_1 v_2 \gamma_\pm \exp (-v_1 c)}{(v_1 + v_2)(v_1^2 - \gamma_\pm^2)} \right] \exp \gamma_\pm x$$

В последнем выражении верхний знак соответствует $x \in [-c, 0]$, нижний — $x \in [0, c]$.

На фиг. 1 в качестве примера приведена картина распределения индуцированных токов в канале при $d = 1$ и различных значениях $R_m = 0, 2, 10, 50$, построенная согласно формуле (2.2). Как видно из фиг. 1, при $R_m = 0$ токовые вихри на входе и выходе из внешнего магнитного поля распределены симметрично относительно середины магнита. С ростом



Фиг. 1

R_m граница токовых вихрей смещается по ходу движения среды, при этом входной токовый вихрь начинает развиваться, центр его смещается к середине магнита и в предельном случае при $R_m = \infty$ достигает ее. Выходной токовый вихрь с ростом R_m также смещается вниз по течению и в пределе при $R_m \rightarrow \infty$ размазывается на бесконечности.

Из формулы (2.2) нетрудно убедиться непосредственным интегрированием, что полный поток индуцированного магнитного поля равен нулю при любых значениях R_m и d . При этом магнитные потоки входного и выходного вихрей равны по величине и противоположны по знаку, с ростом R_m увеличиваются и при $R_m = \infty$ достигают величины, равной потоку внешнего магнитного поля. Магнитное поле входного токового вихря становится равным по величине и противоположным по знаку внешнему магнитному полю, в то время как поле выходного вихря и общее результирующее поле равны нулю. Из фиг. 1 также следует, что с ростом R_m при фик-

сированном значении d , линии индуцированных токов выпрямляются и при $R_m = \infty$ индуцированное поле перестает зависеть от поперечной координаты y .

Если в (2.2) устремить R_m к бесконечности и воспользоваться разложением единицы в ряд по $\cos \mu_n y$

$$1 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n \cos \mu_n y}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \quad (2.3)$$

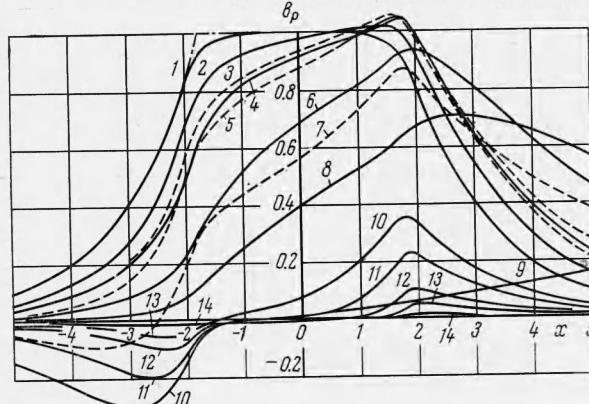
нетрудно показать, что индуцированное магнитное поле становится равным по величине и обратным по знаку приложенному магнитному полю, которое не зависит от координаты y . Аналогичная картина наблюдается и с ростом d при любом значении R_m , что опять же следует из (2.2). Действительно, если положить $d = \infty$, то $\mu_n = \pi n$, $n = 0, 1, \dots$ и все члены ряда исчезают, кроме члена с $\mu_n = 0$, что и дает независимость поля от y .

Фиг. 2, на которой приведено распределение результирующего магнитного поля $b_p = f + b$ в середине канала для $c = 2$ и $\delta_* = 0.75$ при различных значениях R_m и d . Кривые 1(0), 2(1), 4(2), 6(5), 8(10), 9(50) соответствуют значению $d = 0$, кривые 10(1), 11(2), 12(5), 13(10), 14(50) — значению $d = \infty$, кривые 3(1), 5(1), 7(1) соответствуют значениям $d = 0.5, 1.0, 5.0$; в скобках при номерах кривых указано значение магнитного числа Рейнольдса.

Из приведенных данных видно, что снос поля вниз по потоку тем более эффективный, чем больше R_m . При $d = 0$ на входе поле уменьшается, а на выходе увеличивается. С ростом d эта тенденция сохраняется при общем уменьшении результирующего магнитного поля, причем на входе поле становится отрицательным. Таким образом, наглядно проявляется размагничивающее действие индуцированных токов (в зоне полюсных наконечников поток результирующего магнитного поля уменьшается с ростом R_m и при $R_m \rightarrow \infty$ стремится к нулю).

3. Переидем к определению электрического потенциала $\varphi(x, y)$. Подставляя в (1.9) распределение магнитного поля из (2.2), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \sin \mu_n \sin \mu_n y}{(2\mu_n^2 + R_m \gamma_{\pm}) (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} & \left\{ \frac{v_1 \gamma_{\pm} (\gamma_- - \gamma_+) \exp v_2 (c + x)}{2(v_1 + v_2)(v_2 + \gamma_+)(v_2 + \gamma_-)} \right. \\ & \left. \pm \left[\frac{v_1 v_2 \gamma_+ \exp(-v_1 c)}{(v_1 + v_2)(v_1^2 - \gamma_{\pm}^2)} + \frac{v_1 v_2 \operatorname{sh} \gamma_+ c}{(v_1 + \gamma_{\pm})(v_2 \pm \gamma_{\pm})} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma_+ (v_1 - v_2) v_1 v_2 \exp(\pm \gamma_{\pm} c)}{(v_1^2 - \gamma_{\pm}^2)(v_2^2 - \gamma_{\pm}^2)} \right] \exp \gamma_{\pm} x \right\} \end{aligned}$$



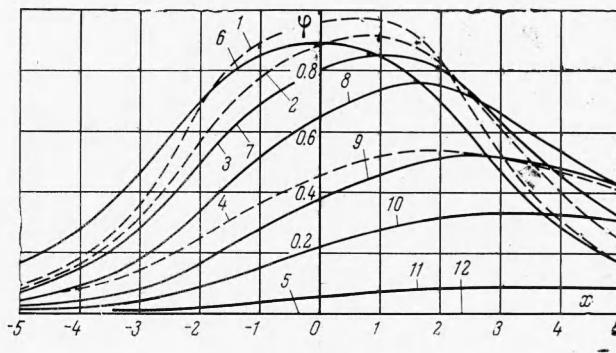
Фиг. 2

Здесь верхний знак соответствует $x \in (-\infty, -c)$, а нижний — $x \in [c, \infty)$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n \sin \mu_n y}{(4\mu_n^2 + R_m^2)^{1/2} (2\mu_n + \sin 2\mu_n)} & \left\{ \frac{(4\mu_n^2 + R_m^2)^{1/2}}{2\mu_n} + \right. \\ & + \frac{v_1 v_2 \mu_n \exp \gamma_- (c+x)}{2\gamma_- (v_1 + \gamma_-) (v_2 - \gamma_-)} - \frac{v_1 v_2 \mu_n \exp \gamma_+ (x-c)}{2\gamma_+ (v_2 + \gamma_+) (v_1 - \gamma_+)} + \frac{v_2 \mu_n \exp (-v_1 c)}{v_1 + v_2} \times \\ & \times \left. \left[\frac{v_1 \exp \gamma_{\pm} x}{v_1^2 - \gamma_{\pm}^2} + \frac{(4\mu_n^2 + R_m^2)^{1/2} \exp (+v_1 x)}{2(v_1 \pm \gamma_-) (v_1 \pm \gamma_+)} \right] \right\} \end{aligned}$$

В последнем выражении верхний знак соответствует $x \in [-c, 0]$, нижний — $x \in [0, c]$.

На фиг. 3 показано распределение потенциала вдоль стенки канала для $c = 2$ и $\delta_* = 0.75$ при различных значениях d и R_m . Воспроизводим номера кривых на фигуре [3], при которых соответствующие комбинации значений d и R_m указываем в скобках: 1 (0,1), 2 (0.5,1), 3 (1,1), 4 (5, 1), 5 (∞ , 1), 6 (1,0), 7 (1,1), 8 (1,2), 9 (1,5), 10 (1,10), 11 (1,50), 12 (1, ∞). Рассмотрим влияние магнитного числа Рейнольдса на чувствительность $S = \varphi(0,1)$ — величину, характеризующую работу канала в режиме расходомера. В работе [3] довольно подробно обсуждался вопрос о влиянии относительного зазора δ_* , протяженности магнитного поля c и параметра d на чувствительность.



Фиг. 3

Как показывают проведенные расчеты, и в общем случае ($R_m \neq 0$) качественные рассуждения в [3] относительно зависимости S от указанных величин остаются верными для рассматриваемой задачи. Как видно из фиг. 3, величина S и максимальное значение потенциала на стенках канала уменьшаются с ростом R_m , и для повышения чувствительности расходомера необходимо снимать сигнал со стенок в сечении $(x_m, 1)$, где $x_m \geq 0$ и является функцией магнитного числа Рейнольдса, причем x_m растет с увеличением R_m ($x_m = 0$ при $R_m = 0$).

4. Проанализируем теперь влияние магнитного числа Рейнольдса, проводимости стенок и характера распределения внешнего магнитного поля на джоулевые потери в канале. Выражение для джоулевых потерь в случае, когда внешнее поле определяется формулой (2.1), очень громоздко и неудобно для анализа; зададим его в более простом виде

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < c_1 \\ \exp v(c_1 - |x|) & \text{при } |x| > c_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Если c_1 определить из равенства $f_1(c) = f(c)$ и положить $v = v_2$ (см. (2.1)), то, как показывает расчет, значения величин джоулевых потерь в случаях задания внешнего поля по формулам (4.1) и (2.1) отличаются

друг от друга не более, чем на 3%. На фиг. 2 распределение поля по закону (4.1) показано пунктирной кривой (здесь $c_1 = 1.74$)

Итак, для распределения поля (4.1) имеем следующее выражение для безразмерной джоулевой диссипации:

$$q = 2v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n) (\gamma_+ - \gamma_-)} \left[\frac{(v^2 - \mu_n^2)(2v + \gamma_- - \gamma_+) - vR_m^2}{v(v^2 - \gamma_-^2)(v^2 - \gamma_+^2)} - \right. \\ \left. - \frac{\exp(2\gamma_- c_1)}{(v - \gamma_-)^2} - \frac{\exp(-2\gamma_+ c_1)}{(v + \gamma_+)^2} \right] \quad (4.2)$$

Характер зависимости q от длины спада внешнего магнитного поля v^{-1} при различных значениях R_m тот же, что и при $R_m = 0$ [3], а именно джоулема диссипация уменьшается с ростом v^{-1} ($q \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$). В таблице в качестве примера приведены подсчитанные по формуле (4.2) величины безразмерных джоулемовых потерь при различных значениях R_m , d , c_1 и двух значениях v : для первой строки $\delta_* = 0$ ($v = \infty$ — поле задано ступенькой), для второй строки $\delta_* = 0.75$ ($v = 0.714$).

Принимая во внимание сказанное выше, в дальнейшем для простоты будем рассматривать только случай, когда внешнее поле задано ступенькой ($v = \infty$). Тогда (4.2) будет иметь вид

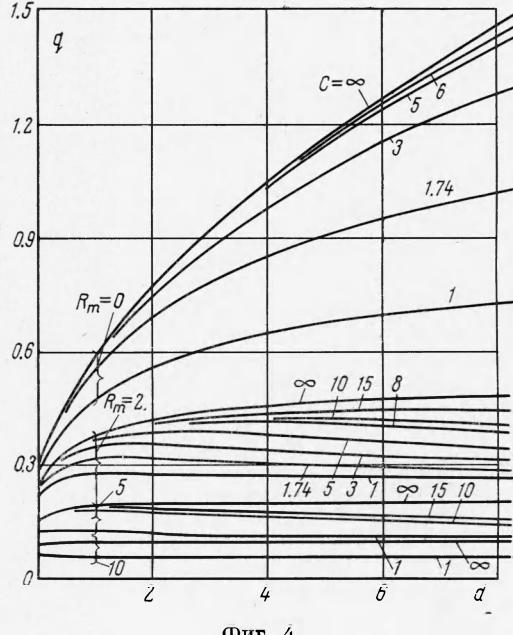
$$q = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \mu_n [2 - \exp(2\gamma_- c_1) - \exp(-2\gamma_+ c_1)]}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n) (\gamma_+ - \gamma_-)} \quad (4.3)$$

Все последующие выводы, вытекающие из анализа формулы (4.3), будут справедливы и при всех других значениях $v \neq \infty$, в чем нетрудно будет убедиться, в частности, прибегая к таблице.

На фиг. 4 приведены кривые зависимости относительных джоулевых потерь q от параметра d , характеризующего влияние проводимости стенок канала, при различных значениях R_m и относительной протяженности внешнего поля c_1 , построенные по формуле (4.3). Как видно из фиг. 4, при $c_1 = \infty$ влияние магнитного числа Рейнольдса и проводимости стенок проявляется по-разному. Если с ростом R_m величина относительных джоулевых потерь уменьшается и при $R_m \rightarrow \infty$ $q \rightarrow 0$, как R_m^{-1} , то с ростом d величина q монотонно увеличивается, и при $d \rightarrow \infty$ $q \rightarrow R_m^{-1}$, что следует из (4.3), причем с ростом R_m зависимость $q(d)$ становится более слабой и $q(d)$ достигает своего максимального значения $q(\infty) = R_m^{-1}$ тем раньше, чем большие R_m .

Однако при конечных значениях протяженности внешнего поля c_1 зависимость $q(d)$ становится сложнее, и при $R_m \neq 0$ всегда найдется такое значение c_1 тем большее, чем больше R_m , при котором кривая $q(d)$ имеет максимум, причем значение d , составляющее этот максимум, уменьшается с ростом R_m и уменьшением c_1 . Как будет показано ниже, для $c_1 \neq \infty$ при $d \rightarrow \infty$ величина $q \rightarrow 0.5R_m^{-1}$.

Отсюда следует, что в реальных ситуациях, когда протяженность магнитного поля всегда конечна, пользоваться формулами для джоулевых потерь, полученными для полу бесконечного распределения поля, нужно с большой осторожностью. Если при-



Фиг. 4

| R_m | c | $d = 0$ | $d = 0.5$ | $d = 1.0$ | $d = 2.0$ | $d = 5.0$ |
|-------|------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 1.0 | 0.2602 | 0.4001 | 0.4724 | 0.5563 | 0.6687 |
| | 1.0 | 0.0815 | 0.1717 | 0.2401 | 0.3429 | 0.5315 |
| | 1.74 | 0.2703 | 0.4415 | 0.5464 | 0.6843 | 0.8987 |
| | 1.74 | 0.0825 | 0.1783 | 0.2555 | 0.3781 | 0.6218 |
| | 8.0 | 0.2714 | 0.4520 | 0.5750 | 0.7626 | 1.1532 |
| | 8.0 | 0.0826 | 0.1800 | 0.2614 | 0.3996 | 0.7204 |
| 1.0 | 1.0 | 0.2451 | 0.3521 | 0.3929 | 0.4256 | 0.4450 |
| | 1.0 | 0.0778 | 0.1512 | 0.1940 | 0.2373 | 0.2652 |
| | 1.74 | 0.2568 | 0.3915 | 0.4518 | 0.5044 | 0.5336 |
| | 1.74 | 0.0794 | 0.1603 | 0.2120 | 0.2684 | 0.3085 |
| | 8.0 | 0.2591 | 0.4104 | 0.4973 | 0.6040 | 0.7270 |
| | 8.0 | 0.0797 | 0.1652 | 0.2276 | 0.3149 | 0.4341 |
| 2.0 | 1.0 | 0.2110 | 0.2670 | 0.2751 | 0.2735 | 0.2635 |
| | 1.0 | 0.0689 | 0.1134 | 0.1266 | 0.1279 | 0.1109 |
| | 1.74 | 0.2254 | 0.3003 | 0.3150 | 0.3114 | 0.2907 |
| | 1.74 | 0.0717 | 0.1252 | 0.1445 | 0.1500 | 0.1299 |
| | 8.0 | 0.2308 | 0.3322 | 0.3745 | 0.4081 | 0.4040 |
| | 8.0 | 0.0729 | 0.1369 | 0.1715 | 0.2099 | 0.2194 |
| 5.0 | 1.0 | 0.1246 | 0.1241 | 0.1181 | 0.1117 | 0.1056 |
| | 1.0 | 0.0411 | 0.0504 | 0.0409 | 0.0330 | 0.0233 |
| | 1.74 | 0.1352 | 0.1400 | 0.1316 | 0.1213 | 0.1105 |
| | 1.74 | 0.0463 | 0.0552 | 0.0502 | 0.0406 | 0.0278 |
| | 8.0 | 0.1493 | 0.1783 | 0.1787 | 0.1680 | 0.1427 |
| | 8.0 | 0.0516 | 0.0786 | 0.0850 | 0.0782 | 0.0569 |
| 10 | 1.0 | 0.0633 | 0.0594 | 0.0563 | 0.0537 | 0.0516 |
| | 1.0 | 0.0194 | 0.0172 | 0.0131 | 0.0096 | 0.0063 |
| | 1.74 | 0.0705 | 0.0654 | 0.0607 | 0.0565 | 0.0530 |
| | 1.74 | 0.0235 | 0.0208 | 0.0166 | 0.0120 | 0.0076 |
| | 8.0 | 0.0864 | 0.0895 | 0.0833 | 0.0741 | 0.0627 |
| | 8.0 | 0.0304 | 0.0387 | 0.0352 | 0.0277 | 0.0168 |
| 50 | 1.0 | 0.0117 | 0.0106 | 0.0103 | 0.0102 | 0.0101 |
| | 1.0 | 0.0019 | 0.0010 | 0.0007 | 0.0004 | 0.0003 |
| | 1.74 | 0.0125 | 0.0125 | 0.0106 | 0.0103 | 0.0101 |
| | 1.74 | 0.0024 | 0.0024 | 0.0009 | 0.0006 | 0.0003 |
| | 8.0 | 0.0158 | 0.0133 | 0.0122 | 0.0113 | 0.0106 |
| | 8.0 | 0.0052 | 0.0035 | 0.0024 | 0.0015 | 0.0008 |

$d = 0$ и $R_m = 0$ уже при $c_1 > 2$ взаимным влиянием входного и выходного токовых вихрей можно пренебречь и определять джоулевы потери, как удвоенное значение токовых для полубесконечного распределения магнитного поля, то при отличных от нуля значениях R_m и d этого сделать уже нельзя, так как при этом становится существенной несимметрия в распределении результирующего магнитного поля, причем тем большая, чем больше R_m или d (см. п. 2). Так, например, если при $R_m = d = 0$ разница между значениями q в случаях $c_1 = \infty$ и $c_1 = 1$ не превышает 5%, то при $d = 0$ и $R_m = 50$ джоулевы потери при $c_1 = \infty$ более чем в 1.5 раза превышают таковые при $c_1 = 1$ и в два раза, если $R_m = 0$ и $d = 10$.

Как видно из фиг. 4, нижняя граница значений c_1 , при которых еще можно пользоваться с достаточной степенью точности формулой для джоулевых потерь, полученной для полубесконечного распределения магнитного поля, растет как с увеличением R_m , так и d .

Прежде чем проследить аналитически подобное поведение в зависимости от значений c_1 , R_m и d , получим приближенную формулу для q . Воспользовавшись (2.3) при $y = 0$, из (4.3) можно получить

$$q = \frac{2 - \exp(R_m - \sqrt{R_m^2 + 4\mu_0^2}) c_1 - \exp(-R_m - \sqrt{R_m^2 + 4\mu_0^2}) c_1}{2(R_m^2 + 4\mu_0^2)^{1/2}} \quad (4.4)$$

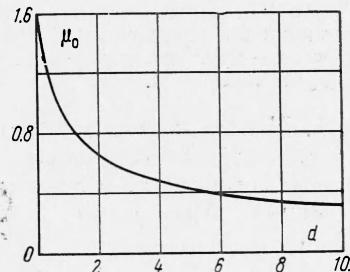
Для значений R_m и $d > 1$ величины q , полученные из (4.3) и (4.4), отличаются не более, чем на 1%. Для R_m и $d < 1$ (4.4) дает несколько завышенные по сравнению с (4.3) значения q (максимальная разница при $R_m = d = 0$ составляет 14%). Зависимость $\mu_0(d)$ приведена на фиг. 5. При $d > 10$, как это следует из (1.7), можно считать, что $\mu_0^2 \approx d^{-1}$. В этом случае при достаточно больших R_m и c_1 (таких, что $\exp(-2R_m c_1) \ll 1$) из (4.4) имеем

$$q = \frac{2 - \exp(-2c_1 / R_m d)}{2 [R_m^2 + (2/d)^2]^{1/2}} \quad (4.5)$$

Из последней формулы видно, что вся зависимость q от c_1 содержится в экспоненциальном члене. Если $c_1 = \infty$ при конечных значениях R_m и d , то числитель в (4.5) равен двум и при $d \rightarrow \infty$ $q \rightarrow R_m^{-1}$, если же $c_1 \neq \infty$ и $d \rightarrow \infty$, то $q \rightarrow 0.5R_m^{-1}$. Из (4.5) можно определить нижнюю границу значений c_1 , при которых можно пользоваться формулой для расчета джоулевых потерь в случае полубесконечного распределения внешнего поля. Для этого должно выполняться условие

$$\exp(-2c_1 / R_m d) \ll 1$$

т. е. $2c_1 / R_m d$ должно быть больше некоторого числа, зависящего от требуемой точности аппроксимации, таким образом, $c_1 > 0.5 A R_m d$.



Фиг. 5

В заключение необходимо отметить, что, как следует из предварительных экспериментов, а также из результатов работы [4], размагничивающее действие индуцированных в канале токов проявляется в меньшей степени, чем следует из проведенного выше теоретического анализа. Это явление, в частности, можно объяснить тем, что, как уже указывалось в п. 2, магнитный поток от индуцированных токов рассеивается вне магнитопровода; кроме того, при решении задачи не учитывалось шунтирующее действие токов, замыкающихся по проводящим стенкам и профилю скорости в попечном сечении канала.

Авторы благодарят А. Б. Ватажина, обратившего их внимание на рассмотренную задачу.

Поступила 2 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Boucheg R. A., Ames D. B. End effect losses in d. c. magnetohydrodynamic generators. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 5, pp. 755–759.
2. Шерклиф Д. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
3. Васильев В. Ф., Лаврентьев И. В. Продольная краевая задача о распределении электрических полей в МГД-каналах с проводящими стенками. Магнитная гидродинамика, 1970, № 2.
4. Баранов Г. А., Васильев В. Ф., Глухих В. А., Каравас Б. Г., Кириллов И. Р., Лаврентьев И. В. Экспериментальные исследования жидкокометаллических МГД-генераторов. Electricity from MHD. Vienna, 1968, vol. 3.