УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХМЕРНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

К. Аземи, Х. Ашрафи*, М. Шарият**

Исламский университет Азад, Тегеран, Иран
* Кашанский университет, Кашан, Иран
** Технологический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран
E-mails: kamiran64@yahoo.com, hashrafi@kashanu.ac.ir, m_shariyat@yahoo.com

С использованием трехмерной теории упругости исследуются статическая задача и задача о свободных колебаниях пластины с круговым отверстием из функционально-градиентного материала, в котором объемная доля компонентов непрерывно меняется по толщине пластины. Эффективные свойства функционально-градиентного материала определяются методом осреднения Мори — Танака. Задача решается с использованием энергетической формулировки метода Рэлея — Ритца. Исследуется влияние объемных долей компонентов материала и размера отверстия пластины на ее поведение при одномерном растяжении. Вычислены собственные частоты защемленных пластин с круговым отверстием. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: трехмерная теория упругости, метод градиентных конечных элементов, пластина с круговым отверстием, функционально-градиентный материал, энергетический метод Рэлея — Ритца, свободные колебания.

DOI: 10.15372/PMTF20160413

Введение. Функционально-градиентные материалы (ФГМ) представляют собой новое поколение современных композитных материалов, в которых объемные доли компонентов на макроскопическом уровне непрерывно изменяются по различным направлениям. ФГМ имеют ряд преимуществ по сравнению со слоистыми композитами: в таких материалах исключается возможность расслаивания, уменьшаются температурные и остаточные напряжения, уменьшается концентрация напряжений вследствие отсутствия границ между областями с различными свойствами [1]. Основным недостатком слоистых композитов является возможность их расслаивания по границам между слоями. Нарушение сцепления между матрицей и волокнами в слоистых композитах может привести к появлению больших температурных напряжений.

© Аземи К., Ашрафи Х., Шарият М., 2016

Поскольку ФГМ имеют высокую прочность, они широко используются при изготовлении различных конструкций. Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния и свободных колебаний пластин из ФГМ при различных механических нагрузках является актуальной задачей.

В пластинах из ФГМ свойства материала, как правило, изменяются по ее толщине. В последнее время во многих работах задачи о деформировании пластин из ФГМ решаются на основе уравнений трехмерной теории упругости [2–6]. Аналитические методы могут быть использованы для решения задач о деформировании конструкций из ФГМ только простой геометрии и при частных видах нагрузок, действующих на конструкцию. В большинстве случаев необходимо использовать численные методы решения. Наиболее широко при численном решении используется метод конечных элементов. В работах [7, 8] построены конечные элементы на основе теории пластин с учетом деформации сдвига. В [9–16] задачи о деформировании пластин из ФГМ решаются с использованием теории пластин. В [17, 18] решения задачи о деформировании пластин из ФГМ при различных видах нагружения, полученные с использованием градиентных изопараметрических конечных элементов, сравниваются с решениями, полученными с использованием однородных конечных элементов.

В работах [19–26] с помощью градиентных конечных элементов решены задачи о деформировании неоднородных конструкций. Установлено, что использование традиционных однородных конечных элементов приводит к решениям, в которых поле напряжений имеет разрывы в направлении, перпендикулярном направлению, по которому изменяются свойства материала. Применение градиентных конечных элементов приводит к решениям с плавно меняющимися непрерывными полями напряжений. Однако в случае, когда направление действующей нагрузки совпадает с направлением, в котором изменяются свойства материала, использование градиентных конечных элементов приводит к решениям, в которых напряжения имеют резкие скачки на границах конечных элементов. Применение в этом случае однородных конечных элементов приводит к решениям с непрерывным полем напряжений. Градиентные конечные элементы обладают рядом преимуществ по сравнению с однородными конечными элементами при их использовании для решения динамических задач и задач о распространении волн.

При использовании однородных конечных элементов для решения задач о деформировании конструкций из неоднородного материала границы конечных элементов являются границами раздела волн напряжений. На этих границах возникают искусственные волны отражений, которые приводят к увеличению амплитуды и скорости волн напряжений. Использование градиентных конечных элементов позволяет повысить точность численного решения без измельчения расчетной сетки.

При наличии в пластине вырезов (отверстий) в их окрестности происходит локализация напряжений. В работах [27–30] исследовалось напряженно-деформированное состояние пластины с круглым отверстием из однородного или ортотропного материала при ее одноосном растяжении. В работе [31] с использованием различных изопараметрических конечных элементов определялся коэффициент концентрации напряжений в окрестности кругового выреза в неоднородной пластине, в [32] — в окрестности кругового выреза в пластине из ФГМ при двухосном растяжении и сдвиге.

В [33] с использованием уравнений эластодинамики и метода изображений решена задача о многократном рассеянии упругих волн и определении динамических напряжений в полубесконечной пластине из ФГМ с круглой полостью. В [34] на основе теории многократного рассеяния упругих волн и метода разложения волновых функций изучались многократное рассеяние упругих волн и плотность энергии деформации в полубесконечных пластинах из ФГМ с круглой полостью. В [35] с помощью метода конечных

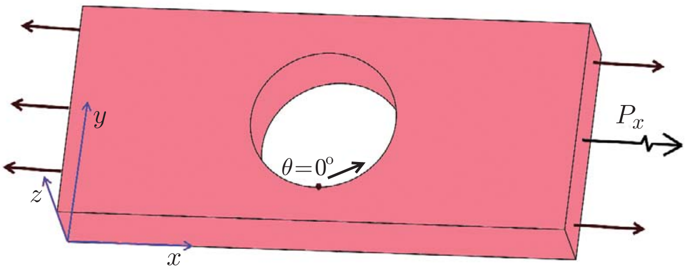

Рис. 1. Геометрия пластины из ФГМ

разностей исследовалось напряженно-деформированное состояние в бороэпоксидных ортотропных композитных пластинах с внутренним отверстием при одноосном растяжении. В [36] с использованием метода конечных элементов изучалось влияние температуры на свободные колебания прямоугольных неоднородных пластин с круговыми и некруговыми вырезами. В [37] с использованием теории функций комплексных переменных решена двумерная задача о напряженно-деформированном состоянии пластины с круговым отверстием из ФГМ (свойства материала пластины непрерывно менялись по радиусу) под действием произвольных постоянных нагрузок. При этом пластина из ФГМ моделировалась с помощью пластины, состоящей из кусочно-однородных слоев. В [38] точный и приближенный методы применялись для решеня задачи о концентрации напряжений в конструкции с клиньями из ФГМ. В указанных работах решались двумерные задачи о напряженно-деформированном состоянии в пластинах из ФГМ с круговым отверстием.

В настоящей работе решаются статическая задача о напряженно-деформированном состоянии и задача о свободных колебаниях пластины из ФГМ с круговым отверстием на основе трехмерной теории упругости с использованием трехмерных градиентных конечных элементов. Исследуется влияние на поля смещений и напряжений объемных долей компонентов материала и размера отверстия, вычисляются собственные частоты свободных колебаний.

1. Основные уравнения. Рассмотрим основные уравнения задачи.

1.1. *Функционально-градиентный материал и геометрия задачи.* Рассмотрим прямоугольную пластину из ФГМ длиной a, шириной b и толщиной h, где $0 < x \leqslant a$, $0 < y \leqslant b$, $0 < z \leqslant h$ (рис. 1). Пластина имеет центральное отверстие диаметром d и подвергается равномерному растяжению в направлении оси x силой, приложенной на торцах $x = 0$, $x = L$, другие границы пластины свободны (x, y, z являются осями декартовой системы координат).

Полагается, что пластина изготовлена из двух случайно распределенных изотропных материалов, свойства которых меняются только по ее толщине. Объемные доли керамики и металла определяются по формуле

$$V_c = 1 - (z/h)^n, \qquad V_m = 1 - V_c,$$

где n — неотрицательный показатель степени; нижние индексы c, m соответствуют керамике и металлу.

Для определения эффективных свойств в точке используется метод осреднения Мори — Танака. В соответствии с этим методом эффективный объемный модуль K и эффективный модуль сдвига G пластины из ФГМ находятся по формулам

$$\frac{K - K_c}{K_m - K_c} = \frac{V_m}{1 + (1 - V_m)(K_m - K_c)/(K_c + 4G_c/3)}; \tag{1}$$

$$\frac{G - G_c}{G_m - G_c} = \frac{V_m}{1 + (1 - V_m)(G_m - G_c)/(G_c + f_c)}, \tag{2}$$

где

$$f_c = \frac{G_c(9K_c + 8G_c)}{6(K_c + 2G_c)}. \tag{3}$$

Эффективные модуль упругости и коэффициент Пуассона равны

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \qquad \nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}.$$

Согласно распределениям (1)–(3) нижняя поверхность пластины из ФГМ является керамической, верхняя выполнена из чистого металла, различные объемные доли керамики и металла можно получить при различных значениях n. Эффективная плотность пластины из ФГМ определяется по правилу смесей.

1.2. *Уравнения движения.* При отсутствии объемных сил уравнения движения для прямоугольной пластины из ФГМ принимают вид

$$\sigma_{ij,j} = \rho(z)\ddot{u}_i,$$

где индексы i, j соответствуют координатам x, y, z; запятая обозначает частную производную по декартовым координатам; ρ — плотность, зависящая от координаты z.

1.3. *Соотношения между напряжением и деформациями.* В соответствии с линейным законом Гука соотношение между напряжением и деформациями запишем в матричной форме [39]

$$[\sigma_{ij}] = \boldsymbol{D}\,[\varepsilon_{ij}],$$

где

$$\boldsymbol{D} = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

модуль Юнга E меняется в направлении оси z, коэффициент Пуассона ν полагается постоянным.

1.4. *Соотношения между деформациями и перемещениями.* В случае бесконечно малой деформации зависимость между компонентами тензора деформации и перемещениями представим в матричной форме

$$[\varepsilon] = [d][q], \qquad [d] = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ (1/2)\,\partial/\partial y & (1/2)\,\partial/\partial x & 0 \\ 0 & (1/2)\,\partial/\partial z & (1/2)\,\partial/\partial y \\ (1/2)\,\partial/\partial z & 0 & (1/2)\,\partial/\partial x \end{pmatrix}, \qquad [q] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{5}$$

В случае пластины с защемленными торцами граничные условия имеют вид

$$u(x,y,z)\Big|_{\substack{y=0\\ y=b}} = 0, \qquad v(x,y,z)\Big|_{\substack{y=0\\ y=b}} = 0, \qquad w(x,y,z)\Big|_{\substack{y=0\\ y=b}} = 0,$$

$$u(x,y,z)\Big|_{\substack{x=0\\ x=a}} = 0, \qquad v(x,y,z)\Big|_{\substack{x=0\\ x=a}} = 0, \qquad w(x,y,z)\Big|_{\substack{x=0\\ x=a}} = 0.$$

2. Моделирование с помощью градиентных конечных элементов. Рассмотрим трехмерный восьмиузловой линейный элемент в форме параллелепипеда. В случае градиентных конечных элементов, в отличие от однородных конечных элементов, свойства материала входят в число степеней свободы рассматриваемого элемента. В соответствии с методом конечных элементов компоненты вектора перемещения q произвольной точки элемента выражаются через векторы узловых перемещений элементов с помощью функции формы матрицы N:

$$\boldsymbol{q}(\xi,\eta,\zeta) = \boldsymbol{N}(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{\delta}^{(e)}, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \{U_1, V_1, W_1, \dots, U_8, V_8, W_8\}^{\text{т}},$$

$$\boldsymbol{N}(\xi,\eta,\zeta) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}.$$

Компоненты матрицы формы можно записать в локальных координатах [40, 41]:

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = (1/8)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta),$$

где $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$, $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$. При использовании градиентных конечных элементов характеристики материалов выражаются через их узловые значения. Таким образом, выражения для модуля упругости E_i и плотности ρ_i в узле i принимают вид

$$E(\zeta) = \sum_{i=1}^{8} E_i N_i(\xi,\eta,\zeta) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\Xi}, \qquad \rho(\zeta) = \sum_{i=1}^{8} \rho_i N_i(\xi,\eta,\zeta) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\Theta},$$

где $\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\Theta}$ — соответственно векторы узловых значений модуля упругости и плотности:

$$\boldsymbol{\Xi} = (E_1, E_2, \dots, E_8)^{\text{т}}, \quad \boldsymbol{\Theta} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_8)^{\text{т}}, \quad \boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \dots, N_8)^{\text{т}}.$$

Таким образом, уравнение (4) можно записать в виде

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Xi}.$$

Подставляя (6) в (5), получаем матрицу деформации элемента (e)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{(e)}.$$

Основные уравнения метода конечных элементов можно получить с использованием принципа минимума потенциальной энергии и метода Рэлея — Ритца. Выражение для полной потенциальной энергии пластины представим в виде

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}\int\limits_{V^{(e)}} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)})^{\text{т}}\boldsymbol{\sigma}^{(e)}\,dV - \int\limits_{A^{(e)}} (\boldsymbol{q})^{\text{т}}\boldsymbol{p}\,dA + \int\limits_{V^{(e)}} \rho(\boldsymbol{q})^{\text{т}}\ddot{\boldsymbol{q}}^{(e)}\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{V^{(e)}} (\boldsymbol{\delta}^{(e)})^{\text{т}}\boldsymbol{B}^{\text{т}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{(e)}\,dV - \int\limits_{A^{(e)}} (\boldsymbol{\delta}^{(e)})^{\text{т}}\boldsymbol{N}^{\text{т}}\boldsymbol{p}\,dA +$$

$$+ \int\limits_{V^{(e)}} (\boldsymbol{\delta}^{(e)})^{\text{т}}\boldsymbol{N}^{\text{т}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{N}\ddot{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}\,dV, \tag{7}$$

где $V^{(e)}$, $A^{(e)}$ — объем и площадь элемента; $\boldsymbol{p}$ — вектор усилий; последний член уравнения (7) — работа сил инерции.

Из принципа минимума полной потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial\,(\boldsymbol{\delta}^{(e)})^{\mathrm{T}}} = 0$$

следует соотношение

$$\Big(\int\limits_{V^{(e)}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{N}\,dV\Big)\ddot{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} + \Big(\int\limits_{V^{(e)}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{B}\,dV\Big)\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \int\limits_{A^{(e)}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\,dA,$$

или

$$\boldsymbol{M}^{(e)}\ddot{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} + \boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \boldsymbol{F}^{(e)},$$

где

$$\boldsymbol{K}^{(e)} = \int\limits_{V^{(e)}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{B}\,dV, \quad \boldsymbol{M}^{(e)} = \int\limits_{V^{(e)}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{N}\,dV, \quad \boldsymbol{F}^{(e)} = \int\limits_{A^{(e)}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\,dA,$$

$$\boldsymbol{p} = (p_x, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Поскольку пластина растягивается в направлении оси x, компоненты вектора усилия равны нулю в направлениях y и z. Интегралы от матриц массы и жесткости вычисляются с использованием восьми гауссовых точек и метода Гаусса — Лежандра [41].

После сборки матриц элементов глобальные динамические уравнения равновесия пластины из ФГМ можно записать в виде [41]

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0.$$

В случае статической задачи имеем

$$[K]\{\delta\} = \{F\}.$$

Задача о свободных колебаниях сводится к определению собственных значений следующего уравнения:

$$([K] - [M]\omega^2)\{\delta\} = 0.$$

Задача решается в прямоугольной декартовой системе координат с последующим преобразованием перемещений и напряжений компонентов в полярную систему координат.

3. Результаты исследования и их обсуждение. Рассмотрим результаты исследования напряженно-деформированного состояния и свободных колебаний пластины из ФГМ.

3.1. *Статическая задача.* Для проверки созданной программы результаты численных расчетов, полученные с использованием градиентных конечных элементов для пластины из ФГМ с круговым вырезом, сравнивались с результатами, полученными в работе [42] для пластины из ФГМ без отверстия при такой же нагрузке. Пластина нагружалась равномерным давлением на верхней поверхности при следующих параметрах: $n = 1$, $a = b$, $h/a = 0{,}2$, $E_c = 70$ ГПа, $E_m = 200$ ГПа, $P = 1$ Па, $\nu = 0{,}3$.

На рис. 2 приведены распределения по толщине пластины из ФГМ безразмерного поперечного перемещения при различных граничных условиях, полученные в настоящей работе и работе [42]. Видно, что они хорошо согласуются.

Для того чтобы показать применимость полученных результатов для пластин с круговым вырезом, в работе [43] рассматривается одноосное растяжение однородной пластины

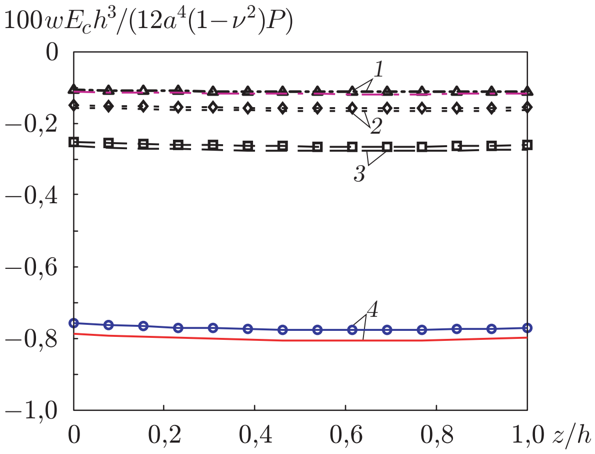

Рис. 2

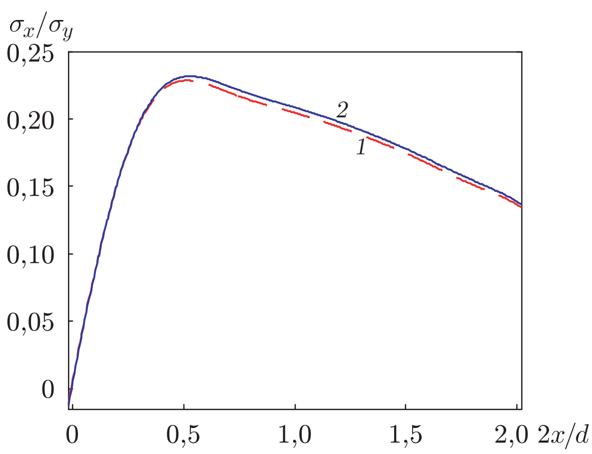

Рис. 3

Рис. 2. Распределения безразмерного перемещения по толщине пластины при $x = y = a/2$: точки — настоящая работа, линии — работа [42]; *1* — пластина с защемленными торцами, *2* — пластина с двумя шарнирно опертыми и двумя защемленными торцами, *3* — пластина с шарнирно защемленными торцами, *4* — пластина с двумя шарнирно закрепленными и двумя свободными торцами

Рис. 3. Зависимости отношения мембранных напряжений в вершине надреза от безразмерной координаты при $z = h/2$, $h/d = 1$, полученные в настоящей работе (*1*) и работе [43] (*2*)

при $d = 2$ мм, $a = b = 200$ мм, $H = 2$ мм, $E = 200$ ГПа. На рис. 3 приведены зависимости отношения мембранных напряжений σ_x/σ_y в вершине надреза от безразмерной координаты $2x/d$ при $z = h/2$, полученные в настоящей работе и работе [43]. Видно, что результаты хорошо согласуются.

Рассмотрим квадратную пластину из ФГМ с центральными отверстиями диаметром $d = 0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$ м, длиной $a = b = 1$ м, безразмерной толщиной $h/a = 0{,}2$. Пластина выполнена из металлокерамического материала со следующими характеристиками: $E_c = 380$ ГПа, $\rho_c = 3800$ кг/м^3, $\rho_m = 2707$ кг/м^3, $E_m = 70$ ГПа. Пластина подвергается равномерному растяжению вдоль оси x с концов $x = 0$, $x = L$, другие ее границы свободны от нагрузки. Статическое давление и коэффициент Пуассона считаются постоянными: $P = 40$ МПа, $\nu = 0{,}3$. Количество градиентных ступенчатых элементов в направлении оси z равно 12. Как следует из проведенных численных экспериментов, этого количества достаточно для сходимости результатов. На рис. 4 приведены распределения радиальных напряжений по толщине пластины. Видно, что использование градиентных конечных элементов обеспечивает более гладкое поле напряжений и бóльшую точность решения, чем использование однородных конечных элементов (при их одинаковом количестве).

Распределения радиальных напряжений по толщине пластины при $\theta = 0°$ и вокруг отверстия при $z = h/2$, $d = 0{,}4$ м и различных значениях показателя n приведены на рис. 5, 6 соответственно. Видно, что распределение напряжений по толщине существенно меняется при изменении показателя n. На рис. 6 также видно, что растягивающая нагрузка вокруг отверстия увеличивается при $n = 0{,}5 \div 3{,}0$. Распределения радиальных напряжений и напряжений, действующих в продольном сечении, по толщине при $\theta = 0°$, $n = 3$ и различных диаметрах отверстий приведены на рис. 7. Видно, что при увеличении диаметра отверстия радиальные напряжения увеличиваются, а напряжения, действующие в продольном

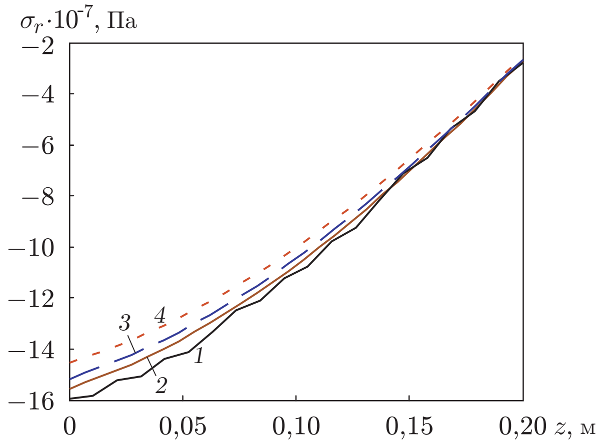

Рис. 4. Распределения радиальных напряжений по толщине пластины при $\theta = 0°$, $n = 1$, $d = 0{,}4$ м и различном количестве конечных элементов, полученные с использованием градиентных (*1, 3, 4*) и однородных (*2*) конечных элементов: *1, 2* — $ne_z = 12$, *3* — $ne_z = 10$, *4* — $ne_z = 8$

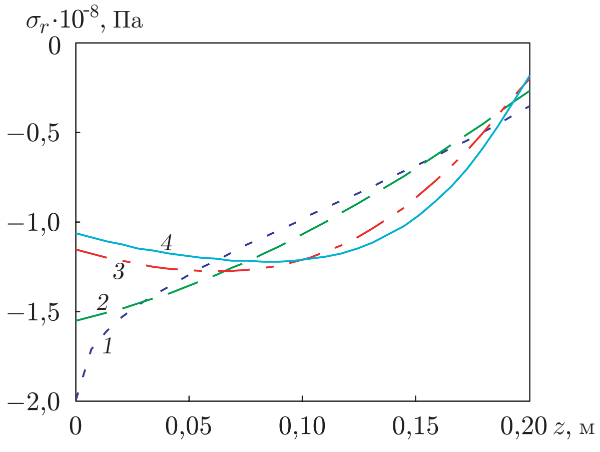

Рис. 5

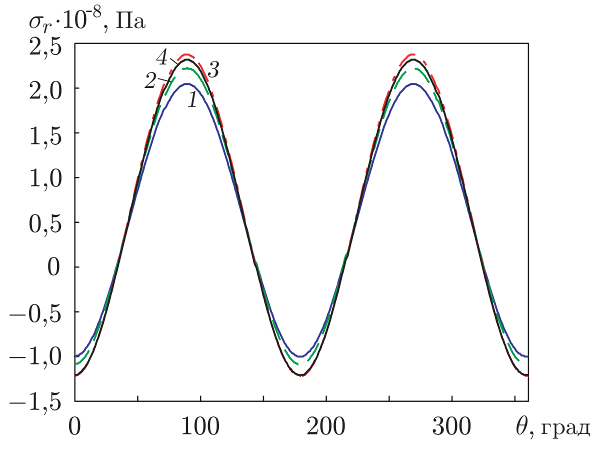

Рис. 6

Рис. 5. Распределение радиальных напряжений по толщине пластины при $\theta = 0°$, $d = 0{,}4$ м и различных значениях n:
1 — $n = 0{,}5$, *2* — $n = 1$, *3* — $n = 3$, *4* — $n = 5$

Рис. 6. Зависимость радиальных напряжений от координаты θ при $z = h/2$, $d = 0{,}4$ м и различных значениях n:
1 — $n = 0{,}5$, *2* — $n = 1$, *3* — $n = 3$, *4* — $n = 5$

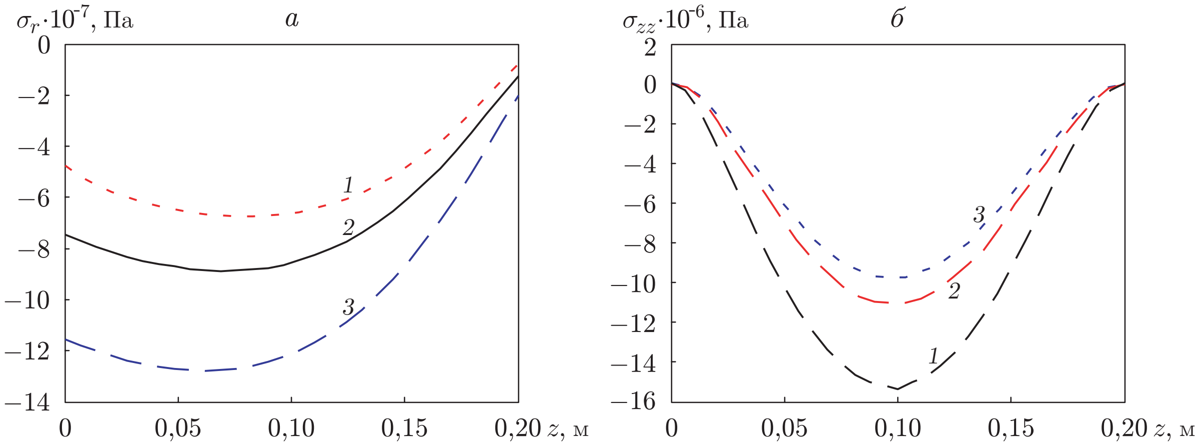

Рис. 7. Распределения радиальных напряжений (*а*) и напряжений, действующих в продольном сечении (*б*), по толщине пластины при $\theta = 0°$, $n = 3$ и различных значениях d:
1 — $d = 0{,}2$ м, *2* — $d = 0{,}3$ м, *3* — $d = 0{,}4$ м

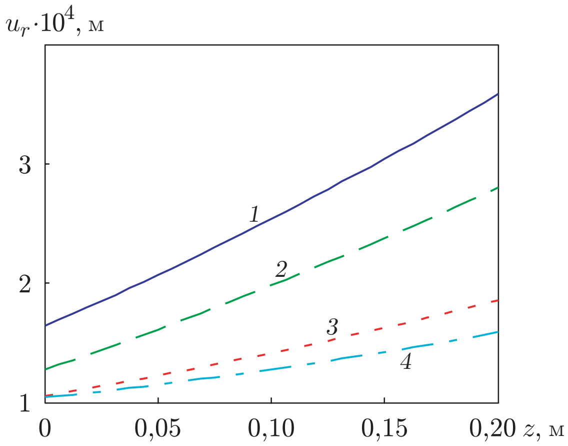

Рис. 8

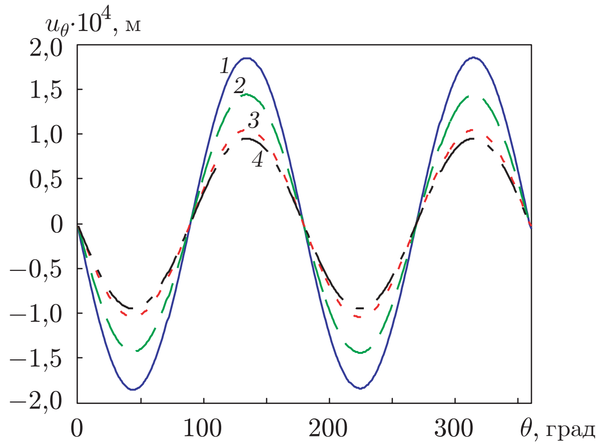

Рис. 9

Рис. 8. Распределение радиального перемещения по толщине пластины при $\theta = 0°$, $d = 0{,}4$ м и различных значениях n:
1 — $n = 0{,}5$, *2* — $n = 1$, *3* — $n = 3$, *4* — $n = 5$

Рис. 9. Распределение окружного перемещения по окружной координате θ при $z = h/2$, $d = 0{,}4$ м и различных значениях n:
1 — $n = 0{,}5$, *2* — $n = 1$, *3* — $n = 3$, *4* — $n = 5$

Таблица 1

Значения безразмерной основной собственной частоты $\bar{\omega}$ для защемленной пластины из ФГМ при различных значениях n

n	$\bar{\omega}$	
	Данные настоящей работы	Данные работы [44]
1	0,3231	0,3204
2	0,3197	0,3165
5	0,3181	0,3154

сечении, уменьшаются. Полученные результаты свидетельствуют о том, что естественные граничные условия на верхней и нижней поверхностях пластины из ФГМ выполнены, поля напряжений непрерывно меняются вследствие использования градиентных конечных элементов.

На рис. 8 показано распределение радиального перемещения по толщине пластины при $\theta = 0°$, $d = 0{,}4$ м и различных показателях n. На рис. 9 приведено распределение окружного перемещения по окружной координате θ при $z = h/2$, $d = 0{,}4$ м и различных показателях n. На рис. 8, 9 видно, что перемещения уменьшаются при увеличении показателя n. Такое поведение обусловлено увеличением модуля упругости при увеличении объемной доли керамики. В то же время вследствие асимметричного распределения свойств материала жесткость нижних слоев увеличивается при увеличении n. Поэтому радиальные перемещения по толщине не одинаковы в различных точках. Следовательно, при деформации пластины с цилиндрическим отверстием оно принимает форму усеченного конуса с некруговым основанием.

3.2. *Анализ свободных колебаний.* Были рассчитаны собственные частоты для пластины из ФГМ (металлокерамический материал) и проведено сравнение с результатами аналитических расчетов работы [44] для пластины, изготовленной из такого же материала и имеющей следующие параметры: $a = b$, $h/a = 0{,}2$, $E_c = 70$ ГПа, $E_m = 200$ ГПа, $\rho_c = 2702$ кг/м^3, $\rho_m = 5700$ кг/м^3, $\nu = 0{,}3$. В табл. 1 приведены вычисленные с использованием описанного выше алгоритма значения безразмерной основной собственной частоты ($\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$) для защемленной пластины из ФГМ, а также значения этой величины, полученные в работе [44]. Из табл. 1 следует, что эти результаты хорошо согласуются.

Рассмотрим защемленную с четырех сторон квадратную пластину из ФГМ с параметрами, указанными в подп. 3.1. Значения собственных частот для пластины с центральным отверстием диаметром 0,2, 0,3, 0,4 м при различных показателях степени n приведены в табл. 2. Собственные частоты увеличиваются при увеличении диаметра отверстия и при $n \leqslant 5$, что является следствием уменьшения объемной доли металла.

Заключение. В работе на основе трехмерной теории упругости выполнен анализ напряженно-деформированного состояния пластины из ФГМ с круговым отверстием при статическом нагружении и вычислены собственные значения свободных колебаний. Свойства материала пластины непрерывно изменяются по ее толщине. Решение получено с использованием градиентных конечных элементов и метода Рэлея — Ритца в энергетической формулировке. Сравнение полученных результатов с известными результатами показывает, что они хорошо согласуются. Исследовано влияние различных объемных долей керамики и металла на напряженное состояние пластины из ФГМ при одноосном растяжении, а также на собственные частоты свободных колебаний защемленной пластины. Анализ полученных результатов показывает, что напряженное состояние пластины и ее собственные частоты можно менять, выбирая объемные доли компонентов материала. В частности, таким образом можно уменьшить концентрацию напряжений в окрестности

Таблица 2

Значения собственных частот для защемленной пластины из ФГМ при различных значениях n и d

Номер моды	ω, Гц								
	$d = 0{,}2$ м			$d = 0{,}3$ м			$d = 0{,}4$ м		
	$n = 0{,}5$	$n = 1{,}0$	$n = 5{,}0$	$n = 0{,}5$	$n = 1{,}0$	$n = 5{,}0$	$n = 0{,}5$	$n = 1{,}0$	$n = 5{,}0$
1	1907,8	2066,8	2381,1	2039,6	2209,5	2546,9	2293,2	2486,3	2868,7
2	3111,1	3398,9	3924,0	2971,5	3243,0	3744,7	2946,9	3211,6	3709,8
3	3111,9	3399,8	3925,0	2973,5	3245,3	3747,4	2947,5	3212,2	3710,5
4	4304,9	4713,0	5449,3	4221,5	4621,2	5339,8	4076,6	4459,5	5151,1
5	4709,3	5202,8	5996,3	4785,6	5249,3	6069,5	4578,6	5017,4	5802,4
6	4709,4	5202,9	5996,3	4997,7	5525,8	6394,7	5384,3	5955,1	6922,2
7	4898,0	5372,9	6217,6	4998,1	5526,2	6395,0	5384,4	5955,2	6922,2
8	5218,9	5719,3	6638,0	5331,6	5892,3	6804,0	5452,7	6031,8	6993,7
9	5291,6	5844,1	6731,8	5390,4	5953,7	6860,6	5605,8	6192,9	7142,3
10	5540,3	6120,0	7053,5	5547,6	6090,5	7100,2	5752,3	6311,1	7268,0

отверстия. Также использование градиентных конечных элементов позволяет повысить точность результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Suresh S.** Fundamentals of functionally graded materials / S. Suresh, A. Mortensen. L.: IOM Comm., 1998.
2. **Reddy J. N., Cheng Z. Q.** Three dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates // Europ. J. Mech. A. Solids. 2001. V. 20. P. 841–855.
3. **Vel S. S., Batra R. C.** Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates // AIAA J. 2002. V. 40, N 7. P. 1421–1433.
4. **Kashtalyan M.** Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded plates // Europ. J. Mech. A. Solids. 2004. V. 23. P. 853–864.
5. **Lu C. F., Lim C. W., Chen W. Q.** Semi-analytical analysis for multi-directional functionally graded plates: 3-D elasticity solutions // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2009. V. 79. P. 25–44.
6. **Wen P. H., Sladek J., Sladek V.** Three-dimensional analysis of functionally graded plates // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2011. V. 87, N 10. P. 923–942.
7. **Reddy J. N., Chin C. D.** Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Thermal Stresses. 1998. V. 26, N 1. P. 593–626.
8. **Reddy J. N.** Analysis of functionally graded plates // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2000. V. 47. P. 663–684.
9. **Croce L. D., Venini P.** Finite elements for functionally graded Reissner — Mindlin plates // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2004. V. 193. P. 705–725.
10. **Mechab I., Atmane H. A., Tounsi A., et al.** A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates // Acta Mech. Sinica. 2010. V. 26. P. 941–949.
11. **Prakash T., Ganapathi M.** Asymmetric flexural vibration and thermoelastic stability of FGM circular plates using finite element method // Composites. Pt B. 2006. V. 37. P. 642–649.
12. **Chi S. H., Chung Y. L.** Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load. Pt 1. Analysis // Intern. J. Solids Structures. 2006. V. 43. P. 3657–3674.
13. **Matsunaga H.** Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory // Composite Structures. 2008. V. 82. P. 499–512.

14. **Orakdogen E., Kucukarslan S., Sofiyev A., Omurtag M. H.** Finite element analysis of functionally graded plates for coupling effect of extension and bending // Meccanica. 2010. V. 45. P. 63–72.
15. **Singha M. K., Prakash T., Ganapathi M.** Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method // Finite Elements Anal. Design. 2011. V. 47. P. 453–460.
16. **Nguyen-Xuan H., Tran L. V., Thai C. H., Nguyen-Thoi T.** Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing // Thin-Walled Structures. 2012. V. 54. P. 1–18.
17. **Santare M. H., Lambros J.** Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials // J. Appl. Mech. 2000. V. 67. P. 819–822.
18. **Kim J.-H., Paulino G. H.** Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials // J. Appl. Mech. 2002. V. 69. P. 502–514.
19. **Zhang Z., Paulino G. H.** Wave propagation and dynamic analysis of smoothly graded heterogeneous continua using graded finite elements // Intern. J. Solids Structures. 2007. V. 44. P. 3601–3626.
20. **Santare M. H., Thamburaj P., Gazonas G. A.** The use of graded finite elements in the study of elastic wave propagation in continuously nonhomogeneous materials // Intern. J. Solids Structures. 2003. V. 40. P. 5621–5634.
21. **Dave E. V., Paulino G. H., Buttlar W. G.** Viscoelastic functionally graded finite element method using correspondence principle // J. Mater. Civil Engng. 2011. V. 23. P. 39–48.
22. **Asgari M., Akhlaghi M., Hosseini S. M.** Dynamic analysis of two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length under impact loading // Acta Mech. 2009. V. 208. P. 163–180.
23. **Asgari M., Akhlaghi M.** Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equations // Europ. J. Mech. A. Solids. 2011. V. 30. P. 72–81.
24. **Asemi K., Salehi M., Akhlaghi M.** Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads // Acta Mech. 2011. V. 217. P. 119–134.
25. **Cao L.-L., Qin Q.-H., Zhao N.** Hybrid graded element model for transient heat conduction in functionally graded materials // Acta Mech. Sinica. 2012. V. 28. P. 128–139.
26. **Asemi K., Akhlaghi M., Salehi M.** Dynamic analysis of thick short FGM cylinders // Meccanica. 2012. V. 47. P. 1441–1453.
27. **Paul T. K., Rao K. M.** Finite-element stress-analysis of laminated composite plates containing 2 circular holes under transverse loading // Comput. Structures. 1995. V. 54, N 4. P. 671–677.
28. **Tenchev R. T., Nygard M. K., Echtermeyer A.** Design procedure for reducing the stress-concentration around circular heres in laminated composites // Composites. 1995. V. 26, N 12. P. 815–828.
29. **Kaltakci M. Y.** Stress concentrations and failure criteria in anisotropic plates with circular holes subjected to tension or compression // Comput. Structures. 1996. V. 61, N 1. P. 67–78.
30. **Haque A., Ahmed L., Ramasetty A.** Stress concentrations and notch sensitivity in woven ceramic matrix composites containing a circular hole — an experimental, analytical, and finite element study // J. Amer. Ceramic Soc. 2005. V. 88, N 8. P. 2195–2201.
31. **Kubair D. V., Bhanu-Chandar B.** Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension // Intern. J. Mech. Sci. 2008. V. 50. P. 732–742.
32. **Mohammadi M., Dryden J. R., Jiang L.** Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate // Intern. J. Solids Structures. 2011. V. 48. P. 483–491.

33. **Hu C., Fang X.-Q., Huang W.-H.** Multiple scattering of shear waves and dynamic stress from a circular cavity buried in a semi-infinite slab of functionally graded materials // Engng Fracture Mech. 2008. V. 75. P. 1171–1183.
34. **Fang X. Q., Hu C., Du S. Y.** Strain energy density of a circular cavity buried in semi-infinite functionally graded materials subjected to shear waves // Theoret. Appl. Fracture Mech. 2006. V. 46. P. 166–174.
35. **Deb Nath S. K., Wong C. H., Kim S.-G.** A finite-difference solution of boron/epoxy composite plate with an internal hole subjected to uniform tension/displacements using displacement potential approach // Intern. J. Mech. Sci. 2012. V. 58. P. 1–12.
36. **Janghorban M., Zare A.** Thermal effect on free vibration analysis of functionally graded arbitrary straight-sided plates with different cutouts // Latin Amer. J. Solids Structures. 2011. V. 8. P. 245–257.
37. **Yang Q., Gao C.-F., Chen W.** Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole // Arch. Appl. Mech. 2010. V. 80. P. 895–907.
38. **Linkov A., Rybarska-Rusinek L.** Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges // Intern. J. Engng Sci. 2012. V. 61. P. 87–93. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.06.012.
39. **Timoshenko S.** Theory of elasticity / S. Timoshenko, J. N. Goodier. N. Y.: McGraw-Hill, 1970.
40. **Zienkiewicz O. C.** The finite element method for solid and structural mechanics / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. Oxford: Elsevier, 2005.
41. **Cook R. D.** Concepts and applications of finite element analysis / R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, R. J. Witt. N. Y.: John Wiley and Sons, 2001.
42. **Rezaei Mojdehi A., Darvizeh A., Basti A., Rajabi H.** Three-dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov — Galerkin (MLPG) method // Engng Anal. Boundary Elements. 2011. V. 35. P. 1168–1180.
43. **Yang Z., Kim C. B., Cho C., Beom H. G.** The concentration of stress and strain in finite thickness elastic plate containing a circular hole // Intern. J. Solids Structures. 2008. V. 45. P. 713–731.
44. **Ferreira A. J. M., Batra R. C., Roque C. M. C., et al.** Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method // Composite Structures. 2006. V. 75. P. 593–600.

Поступила в редакцию 26/II 2014 г.,
в окончательном варианте — 31/VIII 2014 г.