

Ю. А. Гостинцев, А. Д. Марголин
(Москва)

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ПОРОХА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ

В работе в пределах теории горения порохов Я. Б. Зельдовича [1, 2] рассмотрена задача о нестационарном горении пороха при наложении возмущения давления в виде ступеньки и треугольного импульса. Для решения нелинейного уравнения теплопроводности использован метод интегральных соотношений. Получена область погасания пороха в зависимости от интенсивности и длительности импульса давления.

1. Рассматривается горение пороха в полубесконечной области. Горящая поверхность неподвижна и располагается в начале координат. Топливо движется по оси x к началу координат со скоростью, равной скорости горения. При неизменном давлении p_0 и скорости горения u_0 в порохе устанавливается некоторое стационарное распределение температуры. Начиная с момента $t=0$, давление над поверхностью пороха меняется по некоторому известному закону.

Необходимо установить изменение температурного поля в порохе и скорости горения во время переходного режима.

Задача решается в пределах теории нестационарного горения порохов Я. Б. Зельдовича [1, 2] и описывается системой из трех уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u \frac{\partial T}{\partial x} \quad \begin{pmatrix} 0 \leq x < \infty \\ 0 \leq t < \infty \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$$T = T_s \text{ при } x = 0, \quad T = T_0 \text{ при } x \rightarrow \infty; \quad (1a)$$

$$T = T_0 + (T_s - T_0) e^{-\frac{u_0}{\kappa} x} \text{ при } t = 0; \quad (1b)$$

$$u = u \left[p, \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \right]; \quad u = u_0 \text{ при } t = 0; \quad (2)$$

$$p = p(t); \quad p = p_0 \text{ при } t = 0. \quad (3)$$

Здесь T_0 — начальная температура пороха; T_s — температура горячей поверхности; κ — коэффициент температуропроводности; $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$ — градиент на поверхности пороха.

Согласно теории Я. Б. Зельдовича [1, 2], скорость горения в нестационарном случае определяется давлением и градиентом температуры

на поверхности пороха. Для установления этой зависимости используется закон изменения стационарной скорости горения от начальной температуры прогрева топлива T_0 . Примем эту зависимость в виде

$$u = u_1 p^\nu \frac{1 + \alpha T_0}{1 + \beta T_0}, \quad (4)$$

где α и β — некоторые постоянные, зависящие от сорта топлива. С другой стороны, для градиента температуры на поверхности при стационарном горении имеем [1, 2]

$$\varphi = \frac{u}{x} (T_s - T_0). \quad (5)$$

Из (4) и (5) получим для нестационарной скорости горения выражение:

$$u = \frac{1}{2} \left[\frac{u_1 p^\nu (1 + \alpha T_s) + \beta x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}}{1 - \beta T_s} \right] \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha u_1 p^\nu x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}}{\left[\frac{u_1 p^\nu (1 + \alpha T_s) + \beta x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}}{1 - \beta T_s} \right]^2}} \right]. \quad (6)$$

2. Выбор температурной зависимости скорости горения в виде (4) обусловлен следующими соображениями.

Теория Я. Б. Зельдовича учитывает нестационарность прогретого слоя конденсированной фазы и дает критерий устойчивости горения. Для количественных расчетов нестационарного горения реального пороха нужно уточнить математическую модель горения и критерий устойчивости, чтобы учесть конкретные особенности горения данного вещества (реакции в конденсированной фазе, диспергирование, гетерогенные химические реакции и пр. [2—5]).

В теории Я. Б. Зельдовича [1, 2] критерий устойчивости горения имеет следующий вид:

$$1 - \left(\frac{\partial \ln u}{\partial T_0} \right)_p (T_s - T_0) > 0. \quad (7)$$

Для расчета нестационарного горения существенную роль играет зависимость стационарной скорости горения от начальной температуры пороха. Так, если $u = f(p) e^{\beta T_0}$ [2, 6], то при постоянном давлении скорость горения может изменяться по критерию Зельдовича не более чем в e (2,7) раз, т. е. $\frac{u_{\max}}{u_{\min}} = e$. Если $u = f(p) (1 + \alpha T_0)$ [7], то $\frac{u_{\max}}{u_{\min}} = 2$.

Если $u = f(p) \frac{1}{1 - \beta T_0}$ [8], то $\frac{u_{\max}}{u_{\min}} = \infty$, т. е. погасание не наступает.

Если $u = f(p) \frac{1 + \alpha T_0}{1 - \beta T_0}$, то в зависимости от значений коэффициентов α и β величина $\frac{u_{\max}}{u_{\min}}$ может быть любой от нуля до бесконечности и определяется соотношениями:

$$\frac{u_{\max}}{u_{\min}} = \frac{1 + \alpha T_s}{1 - \beta T_s} \frac{1 - \beta T_0'}{1 + \alpha T_0'};$$

$$-\frac{1 + \alpha T'_0}{1 - \beta T'_0} + \frac{(\alpha + \beta)(T_s - T'_0)}{(1 - \beta T'_0)^2} = 0,$$

где T'_0 — температура пороха, ниже которой стационарное горение невозможно. Коэффициенты α и β могут дать возможность точнее описать реальную зависимость скорости горения от начальной температуры. Приняв, например, $\alpha = 0,0004 \text{ 1}^\circ\text{K}$ и $\beta = 0,0014 \text{ 1}^\circ\text{K}$, что примерно соответствует данным [5] для пороха Н, получим $\min T_0 = T'_0 = -173^\circ\text{C}$ и $\frac{u_{\max}}{u_{\min}} = 8,5$ (принято $T_0 = 300^\circ\text{K}$ и $T_s = 600^\circ\text{K}$).

3. Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{\delta_0} = \frac{x}{z} u_0; \quad \tau = \frac{t}{t_0} = \frac{t}{z} u_0^2; \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0};$$

$$\omega = \frac{u}{u_0}; \quad \pi = \frac{p}{p_0}.$$

Здесь δ_0 и t_0 — характерные толщина и время прогретой зоны для стационарного горения. В этих переменных исходная система уравнений принимает вид:

$$\omega = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \alpha T_s}{1 + \alpha T_0} \frac{1 - \beta T_0}{1 - \beta T_s} \pi^2 + \frac{\beta(T_s - T_0)}{1 - \beta T_s} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right] \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha\pi^2 \frac{(T_s - T_0)(1 - \beta T_0)}{(1 - \beta T_s)(1 + \alpha T_0)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}}{\left[\pi^2 \frac{1 + \alpha T_s}{1 + \alpha T_0} \cdot \frac{1 - \beta T_0}{1 - \beta T_s} + \frac{\beta(T_s - T_0)}{1 - \beta T_s} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right]^2}} \right\}. \quad (8)$$

$$\pi = \pi(\tau), \quad \pi = 1 \text{ при } \tau = 0; \quad (9)$$

$$L(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \omega \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq \xi < \infty \\ 0 \leq \tau < \infty \end{array} \right) \quad (10)$$

$$0 = 1 \text{ при } \xi = 0, \quad \theta \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty \quad (10a)$$

$$\theta = e^{-\xi} \text{ при } \tau = 0. \quad (10b)$$

Критическое значение градиента температуры на поверхности, при котором осуществляется погасание пороха, соответствует моменту времени, когда подкоренное выражение в формуле (8) равно 0. В области, где горение возможно, подкоренное выражение положительно.

4. Для приближенного решения системы уравнений (8) — (10) используем метод интегральных соотношений, который в различных вариантах использовался в ряде работ [6, 8, 9, 10, 12]. Будем искать решение уравнения теплопроводности (10), удовлетворяющее условиям (10a) и (10b), в виде

$$\tilde{\theta}_2 = [1 - \psi_2(\tau)] e^{-\xi} + \psi_2(\tau) e^{-\xi/l_2(\tau)}, \quad (11)$$

где $\psi_2(\tau)$ и $l_2(\tau)$ — пока не определенные функции времени. Для определения этих функций составим два интегральных соотношения:

$$\int_0^{\infty} L(\tilde{\theta}) d\xi = 0, \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} L(\tilde{\theta}) e^{-\xi} d\xi = 0. \quad (13)$$

Первое из них — закон сохранения энергии в интегральном виде; во втором введена весовая функция $e^{-\xi}$, которая позволяет уточнить решение в наиболее существенной для данной задачи области прогретого слоя конденсированной фазы.

После преобразования (12) и (13) получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = 2 \left(\frac{l_2 + 1}{l_2 - 1} \right)^2 \left[\left(\frac{1 - \psi_2}{2} \right) (1 - \omega) - \frac{1}{(l_2 + 1)^2} \left(1 - \psi_2 + \frac{\psi_2}{l_2} - \omega \right) + \frac{\psi_2}{l_2(l_2 + 1)} (1 - \omega l_2) \right]; \quad (14)$$

$$\frac{dl_2}{d\tau} = \frac{1}{\psi_2} \left(1 - \psi_2 + \frac{\psi_2}{l_2} - \omega \right) + \frac{d\psi_2}{d\tau} \frac{1 - l_2}{\psi_2} \quad (15)$$

с начальными условиями $\psi_2 = 0$ и $l_2 = 0$ при $\tau = 0$.

Будем искать решение уравнений (8), (9), (14) и (15) вблизи точки $\tau = 0$ в виде обобщенных степенных рядов по времени

$$\psi_2 = a_0 \tau^m (1 + a_1 \tau + \dots);$$

$$l_2 = b_0 \tau^n (1 + b_1 \tau + \dots).$$

Для процессов со скачкообразным изменением давления при $\tau = 0$ получим следующие первые члены рядов

$$\psi_2 = (\omega_0 - 1)\tau; \quad (16)$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + k) \tau^{1/2}, \quad (17)$$

где ω_0 определяется по формуле (8) подстановкой $\pi = \pi_0$ и $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = -1$,

$$k = \frac{\left(\frac{\beta(T_s - T_0)}{1 - \beta T_s} \omega_0 + \frac{\alpha(T_s - T_0)(1 - \beta T_0)}{(1 - \beta T_s)(1 + \alpha T_0)} \pi_0 \right)}{\sqrt{\left(\frac{1 + \alpha T_s}{1 + \alpha T_0} \frac{1 - \beta T_0}{1 - \beta T_s} \pi_0 - \frac{\beta(T_s - T_0)}{1 - \beta T_s} \right)^2 - \frac{4\pi_0^2(T_s - T_0)(1 - \beta T_0)}{(1 - \beta T_s)(1 + \alpha T_0)}}}$$

Величина $l_2(\tau)$ в формуле (11) представляет собой характерную глубину слоя, в котором сказывается изменение условий над поверхностью горения. Зависимость $l_2 \sim \sqrt{\tau}$ (17) характерна для точных решений уравнения теплопроводности. Из формул (11), (16) и (17) найдем градиент температуры на поверхности для малых времен ($\tau \ll 1$)

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \cong -1 - \frac{a_0}{b_0} \tau^{1/2},$$

т. е. градиент в начальный момент времени равен -1 , как и должно было быть, а его производная по времени $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right] = -\frac{a_0}{2b_0\sqrt{\tau}} \rightarrow -\infty$. Рассмотрим поведение решения уравнений (8), (9), (14) и (15) при больших временах $\tau \rightarrow \infty$. Если давление над горячей поверхностью в конце переходного режима достигает некоторого постоянного значения π_∞ , то система имеет асимптотическое решение $\psi_2 = 1,0$, $l_2 = 1/\pi_\infty^v$ и $\omega = \pi_\infty^v$ при $\tau \rightarrow \infty$, представляющее собой точное решение задачи о стационарном горении пороха при давлении π_∞ .

5. Для получения численных результатов система уравнений (8), (9), (14) и (15) решалась на электронной счетной машине при числовых значениях параметров: $v=0,60$; $\alpha=0,0004$ 1°K ; $\beta=0,0014$ 1°K ; $T_s=600^\circ\text{K}$; $T_0=300^\circ\text{K}$. Вблизи нуля решение искалось аналитически в виде указанных выше рядов, а далее счет велся численно.

Для случая ступенчатого изменения давления

$$\pi = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau < 0 \\ 1 + \Delta & \text{при } \tau \geq 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Картина переходного процесса скорости горения (кривая 1) и градиента (кривая 2) представлена на рис. 1 ($\Delta=1,0$). Проведено решение задачи также для случая изменения давления во времени по закону

$$\pi = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau < 0 \\ 1 + \Delta(1 - \Omega\tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq \frac{1}{\Omega} \\ 1 & \text{при } \tau \geq \frac{1}{\Omega} \end{cases}. \quad (19)$$

Здесь Ω — величина, обратная длительности импульса давления. Изменение скорости горения (кривая 1) и градиента температуры на поверхности (кривая 2) в течение переходного процесса для частного случая $\Omega=1,5$ и $\Delta=0,5$ представлено на рис. 2 (кривая 3 — давление). Решение исходной системы уравнений при различных Ω и Δ позволило определить зону погасания пороха (рис. 3). Обращает на себя внимание наличие оптимального (с точки зрения погасания) значения длительности импульса давления.

При весьма медленном падении давления (малые Ω) гашение затрудняется тем, что тепловой слой успевает перестраиваться и горение происходит квазистационарно. Очень короткими импульсами (большие Ω) порох труднее погасить, так как за время прохождения импульса успевает измениться только небольшая часть прогретого слоя, и поэтому градиент температуры у поверхности не успевает достигнуть критической величины. Наилучшие условия для погасания пороха наступают, когда длительность импульса давления имеет такой же порядок, как и время тепловой релаксации прогретого слоя конденсированной фазы. На рис. 3

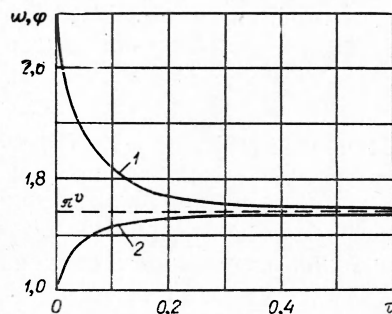


Рис. 1.

кривая 1 ограничивает область погасания, кривые 2, 3, 4 соответствуют погасанию в момент времени 0,9, 0,84 и 0,78 от длительности импульса.

Следует отметить, что для коротких импульсов ($\Omega \sim 10^2$) проведенное решение может даже качественно не соответствовать реальной картине явления, так как в этом случае нельзя считать квазистационарными процессы в газовой фазе и в реакционном слое конденсированной фазы, как принято в настоящей работе.

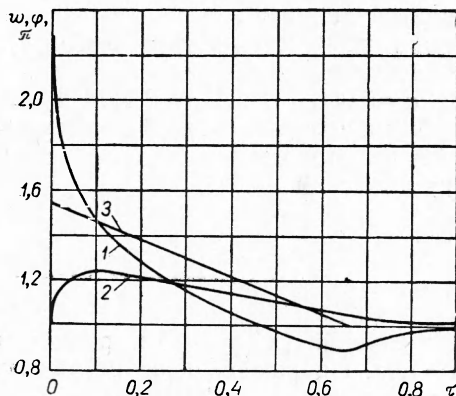


Рис. 2.

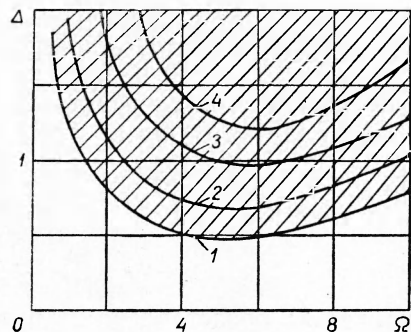


Рис. 3.

6. При применении метода интегральных соотношений важно удачно выбрать вид приближенного решения $\tilde{\Theta}$.

Сопоставим величину $\frac{d\omega}{d\tau}$, при $\tau \ll 1$, полученную приближенными методами при различных видах $\tilde{\Theta}$, с точным значением при малом скачке давления ($\pi=1$ при $\tau < 0$; $\pi = 1 - \Delta$ при $\tau \geq 0$; $\Delta \ll 1$). Точное значение $\frac{d\omega}{d\tau} = -f(\omega_0, \alpha, \beta) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tau^{-1/2}$ (здесь $f(\omega_0, \alpha, \beta)$ — известная величина, которая зависит от ω_0 и температурной зависимости стационарной скорости горения, а $\pi=3,14$).

При использовании одного интегрального соотношения, если

$$\tilde{\theta}_1 = (1 - \psi_1) e^{-\xi} + \psi_1 e^{-(1 + \Delta)^{\nu} \xi},$$

получается [10]

$$\frac{d\omega}{d\tau} = f(\omega_0, \alpha, \beta) \omega_0 (\omega_0 - 1) = \text{const} \text{ при } \tau \rightarrow +0.$$

Решение, полученное в настоящей работе, дает

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -f(\omega_0, \alpha, \beta) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \tau^{-1/2}. \quad (20)$$

Видно, что формула (20) отличается от точного решения (при $\tau \ll 1$) только постоянным множителем порядка единицы. Уточнение решения, проведенного в данной работе, можно получить, используя интегральные соотношения более высоких порядков.

Поступила в редакцию
24/II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, 12, 11—12.
 2. Я. Б. Зельдович. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1964, 3.
 3. П. Ф. Похил. Сб. «Физика взрыва», 1953, № 2; 1954, № 3.
 4. А. Д. Марголин. Докл. АН СССР, 1961, 141, 5.
 5. П. Ф. Похил, О. И. Нефедова, А. Д. Марголин. Докл. АН СССР, 1962, 145, 4.
 6. А. Г. Истратов, В. Г. Либрович, Б. В. Новожилов. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1964, 3.
 7. Б. В. Новожилов. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1962, 5.
 8. Ю. А. Гостинцев, А. Д. Марголин. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1962, 5.
 9. K. Rohlhausen. Z. angew. Math. und Mech., 1921, 1.
 10. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физ.-матгиз, 1962.
 11. Г. И. Баренблатт. ПММ, 1962, 26, 1.
 12. А. А. Дородницын. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1960, 3.
-