

2. Иванов В. Н., Леонов В. В. и др. Исследование процесса криооткачки  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2$  в молекулярно-вязкостном режиме // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника высокого вакуума.— 1977.— Вып. 2(8).
3. Сороковой Л. Г., Скибенко Е. И. и др. Некоторые физические основы конденсационной откачки в форвакуумной области давлений // Там же.
4. Великанов Е. Г., Ребров А. К. Некоторые вопросы конденсации газового потока низкой плотности на холодных поверхностях // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1970.— № 13, вып. 3.
5. Великанов Е. Г., Куликов В. П., Тимошенко Н. И. Криогенно-вакуумные сотовые насосы в условиях переходного режима // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общая и ядерная физика.— 1978.— Вып. 4(4).
6. Батраков В. П., Кравченко В. А., Волков Ю. Н. Криооткачка с помощью жидкого неона в диапазоне  $10^5 \dots 10^{-1}$  Па // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общая и ядерная физика.— 1982.— Вып. 3(21).
7. Сайдадь Г. И., Жебровский А. К., Куприянов В. И. Быстрота действия криопанели с учетом переменной толщины криосадка при откачке углекислого газа криоконденсационным форвакуумным насосом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общая и ядерная физика.— 1985.— Вып. 1(30).
8. Davey G. Cryopumping in the transition and continuum pressure region // Vacuum.— 1976.— V. 26, N 1.
9. Bland M. E. The cryopumping of water vapour in the continuum pressure region // Cryogenics.— 1975.— N 11.
10. Nord J. Condensation of dry air on a liquid hydrogen cooled surface in the pressure range  $10^{-3}$  to 10 torr (Knudsen number of  $10^{-4}$  to 1) // Cryogenics.— 1966.— V. 6, N 5.
11. Tzemos C., Gegenheimer M., Hood C. Design and performance of a liquid helium cryopump operating in the viscous flow regime // Adv. Cryog. Engng.— 1986.— V. 31.— P. 575.

Поступила 7/IV 1987 г.

УДК 532.529

## ТЕПЛОБМЕН И ТРЕНИЕ В ДВУХФАЗНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ

А. М. Гришин, В. И. Забарин  
(Томск)

Течение в двухфазном пограничном слое в условиях скоростной неравновесности без теплообмена рассматривалось в [1—3], а при наличии скоростной и температурной неравновесности и теплообмена — в [4, 5].

В данной работе получены численные и приближенные аналитические решения задачи о двухфазном ламинарном пограничном слое на пластине со сжимаемой несущей фазой в условиях скоростной и температурной неравновесности при наличии теплообмена с поверхностью в дозвуковом режиме течения.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение газозвеси частиц в пограничном слое около пластины, установленной параллельно невозмущенному потоку. Предположим, что объемная доля химически инертных сферических частиц мала, локальные характеристики течения незначительно отличаются от среднеобъемных, физическая плотность частиц намного больше плотности несущей фазы, а броуновское движение частиц несущественно. Тогда при малых числах Маха течение газозвеси описывается системой уравнений в безразмерной форме [1, 3]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rho_s u_s + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_s v_s) = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - f_{s,x}, \quad \rho \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - q_s, \quad \rho = \frac{1}{T}, \\ \rho_s \frac{d_s u_s}{dt} &= f_{s,x}, \quad \rho_s \frac{d_s v_s}{dt} = f_{s,y}, \quad \rho_s \frac{d_s T_s}{dt} = q_s, \\ \frac{d}{dt} &= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{d_s}{dt} = u_s \frac{\partial}{\partial x} + v_s \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Здесь  $x = x'/L$ ,  $y = y'/(L \text{Re}^{1/2})$  — безразмерные координаты (ось  $x$  направлена вдоль пластины, а ось  $y$  — по нормали к ней);  $u = u'/u'_\infty$ .

$v = v'(u'_\infty \text{Re}^{1/2})$  — безразмерные компоненты вектора скорости  $v$  по направлениям  $x$  и  $y$  соответственно;  $\text{Re} = \rho'_\infty u'_\infty L / \mu'_\infty$  — число Рейнольдса;  $L$  — характерный размер (будет выбран далее);  $\rho = \rho' / \rho'_\infty$ ,  $T = T' / T'_\infty$ ,  $\mu = \mu' / \mu'_\infty$  — безразмерные плотность, температура и коэффициент вязкости газа;  $f_s = \rho_s (c_D / c_{D0}) (v - v_s) / \sigma_v$ ,  $q_s = \rho_s (c_s / c_p) (\text{Nu} / \text{Nu}_0) (T - T_s) / \sigma_T$  — безразмерные межфазные сила взаимодействия и тепловой поток;  $\sigma_v = \tau_v u'_\infty / L$ ,  $\sigma_T = 1,5 \text{Pr} (c_s / c_p) \sigma_v$  — числа Стокса динамического и теплового взаимодействия фаз;  $\tau_v = \rho_s^0 d_s^2 / 18 \mu'$  — характерное время релаксации скорости частиц;  $\text{Pr} = \mu' c_p / \lambda$  — число Прандтля газовой фазы;  $d_s$ ,  $\rho_s^0$  — диаметр, физическая плотность частиц;  $c_D$ ,  $\text{Nu}$  — коэффициенты сопротивления и теплообмена частиц;  $c_{D0} = 24 / \text{Re}_s$ ,  $\text{Nu}_0 = 2$  — значения этих коэффициентов для стоксовского режима течения;  $\text{Re}_s = \rho'_\infty |v' - v'_s| d_s / \mu'$  — число Рейнольдса частицы;  $c_p$ ,  $c_s$  — теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении и теплоемкость частиц; индексы  $s$ ,  $\infty$  и штрих относятся к параметрам частиц, к невозмущенным и к размерным параметрам.

Граничные и начальные условия имеют вид

$$(1.2) \quad u(x, \infty) = 1, u_s(x, \infty) = 1, \rho_s(x, \infty) = \rho_{s\infty}, \\ T(x, \infty) = 1, T_s(x, \infty) = 1;$$

$$(1.3) \quad dv_{se} / dx = (v_e - v_{se}) / \sigma_{ve};$$

$$(1.4) \quad u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, T(x, 0) = T_w(x);$$

$$(1.5) \quad \rho_s(0, 0) = \rho_{s\infty}, u_s(0, 0) = 1, v_s(0, 0) = 0, T_s(0, 0) = 1,$$

где  $T_w(x)$  — заданная безразмерная температура поверхности; индексы  $w$  и  $e$  соответствуют параметрам на поверхности пластины и на внешней границе пограничного слоя. Продольная компонента скорости и температура несущей фазы в начальном сечении определяются из автомодельных в переменных Дородницына — Лиза уравнений, следующих из системы (1.1) при  $x \rightarrow 0$ . Граничное условие (1.3) для поперечной компоненты скорости частиц  $v_s$  на внешней границе пограничного слоя отражает эффект взаимодействия внешнего невязкого течения с пограничным слоем через компоненту скорости  $v_s$ . Это условие является дополнительным уравнением, которое нужно решать совместно с системой (1.1), так как в него входит неизвестная до решения задачи функция  $v(x, y)$ . Условие (1.3) получено из уравнений [6] для газозвеси при больших числах Рейнольдса методом сращиваемых асимптотических разложений [7].

**2. О методике численного решения задачи.** Из вида системы уравнений (1.1) и краевых условий (1.2)–(1.5) следует, что решение в безразмерном виде зависит от семи безразмерных параметров:  $\rho_{s\infty}$ ,  $c_s / c_p$ ,  $\sigma_{ve}$ ,  $\text{Re}_{s\infty}$ ,  $T_w$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\omega$  ( $\text{Re}_{s\infty} = \rho'_\infty u'_\infty d_s / \mu'$ ,  $\omega$  — показатель степени в степенной зависимости вязкости от температуры). Первые четыре из них обусловлены присутствием дисперсной фазы. Наличие частиц в газе существенно усложняет исследование задачи (1.1)–(1.5) известными аналитическими методами, особенно в области релаксации скоростей и температур фаз. Поэтому решение находилось численно на ЭВМ. При этом уравнения для несущей фазы решались методом [8] с порядком аппроксимации  $O(\Delta x^2, \Delta y^4)$ , а уравнения для дисперсной фазы — вдоль траекторий частиц методом Эйлера с коррекцией, имеющим второй порядок аппроксимации. Кроме того, проводились итерации до согласования значений фаз с высокой степенью точности.

При расчетах характерный размер  $L$  по  $x$  выбирался равным длине релаксации скорости частиц на внешней границе пограничного слоя,  $L = \tau_v u'_\infty$ . Для коэффициента вязкости принята степенная зависимость от температуры с показателем  $\omega = 0,645$ , что отвечает табличным данным для воздуха с погрешностью около 6% в диапазоне температур от 300 до 2000 К. Число Прандтля полагалось равным 0,72. Коэффициенты

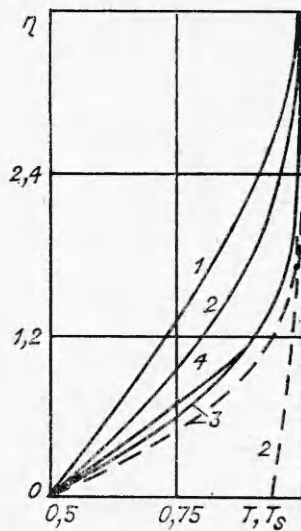


Рис. 1

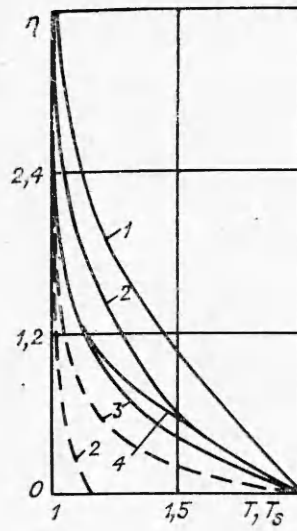


Рис. 2

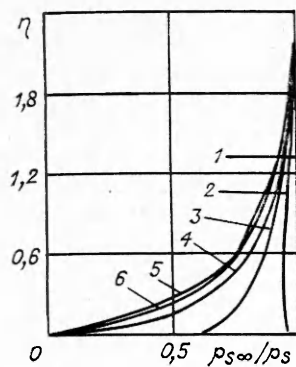
теплоемкостей фаз для простоты считались постоянными. Коэффициенты сопротивления и теплообмена одиночной частицы вычислялись по аппроксимационным зависимостям [9, 10]

$$(2.1) \quad c_D = 1 + 1/6(\text{Re}_{s\infty}|u - u_s|)^{2/3},$$

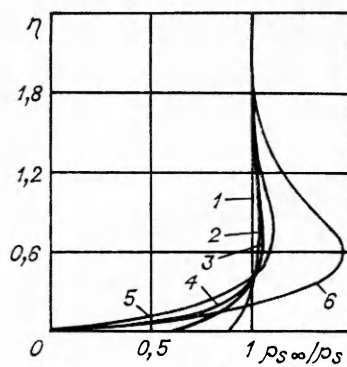
$$\text{Nu} = 2 + 0,46 \text{Pr}^{1/3}(\text{Re}_{s\infty}|u - u_s|)^{0,55}.$$

**3. Обсуждение результатов численного решения.** Структура пограничного слоя для случая отсутствия теплообмена исследована в [2]. При теплообмене с поверхностью есть некоторые особенности поведения профилей скорости, которые определяются температурой поверхности. В пограничном слое в окрестности передней критической точки имеется существенное рассогласование скоростей и температур фаз, которое уменьшается по мере увеличения координаты  $x$ . На основании анализа численных результатов в пограничном слое можно выделить две области: область релаксации скоростей и температур, расположенную при  $0 \leq x \leq 2x_s$  ( $x_s$  — точка остановки частиц на поверхности пластины); область почти равновесного (по терминологии [6]) течения, где продольные компоненты скорости и температуры фаз близки друг к другу.

На рис. 1 изображены профили температуры фаз для охлажденной поверхности пластины при  $T_w = 0,5$ ,  $\rho_{s\infty} = 3$ ,  $c_s/c_p = 1$  в сечениях  $x = 0; 0,2; 2; 10$  (кривые 1—4), штриховые линии относятся к температуре дисперсной фазы, сплошные — к температуре несущей фазы. Если не оговаривается особо, то коэффициенты сопротивления и теплообмена частиц брались для простоты стоксовскими, т. е.  $c_D = 1$ ,  $\text{Nu} = 2$ . Удобно решать задачу (1.1)—(1.5) в переменных Дородницына — Лиза  $x, \eta$ , где  $\eta = \int_0^y \rho dy / \sqrt{2x}$ , так как по условиям задачи решение начинается с автомодельного, а предельное решение при  $x \rightarrow \infty$  также автомодельное в этих переменных. Из анализа рис. 1 вытекает, что при  $T_w < 1$ , когда температура поверхности меньше температуры невозмущенного потока, частицы, попадающие в пограничный слой из невозмущенного внешнего течения, с увеличением координаты  $x$  подогревают несущую фазу, а сами при этом охлаждаются. Интересно отметить, что торможение частиц и, следовательно, увеличение плотности  $\rho_s$  дисперсной фазы в окрестности точки торможения частиц  $x_s$  приводят к наиболее интенсивному теплообмену фаз. Поэтому температура несущей фазы при фиксированном  $\eta$  принимает максимальное значение в окрестности  $x_s$  (сплошная кривая 3). При дальнейшем увеличении  $x$  различие температур фаз уменьшается и профили при-



Р и с. 3



Р и с. 4

ближаются к предельному равновесному решению, которое соответствует отсутствию температурного и скоростного скольжения фаз (сплошная и штриховая кривые 4 совпадают).

Для нагретой поверхности пластины ( $T_w > 1$ ), наоборот, частицы, попадающие в пограничный слой, охлаждают несущую фазу, а сами при этом нагреваются. На рис. 2 приведены профили температур, рассчитанные при  $T_w = 2$  в сечениях  $x = 0; 0,1; 0,7; 10$  (линии 1—4), остальные параметры такие же, как для рис. 1. Из рис. 2 видно, что температура частиц с увеличением координаты  $x$  монотонно возрастает (штриховые кривые), а температура несущей фазы при фиксированном  $\eta$  сначала повышается, а затем уменьшается с увеличением  $x$ . Максимальное значение температура газа при  $\eta = \text{const}$  принимает в окрестности  $x_s$ , т. е. в окрестности наиболее интенсивного теплообмена фаз. Релаксация профилей температур (как и профилей скорости) происходит быстрее в случае нагретой поверхности пластины, так как коэффициент межфазного теплообмена пропорционален  $T^\infty$ . Существенным образом влияет температура поверхности пластины на поведение плотности дисперсной фазы в пограничном слое.

На рис. 3 изображены профили  $\rho_{s\infty}/\rho_s$  для «холодной» поверхности пластины  $T_w = 0,5$  в сечениях пограничного слоя  $x = 0; 0,4; 1; 1,6; 3; 10$  (соответственно кривые 1—6), а на рис. 4 — аналогичные профили в пограничном слое на «нагретой» поверхности пластины ( $T_w = 2$ ) в сечениях  $x = 0; 0,2; 0,4; 0,7; 1,4; 8$ . Остальные параметры имеют такие же значения, как для предыдущих рисунков. Для «холодной» поверхности пластины вблизи передней кромки профиль плотности имеет максимум внутри пограничного слоя (кривая 2, рис. 3) из-за влияния вытесняющего эффекта пограничного слоя передней кромки. На сильно охлажденной пластине этот эффект вблизи поверхности преобладает над торможением частиц, и поэтому вблизи поверхности плотность дисперсной фазы может быть меньше, чем в набегающем потоке. При дальнейшем увеличении  $x$  в результате преобладающего эффекта торможения частиц формируется профиль плотности  $\rho_s$  с максимумом на поверхности пластины (кривая 3, рис. 3). Начиная с точки  $x = x_s$ , плотность обращается в бесконечность при  $\eta = 0$ , причем при  $\eta \rightarrow 0$   $\rho_s \sim O(\eta^{-1})$  (см. п. 4).

На нагретой поверхности пластины из-за преобладающего влияния торможения над вытеснением вблизи поверхности профиль  $\rho_s$  имеет максимум на поверхности. Интересно отметить, что во внешней части пограничного слоя с увеличением  $x$  формируется профиль плотности дисперсной фазы, подобный профилю плотности несущей фазы, характерный для равновесного течения фаз (см. п. 5), т. е. при умеренных и больших  $\eta$  для  $T_w < 1$   $\rho_s > \rho_{s\infty}$ , а для  $T_w > 1$  получаем  $\rho_s < \rho_{s\infty}$ . Вблизи же поверхности определяющее влияние на формирование профиля  $\rho_s$  оказывают эффекты торможения и вытеснения. В связи с этим для сильно охлажденной поверхности профиль плотности может иметь сложное немонотонное поведение.

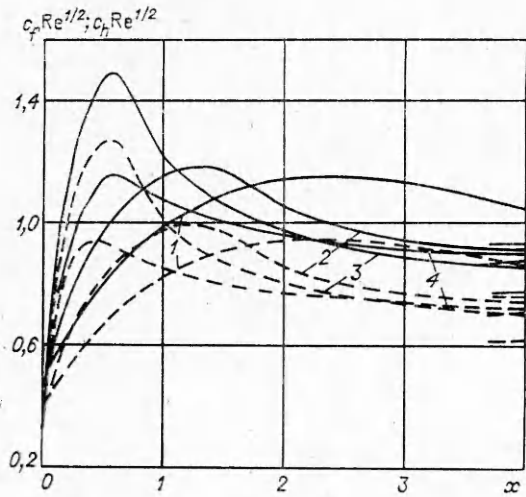


Рис. 5

Кривые 1—3 отвечают  $T_w = 0,1; 0,5$  и  $2$ , остальные параметры такие же, как для предыдущих рисунков. Примечательной чертой поведения  $c_h, c_f$  является наличие максимума в окрестности точки торможения  $x_s$  частиц, летящих вдоль поверхности. Причина этого эффекта — максимальное возрастание среднеинтегральной (по толщине пограничного слоя) плотности  $\rho_s$  в окрестности  $x_s$  за счет торможения частиц. Из графиков видно, что начальные и предельные при  $x \rightarrow \infty$  значения уменьшаются с повышением  $T_w$ , а максимальные значения коэффициентов, наоборот, увеличиваются. Первый эффект хорошо известен в теории пограничного слоя [11] и отражает влияние зависимости вязкости от температуры, второй, по-видимому, вызывается двумя причинами: увеличением плотности  $\rho_s$  и более интенсивным теплообменом между фазами. С повышением температуры поверхности максимум  $c_h, c_f$  сдвигается к передней кромке и протяженность зоны релаксации частиц сокращается. При  $T_w \geq 0,5$  координата  $x_{\max}$ , соответствующая максимуму  $c_h, c_f$ , примерно равна координате торможения частиц  $x_{\max} \approx 0,9/T_w^0$ , а при «очень холодной» поверхности ( $T_w < 0,5$ )  $x_{\max} \approx 0,5/T_w^0$ . Для приведенных на рис. 5 кривых удовлетворительно выполняется аналогия Рейнольдса, справедливая для однофазового течения на пластине [11]:  $c_h = c_f \text{Pr}^{-2/3}$ . Заметим, что уравнения (1.1) не допускают интеграла Крокко, справедливого во всей области течения. Можно лишь говорить о приближенном выполнении соотношений типа интеграла Крокко при  $\text{Pr} \approx 0,83, c_s/c_p \approx 0,8$ :

$$(3.1) \quad T_w = T_w + (1 - T_w)u, \quad T_s = T_{sw} + (1 - T_{sw})u_s.$$

Влияние реальных законов сопротивления и теплообмена частиц (2.1) на трение и теплообмен в пограничном слое иллюстрируют кривые 4 на рис. 5, которые отвечают безразмерной температуре поверхности  $T_w = 0,5$  и параметру  $\text{Re}_{s\infty} = 10$ . Увеличение  $\text{Re}_{s\infty}$  соответствует росту размера частиц и времени релаксации скорости (температуры) частиц. С повышением  $\text{Re}_{s\infty}$  (ср. с кривой 2, полученной при  $\text{Re}_{s\infty} = 0$ ) происходят более интенсивное торможение и теплообмен частиц — максимумы  $c_f, c_h$  сдвигаются к передней кромке пластины и несколько уменьшаются.

На рис. 6 приведены коэффициенты теплопередачи при различных соотношениях теплоемкостей фаз  $c_s/c_p$  и плотности дисперсной фазы в набегающем потоке. Кривые 1, 2 соответствуют  $c_s/c_p = 1/3$  и 3 при  $T_w = 0,5$ , 3, 4 — аналогичным значениям  $c_s/c_p$  при «нагретой» поверхности пластины ( $T_w = 2$ ). Видно, что как для «холодной», так и для «нагретой» поверхности пластины коэффициент теплопередачи  $c_h$  зависит от отношения теплоемкостей фаз: при увеличении безразмерной теплоемкости частиц в 10 раз максимум коэффициента теплообмена увеличивается пример-

Представляет интерес рассмотреть влияние температуры поверхности на поведение коэффициентов теплопередачи и трения на поверхности пластины. На рис. 5 нанесены коэффициенты теплопередачи  $c_h \text{Re}^{1/2}$  и трения  $c_f \text{Re}^{1/2}$  сплошными и штриховыми линиями соответственно, где

$$c_h = \frac{\lambda_w \left. \frac{\partial T'}{\partial y'} \right|_{y'=0}}{\rho_\infty u_\infty c_p (T'_\infty - T'_w)},$$

$$c_f = \frac{\mu_w \left. \frac{\partial u'}{\partial y'} \right|_{y'=0}}{\rho_\infty u_\infty^2}.$$

но в 2 раза, координата максимума  $c_h$  сдвигается вниз по потоку в 2,5 — 2,7 раз. Заметим, что коэффициент теплообмена более чувствителен к изменению теплоемкостей фаз для нагретой поверхности пластины. В результате расчетов оказалось, что коэффициенты трения (а значит, и профили скорости) слабо зависят от соотношения теплоемкостей фаз (штриховые кривые 1, 2 и 3, 4 на рис. 6).

Рост плотности дисперсной фазы в набегающем потоке приводит к существенному увеличению коэффициентов теплопередачи и трения. Так, для  $T_w = 0,5$ ,  $\rho_{s\infty} = 3$ ,  $c_s/c_p = 3$  (кривые 5 на рис. 6) максимумы коэффициентов теплообмена и трения возрастают примерно в 1,7 раза по сравнению со случаем  $\rho_{s\infty} = 1$ .

**4. Асимптотическое решение для дисперсной фазы вблизи поверхности пластины.** Выберем в качестве характерного размера  $L$  длину релаксации скорости частиц на внешней границе пограничного слоя. Здесь и ниже будем считать для простоты  $T_w = \text{const}$ . Удобно далее находить решение в четырех областях, в каждой из которых решение обладает характерными особенностями и представляется в более простом виде.

Пусть  $\varepsilon$  — малый параметр, расстояние от пробной траектории частицы до пластины при  $x = 0$ . Асимптотическое решение для частицы системы уравнений (1.1) в области 1 при  $x \sim O(\varepsilon^2)$ ,  $y \sim O(\varepsilon)$  представляется в виде

$$(4.1) \quad u_s = 1 + O(\varepsilon^2), \quad v_s = \varepsilon [v_{s0}(\bar{x}) + O(\varepsilon^2)], \\ T_s = 1 + O(\varepsilon^2), \quad y_s = \varepsilon + \varepsilon^3 y_{s1}(\bar{x}) + \dots, \quad \bar{x} = x/\varepsilon^2.$$

При записи (4.1) существенно использовалось решение для несущей фазы в окрестности  $x = 0$ . Можно выписать приближенное решение (а при некоторых ограничениях и точное) для  $v_{s0}$ ,  $y_{s1}$  в (4.1), однако нас будет больше интересовать асимптотическое при  $x \rightarrow \infty$  поведение этих функций:

$$(4.2) \quad v_{s0} \sim C, \quad y_{s0} \sim C \bar{x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad C = [1 - u_*(1 - T_w)/T_*]/\sigma_{v*}, \quad C > 0$$

( $u_*$ ,  $T_*$ ,  $\sigma_{v*}$  — средние значения соответствующих функций поперек пограничного слоя). Из (4.1) вытекает, что область 1 частицы пролетают в первом приближении параллельно пластине, не меняя продольной компоненты скорости и приобретая поперечную компоненту скорости  $v_s \sim O(\varepsilon)$  за счет вытесняющего эффекта пограничного слоя передней кромки. Второй член в (4.1) для  $y_s$  необходим для срачивания с решением в следующей области.

Рассмотрим решение в области 2, для которой  $x \sim O(1)$ ,  $x < \sigma_{vw} - \varepsilon$ ,  $y \sim O(\varepsilon)$ . С точностью до главных членов имеем

$$(4.3) \quad u_s = C_0 - x/\sigma_{vw} + O(\varepsilon), \quad v_s = \varepsilon C_1 (C_0 - x/\sigma_{vw}) + O(\varepsilon^2), \\ T_s = T_w + (1 - T_w) C_0^{-\sigma_{vw}/\sigma_{Tw}} (C_0 - x/\sigma_{vw})^{\sigma_{vw}/\sigma_{Tw}} + O(\varepsilon), \\ y_s = \varepsilon (C_2 + C_1 x) + O(\varepsilon^2), \quad \rho_s = \rho_{s\infty} [(1 - x/\sigma_{vw})(1 + C_1 x)] + O(\varepsilon^2).$$

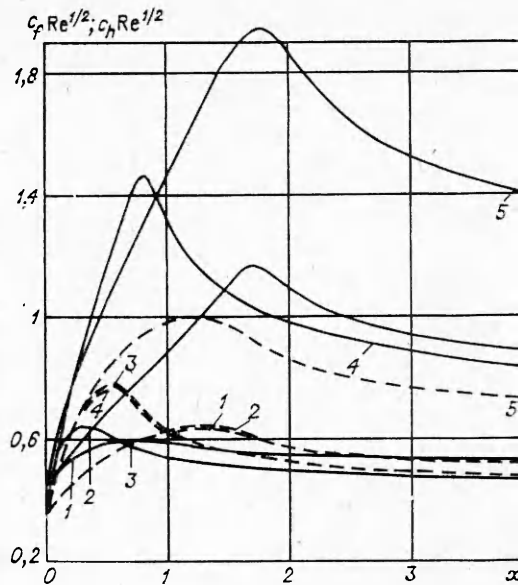


Рис. 6



Константы  $C_1, C_2$  из сращивания с решением в области 1 (4.1), (4.2) равны  $C_0 = 1, C_1 = C, C_2 = 1$ . Из вида и смысла полученного решения (4.3) заключаем, что частицы в области 2 вблизи поверхности движутся, как в покоящейся газе с начальными скоростями и начальной температурой, приобретенными в области 1. Траектории частиц — прямые линии, отклоняющиеся от поверхности. Поведение  $\rho_{sw}$ , согласно (4.3), определяется двумя сомножителями, первый из которых отвечает за эффект увеличения плотности в результате торможения частиц, а второй, наоборот, обеспечивает уменьшение плотности  $\rho_s$  за счет вытесняющего действия пограничного слоя передней кромки. Последний эффект усиливается на «холодной» пластине согласно (4.3). Это же подтверждают численные результаты, приведенные на рис. 3 при  $T_w = 0,5$  (кривая 2). Из (4.3) следует, что, несмотря на особенность в поведении плотности  $\rho_s$  при  $x \rightarrow \sigma_{vw}$ , сила взаимодействия фаз  $f_{s,x}$  остается конечной, но межфазный теплоток  $q_s$  вблизи поверхности неограниченно возрастает при  $\sigma_{vw} < \sigma_{Tw}$ . Однако последняя особенность интегрируема по  $y$  при любых  $\sigma_{vw}/\sigma_{Tw} > 0$  и, как следует из анализа интегрального уравнения энергии, не приводит к особенности в поведении теплотокота от газовой фазы к поверхности. При численном решении необходимо интегрировать межфазный тепловой поток с учетом этой особенности.

Область 3 находится в окрестности точки торможения частиц, и для нее выполняется условие  $|x/\sigma_{vw} - 1| \sim O(\epsilon), y \sim O(\epsilon)$ . Решение в области 3 имеет буферную, т. е. промежуточную, структуру между решениями областей 2 и 4. Основным результатом, нужным далее, является решение для главного члена  $y_s, y_s \sim \epsilon C_3$ , где  $C_3 = C_2 + C_1 \sigma_{vw}$  — константа, найденная из сращивания с решением в области 2.

Последняя четвертая область лежит за точкой торможения частиц. В этой области  $x \sim O(1), x > \sigma_{vw} + \epsilon, y \sim O(\epsilon)$ . Решение для главных членов скорости дисперсной фазы совпадает с решением для несущей фазы:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} u_s &= \epsilon \tau y_{s0} \rho_w / \sqrt{2x} + \dots, \quad v_{s0} = \epsilon^2 \tau y_{s0}^2 \rho_w / 2 (2x)^{3/2} + \dots, \\ T_s &= T_w + \epsilon q y_{s0} \rho_w / \sqrt{2x} + \dots, \quad y = \epsilon y_{s0}(x) + \dots, \\ y_{s0}(x) &= C_4 x^{1/4}, \quad \rho_s = \epsilon^{-1} \rho_{s\infty} \sqrt{2x} / (\tau \rho_w y_{s0}^2) + \dots \end{aligned}$$

Из сращивания с решением для  $y_s$  в области 3 получаем  $C_4 = C_3 \sigma_{vw}^{-1/4}$ . Из (3.1) заключаем, что в области 4 есть особенность вблизи поверхности типа  $1/y$ . Однако, несмотря на особенность в  $\rho_s$ , из (4.4) следует, что межфазная сила взаимодействия  $f_{s,x}$  и тепловой поток  $q_s$  — величины порядка малости  $O(\epsilon)$ . В уравнениях несущей фазы (1.1) в области 4 наибольший порядок имеют вязкие члены  $O(\epsilon^{-1})$ , что соответствует отсутствию влияния слоя с  $\rho_s \rightarrow \infty$  на решение для газовой фазы и непрерывному продолжению последнего в область 4 из внешней области (при  $y \sim O(1)$ ).

**5. Асимптотическое решение при малых числах Стокса.** Так как число Стокса — функция температуры, то здесь будем говорить о характерном числе Стокса  $\sigma$  в качестве которого можно выбирать  $\sigma = \sigma_{vw}$ . В данном разделе считаем, что характерная длина  $L$  не зависит от  $\sigma$ . Представляет интерес случай малых чисел Стокса, который возникает, когда характерный размер по  $x$  намного больше длины релаксации скорости частиц. Заметим, что преобразование переменных

$$(5.1) \quad x_1 = x/\sigma, \quad y_1 = y/\sigma^{1/2}, \quad v_1 = v\sigma^{1/2}, \quad v_{s1} = v_s\sigma^{1/2}$$

приводит уравнения пограничного слоя (1.1) к таким же, но с числом Стокса, равным единице, и не меняет граничных условий (при  $v_w = 0$ ). Отсюда, в частности, следует подобие решения в пограничном слое при числе Стокса, равном единице, при больших координатах  $x$  и решения при малом числе Стокса при координате  $x \sim O(1)$  в соответствии с (5.1).

Из вида уравнений (1.1) с малым параметром  $\sigma$  удобно разбить всю область течения в пограничном слое на три области: 1 — пограничный

слой при  $x \sim O(\sigma)$ ; 2 — пограничный слой при  $x \sim O(1)$ ,  $y \sim O(1)$ , частицы в область 2 попадают из невозмущенной области течения; 3 — подслой при  $x \sim O(1)$ ,  $y \sim \varphi(\sigma)$ ,  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(\sigma) \rightarrow \infty$  ( $\varphi(\sigma)$  необходимо определить), причем частицы в область 3 попадают из области 1.

Рассмотрим решение в области 1. Преобразование переменных (5.1) приводит уравнения (1.1) к таким же, но с числом Стокса, равным единице. Уравнения не упрощаются, их решение необходимо получать численно. В области 1 происходит существенное взаимодействие фаз, приводящее к релаксации скоростей и температур фаз к некоторым предельным решениям, которые передаются затем в область 3. Порядки переменных определяются из (5.1). Одной из особенностей решения в области 1 является неоднородный профиль дисперсной фазы даже при  $T_w = 1$  [2].

Рассмотрим далее уравнения (1.1) в области 2. Легко получить, что при  $\sigma \rightarrow 0$  в первом приближении скольжение скоростей и температур фаз отсутствует и решение удовлетворяет условиям течения «эффективного» газа с увеличенной постоянной плотностью  $(1 + \rho_{s\infty})$ . Поскольку характерный размер по  $x$  в данной области отсутствует, то решение находится из автомоделльной задачи

$$(5.2) \quad \frac{\partial}{\partial \eta_\Sigma} (l u_{\eta\Sigma}) + f_\Sigma u_{\eta\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_\Sigma} \left( \frac{l}{\text{Pr}_\Sigma} T_{\eta\Sigma} \right) + t_\Sigma T_{\eta\Sigma} = 0, \quad \rho_s/\rho = \rho_{s\infty}.$$

Здесь  $\eta_\Sigma = \sqrt{1 + \rho_{s\infty}} \eta$ ;  $f_\Sigma = \int_0^{\eta_\Sigma} u d\eta$ ;  $\text{Pr}_\Sigma = \text{Pr}(1 + \rho_{s\infty} c_s/c_p)/(1 + \rho_{s\infty})$ ;  $l = \mu\rho/\mu_e\rho_e$ . Граничные условия для системы уравнений (5.2), как следует из процедуры сращивания с решением в области 3, остаются прежними (1.2), (1.4). Заметим, что структура решения в областях 2,3 такова, что наличие тонкого подслоя 3 не возмущает решения для скорости и температуры в области 2. Поэтому трение и теплоток на стенке находятся из (5.2). Система (5.2) хорошо известна в теории пограничного слоя на пластине. Эффективное число Прандтля может существенно меняться в зависимости от  $\text{Pr}$ ,  $\rho_{s\infty}$  и  $c_s/c_p$ . Из уравнений (5.2), в частности, при  $c_s = c_p$  следует, что  $\text{Pr}_\Sigma = \text{Pr}$ , и тогда предельное решение при  $\sigma \rightarrow 0$  получается из решения исходной задачи (1.1)–(1.5) в передней критической точке преобразованием координаты  $\eta \rightarrow \eta_\Sigma$ . При этом коэффициенты теплопередачи и трения предельного решения выражаются в виде

$$(5.3) \quad c_h = \sqrt{1 + \rho_{s\infty} c_{h0}}, \quad c_f = \sqrt{1 + \rho_{s\infty} c_{f0}},$$

где  $c_{h0}$ ,  $c_{f0}$  — коэффициенты теплопередачи и трения при  $x = 0$ .

Необходимость введения подслоя 3 возникает в связи с образованием вблизи поверхности тонкой области с существенно неоднородной плотностью  $\rho_s$ . Как и в области 2, в 3 отсутствует скольжение скоростей и температур фаз в первом приближении. Скорость, температура определяются разложением решения (5.2) при малых  $y$ . А уравнением для плотности дисперсной фазы является  $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho_s = 0$ . Из этого уравнения в области 3 (малые координаты  $y$ ) получаем, что  $\rho_s$  сохраняется вдоль траекторий частиц

$$(5.4) \quad y_s = \theta(x\sigma)^{1/4}.$$

Порядок координаты  $y_s$  в (5.4) определен из условия сращивания с решением в области 1;  $\theta$  — константа сращивания. При  $T_w = 1$  из данных настоящего раздела следуют аналогичные результаты [2]. На рис. 1 штриховыми кривыми нанесены асимптотические решения (5.3) для коэффициентов трения и теплопередачи. На рис. 2 и 3 для кривых 6 (большие координаты  $x$  или малые числа Стокса) видно, что, за исключением



тонкой области вблизи поверхности, профили плотности  $\rho_s$  подобны профилям  $1/T$  согласно (5.2).

Полученные асимптотические решения подтверждают и дополняют численные результаты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Стулов В. П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 1.
2. Осипов А. Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 4.
3. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред.— М.: Энергоиздат, 1981.
4. Осипов А. Н. Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 5.
5. Пейгин С. В. Гиперзвуковой пространственный вязкий ударный слой в двухфазном потоке // ПММ.— 1984.— Вып. 2.
6. Марбл Ф. Динамика запыленных газов // Механика.— 1971.— № 6.
7. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
8. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратные формулы.— М.: Наука, 1964.
9. Волощук В. М. Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей.— Л.: Гидрометеониздат, 1971.
10. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1974.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1969.

Поступила 27/IV 1987 г.

УДК 621.01; 621.822.76

### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УИПЛА ГАЗОВОЙ СМАЗКИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ СЖИМАЕМОСТИ

А. Н. Бурмистров, В. П. Ковалев

(Жуковский)

Широкое применение в технике находят газодинамические опоры, позволяющие без специального наддува газа обеспечивать достаточную несущую способность. Поток газа через рабочий зазор создается путем профилирования части поверхности, прилегающей к одной из границ. Оставшаяся часть поверхности гладкая.

В предположении, что плотность канавок на профилированной части велика, при расчете можно пользоваться уравнением для осредненного давления [1]. Это уравнение в частных производных эллиптического типа, и для него ставится первая краевая задача. Однако решение обладает некоторыми свойствами, характерными для уравнений гиперболического типа, поскольку из физических соображений понятно, что расход должен в основном определяться профилированной частью.

Настоящая работа посвящена выяснению того, каким образом формируется поток газа через рабочий зазор и как влияют параметры канавок на распределение давления и нагрузки. Строится асимптотическое по параметру сжимаемости  $\Lambda$  ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ) решение. Расход газа в пределе при  $\Lambda \rightarrow \infty$  полностью определяется параметрами канавок на входной границе и имеет в изотермическом случае порядок  $\Lambda$ ; давление в профилированной области порядка единицы. На гладкой части давление порядка  $\Lambda^{1/2}$ . Приведено сравнение несущей способности, полученной из асимптотического решения, с определенной путем прямого численного решения исходной задачи для сферической опоры.

1. Рассматривается течение газа в тонком рабочем зазоре подшипника скольжения (рис. 1), внешняя поверхность которого вращается вокруг оси симметрии подшипника с угловой скоростью  $\omega$ . Стационарное уравнение для давления в тонком слое газа (уравнение Рейнольдса) при поли- тропическом процессе имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^{i1}} (q^{i1} \sqrt{g^i}) + \frac{\partial}{\partial x^{i2}} (q^{i2} \sqrt{g^i}) = 0,$$

$$q^{i1} = \frac{h'^i}{\sqrt{g_{ii}}} h' p^{1/k} - \frac{h'^3}{12\mu} p^{1/k} \frac{\partial p'}{\partial x^{ik}} g'^{ik}, \quad i, k = 1, 2$$