

УДК 532.5, 534-14

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВОКРУГ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ЦИЛИНДРА

А. Н. Нуриев, А. Г. Егоров*, О. Н. Зайцева*

Нижегородский государственный университет, 603950 Нижний Новгород, Россия

* Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Казань, Россия

E-mails: nuriev_an@mail.ru, aegorov0@gmail.com, olga_fdpi@mail.ru

Рассматриваются способы управления вторичными течениями, возникающими вблизи осциллирующего круглого цилиндра, посредством изменения двух управляющих параметров процесса: безразмерной амплитуды и колебательного числа Рейнольдса. Исследование проводится с использованием прямого численного моделирования. Показано, что путем варьирования указанных параметров в относительно небольшом диапазоне можно не только интенсифицировать процессы массообмена, но и менять направление основных вторичных потоков.

Ключевые слова: вторичные стационарные течения, акустические течения, режимы течения, уравнение Навье — Стокса, численное моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20180308

Введение. При колебаниях тела в вязкой жидкости не только развивается нестационарный пограничный слой и формируются вихри вблизи тела, но и возникает глобальное стационарное течение, приводящее в движение значительные массы жидкости вокруг тела. Это вторичное течение часто используется для управления переносом и перемешиванием жидкости. В работах [1, 2] впервые доказано возникновение таких стационарных течений вблизи препятствий в воздухе под действием звуковых волн. Поэтому их часто называют акустическими. В целом наличие звуковых волн является одной из возможных причин появления подобных течений, которые представляют собой нелинейные эффекты, возникающие как в сжимаемой, так и в несжимаемой жидкости. В случае взаимодействия осциллирующего потока с твердым телом их появление обусловлено вязким трением в пограничном слое вблизи тела [3].

Учет вторичных течений имеет важное значение при конструировании технических объектов, поскольку, например, формирование подобных течений вблизи морских инженерных сооружений может приводить к изменению рельефа дна под ними [4]. В целом вторичные течения оказывают значительное влияние на процессы тепло- и массопереноса, что используется в технологических процессах, например при ультразвуковой очистке поверхностей или быстром выращивании кристаллов [5–7]. В настоящее время обсуждается возможность использования вторичных течений для управления переносом и перемешиванием реактивов в микрофлюидных устройствах [8, 9]. При характерных для этих задач относительно малых значениях числа Рейнольдса нестационарные эффекты, возникающие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15-19-10039).

© Нуриев А. Н., Егоров А. Г., Зайцева О. Н., 2018

вследствие осцилляционного движения тела, существенны лишь в его малой окрестности. Во внешней области движение жидкости полностью определяется вторичными течениями, поэтому проблема управления такими течениями является актуальной.

В настоящей работе рассматривается эволюция вторичных течений, возникающих в окрестности гармонически колеблющихся в вязкой несжимаемой жидкости цилиндрических тел круглой формы, при изменении управляющих параметров осцилляционного процесса. Наиболее изученными являются симметричные вторичные течения вблизи цилиндрических тел при малоамплитудных высокочастотных колебаниях [3, 10–12]. Однако результаты исследований [13–16] показывают, что симметричная структура является не единственной возможной формой течения. При увеличении числа Рейнольдса возникают новые типы вторичных течений, которые исследуются в настоящей работе с помощью прямого численного моделирования. На первом этапе решается полная задача, описывающая нестационарный процесс течения, далее выделяется вторичная стационарная составляющая. Рассматривается область относительно малых чисел Рейнольдса, для которых применима гипотеза о плоском ламинарном течении.

1. Математическая постановка задачи. Круглый цилиндр радиусом R совершает колебания в горизонтальной плоскости (ортогональной оси цилиндра) в вязкой несжимаемой жидкости по гармоническому закону

$$s = A \sin(\omega t),$$

где s — горизонтальные перемещения; A , ω — амплитуда и частота колебаний соответственно.

При нормировке пространственных координат, времени и скорости на R , RU_0^{-1} , U_0 соответственно ($U_0 = A\omega$ — амплитуда скорости колебаний) система уравнений движения жидкости записывается в декартовой системе координат:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \nabla p + \frac{2}{\text{Re}} \Delta \mathbf{U}; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{U} = (u, v, w)$ — безразмерная скорость; p — безразмерное давление; $\text{Re} = 2U_0R/\nu$ — число Рейнольдса; ν — кинематическая вязкость жидкости. В нормированных переменных уравнение движения цилиндра записывается в виде

$$s = \frac{\text{KC}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{\text{KC}}\right). \quad (3)$$

Здесь $\text{KC} = U_0\pi/(R\omega) = \pi A/R$ — второй безразмерный управляющий параметр задачи — число Кейлигана — Карпентера, или безразмерная амплитуда колебаний.

Вместо числа Рейнольдса используем колебательное число Рейнольдса

$$\beta = \frac{\text{Re}}{\text{KC}} = \frac{2R^2\omega}{\pi\nu}.$$

Комплекс из двух параметров (β, KC) полностью определяет течение жидкости вблизи осциллирующего цилиндра.

Для численного решения задачи (1)–(3) осуществляется переход в подвижную систему координат, связанную с цилиндром. В этом случае для сохранения системы уравнений движения (1), (2) в новой неинерциальной системе координат давление определяется следующим образом:

$$p = \tilde{p} + x \sin\left(\frac{\pi t}{\text{KC}}\right) \frac{\pi}{\text{KC}}.$$

Здесь \tilde{p} — давление в неподвижной системе координат; второе слагаемое — вклад инерциальных составляющих.

На границе цилиндра в новой системе координат задаются условия прилипания

$$u_c = v_c = 0.$$

На бесконечности изменение скорости определяется гармоническим законом

$$u_\infty = -\cos(\pi t / \text{КС}), \quad v_\infty = 0.$$

Результирующие поля скорости и давления представляются в виде суммы стационарной и осцилляционной составляющих:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{av} + \mathbf{U}_{osc}, \quad p = p_{av} + p_{osc}.$$

Стационарная составляющая, определяющая вторичные стационарные течения, находится как среднее полей скоростей и давления по периоду:

$$p_{av} = \frac{1}{T} \int_T p dt, \quad \mathbf{U}_{av} = \frac{1}{T} \int_T \mathbf{U} dt, \quad T = 2 \text{КС}.$$

2. Численное моделирование. Численное решение задачи выполнялось в пакете OpenFOAM. Моделирование проводилось в ограниченной области прямоугольной формы с соотношением сторон $l_x \times l_y$, выбираемым из условия минимизации влияния внешних границ на течение в окрестности цилиндра. Оптимальной для рассматриваемого диапазона параметров задачи является расчетная область размером 50×40 с обтекаемым цилиндром в центре. В используемой декартовой системе координат стороны расчетной области параллельны основным осям, колебания происходят вдоль оси Ox .

Дискретизация расчетной области выполнялась с использованием блочных регулярных сеток. Для повышения разрешающей способности вблизи цилиндра проводилось линейное сгущение узлов в направлении нормали к его сторонам. Максимальное количество ячеек используемых в расчетах сеток составляло $3,5 \cdot 10^5$, минимальный объем ячеек в пограничном слое цилиндра — 10^{-4} , количество ячеек на границе цилиндра равно 200.

Дискретизация системы уравнений движения проводилась с помощью численной схемы, основанной на методе конечных объемов и используемой при решении задач о колебаниях тел в жидкости [13, 17, 18]. Дискретные значения составляющих скорости и дискретные давления локализовались в центрах ячеек расчетных сеток. Для вычисления объемных интегралов по конечному объему использовалась процедура Гаусса.

Для аппроксимации градиента давления в расчетах применялась линейная интерполяция. В диффузионных слагаемых при дискретизации оператора Лапласа нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки аппроксимировались с помощью симметричной схемы второго порядка с поправкой на неортогональность. Для интерполяции переменных в конвективных слагаемых использовалась нелинейная NVD-схема, для дискретизации системы уравнений по времени — неявная схема Эйлера.

Дискретная задача решалась с помощью метода PISO (pressure implicit with splitting of operators). Система уравнений для давления решалась с использованием метода сопряженных градиентов с геометрически-алгебраическим многосеточным предобуславливателем, система уравнений для компонент скорости — метода бисопряженных градиентов с предиктором на основе неполной LU-факторизации. Для расчетов проводилось распараллеливание алгоритма по технологии MPI с применением метода декомпозиции области решения.

3. Верификация численной схемы. Для оценки точности численного моделирования проводился анализ влияния разрешающей способности сеток на гидродинамические

Значения коэффициентов C_d , C_m , вычисленные на разных сетках при различных значениях управляющих параметров

β	КС	Данные настоящей работы						Данные работы [20]		Данные работы [16]		Данные работы [21]	
		М1 ($n^* = 6,9 \cdot 10^4$)		М2 ($n = 1,56 \cdot 10^5$)		М3 ($n = 3,5 \cdot 10^5$)							
		C_d	C_m	C_d	C_m	C_d	C_m	C_d	C_m	C_d	C_m	C_d	C_m
35	5,5	1,70	2,25	1,69	2,24	1,69	2,23	—	—	$\approx 1,77$	2,23	—	—
35	8,0	1,77	2,14	1,74	2,12	1,73	2,11	$\approx 1,7$	2,14	$1,72 \div 1,73$	$2,14 \div 2,15$	—	—
1035	0,5	1,68	2,06	1,69	2,07	1,69	2,07	—	—	—	—	1,71	2,07
1035	1,0	0,96	2,06	0,98	2,07	0,98	2,07	—	—	—	—	0,99	2,06

* n — результирующее число расчетных ячеек.

силы, действующие на осциллирующий цилиндр со стороны жидкости, результаты моделирования сравнивались с известными численными и экспериментальными данными. В безразмерной постановке гидродинамические силы вычислялись по формуле

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y) = \int_s p \mathbf{n} ds - \int_s \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds,$$

где $\bar{\sigma}$ — тензор вязких напряжений; S — поверхность цилиндра; \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль к поверхности цилиндра; F_x , F_y — горизонтальная и вертикальная компоненты силы соответственно.

Согласно [19] горизонтальную компоненту можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$F_x = \pi C_m \frac{du_\infty}{dt} + C_d u_\infty |u_\infty|.$$

Первое слагаемое определяет инерциальные силы (включая силу присоединенных масс), величина которых характеризуется коэффициентом C_m , второе — силы сопротивления, величина которых характеризуется коэффициентом C_d . Значения коэффициентов C_m , C_d , вычисленные на разных сетках при различных значениях управляющих параметров, приведены в таблице. Сетки М2, М3 получены из базовой сетки М1 путем пропорционального измельчения (в 1,50 и 2,25 раза соответственно) ячеек в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Из таблицы следует, что данные, полученные на разных сетках, различаются не более чем на 3 %. Поскольку эти различия уменьшаются при измельчении ячеек, имеет место сеточная сходимость. Кроме того, полученные данные хорошо согласуются с результатами численных и экспериментальных исследований [16, 20, 21].

4. Результаты расчетов и их обсуждение. Исследование вторичных течений в окрестности круглого цилиндра проводилось в двух параметрических областях: области малоамплитудных колебаний ($КС < КС_{cr}$, $\beta < 2000$, $КС_{cr}$ соответствует границе устойчивости плоских симметричных режимов) и области низкочастотных колебаний ($КС < 8$, $\beta < 45$) цилиндра.

4.1. *Режимы течения при малоамплитудных колебаниях.* В области малоамплитудных колебаний цилиндра наблюдаются два симметричных относительно вертикальной и горизонтальной осей режима течения S и S*.

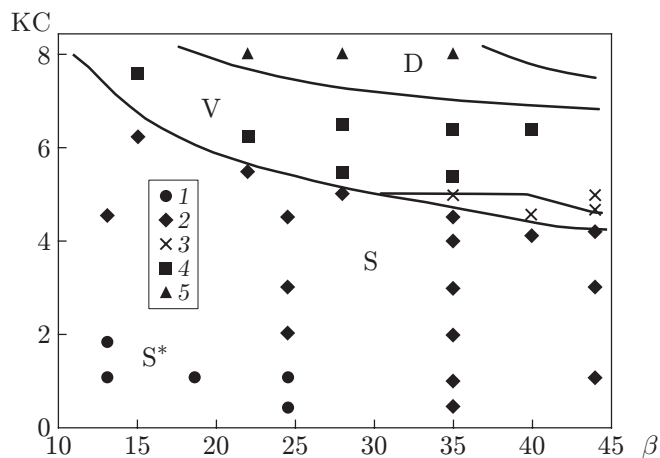


Рис. 1. Карта режимов течения:
 линии — границы режимов, полученные в экспериментах [14], точки — результаты расчетов, проведенных в настоящей работе (1 — режим S*, 2 — режим S, 3 — квазипериодический режим, 4 — периодический V-режим, 5 — режим D)

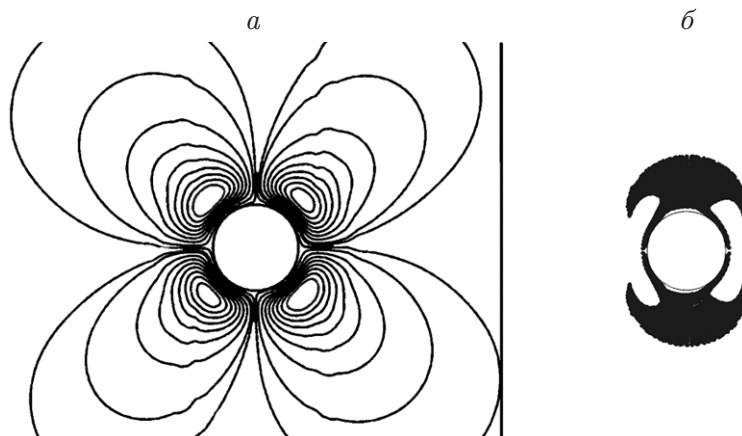


Рис. 2. Линии тока вторичного течения (а) и мгновенная картина течения (б) для режима S* при $\beta = 24$, $KC = 1,0$

Режим S* локализуется в относительно небольшой параметрической области при малых частотах колебаний цилиндра (рис. 1). На рис. 2 с помощью невесомых частиц, вымываемых потоком из окрестности цилиндра, представлена мгновенная картина течения для режима S*. Вторичные течения показаны с помощью линий тока. Область течения делится на четыре зоны. В каждой зоне расположена вихревая ячейка, течение в которой является симметричным относительно прямых, проходящих через ось цилиндра под углами 45° и -45° к оси Ox . Вихри формируют вдоль основных осей координат потоки, направленные к телу вдоль оси колебаний цилиндра и от тела в ортогональном ему направлении. Влияние вторичных потоков хорошо видно на мгновенной картине течения (см. рис. 2,б), где наблюдается высокая концентрация невесомых частиц вблизи верхней и нижней точек цилиндра.

При увеличении значений управляющих параметров режим S* переходит в режим S (см. рис. 1). На рис. 3, на котором приведены линии тока и мгновенная картина вторичного течения для режима S, видно, что симметрия течения сохраняется, однако вихревая система разделяется на внутреннюю и внешнюю системы вихрей. Размеры внутренней си-

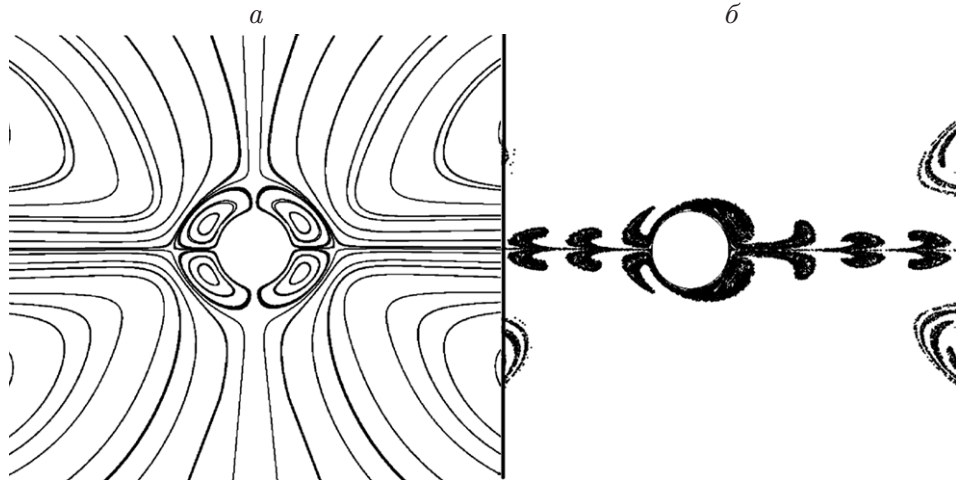


Рис. 3. Линии тока вторичного течения (а) и мгновенная картина течения (б) для режима S при $\beta = 35$, $KC = 4,5$

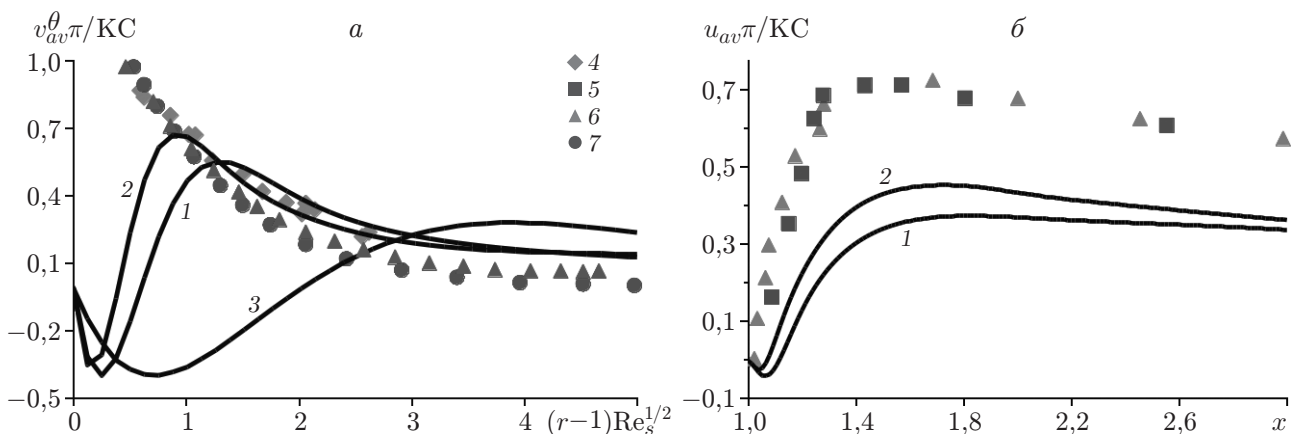


Рис. 4. Нормализованные профили скорости вторичного течения для $Re_s = 90$ при $\theta = \pi/2 + 1$ (а) и распределение нормализованной горизонтальной скорости вдоль оси Ox (б):

линии — результаты численного моделирования (1 — $\beta = 1035$, 2 — $\beta = 2000$, 3 — $\beta = 141$), точки 4 — данные эксперимента [22] при $\beta = 8201$, точки 5–7 — результаты асимптотического решения [23, 12, 11] соответственно

стемы вихрей существенно зависят от управляющего параметра β : при увеличении этого параметра размеры внутренней вихревой зоны уменьшаются. Изменение размеров внутренней зоны отчетливо видно на рис. 4, на котором показана зависимость трансверсальной скорости $v_{av}^\theta = \cos(\theta)v_{av} - \sin(\theta)u_{av}$ от $(r-1)Re_s^{1/2}$, где $Re_s = KC^2 \beta / (2\pi)$ — стационарное число Рейнольдса; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиальная координата. При переходе из внутренней зоны во внешнюю знак скорости меняется.

Разделение на внутреннюю и внешнюю системы вихрей приводит к изменению направления потоков во внешней области. Под влиянием внешней системы вихрей формируется течение, переносящее жидкость от цилиндра вдоль оси колебаний, приток жидкости к цилиндру осуществляется вдоль оси Oy . При увеличении KC течение внутри ячеек становится несимметричным. Центры вихрей смещаются к оси колебаний, что приводит к увеличению скорости горизонтального течения.

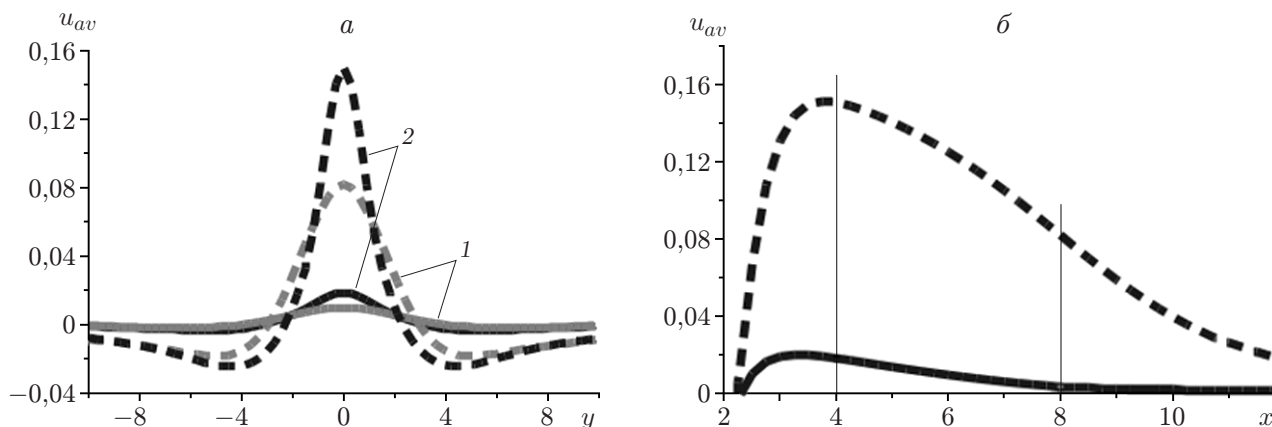


Рис. 5. Распределения горизонтальной компоненты скорости вдоль прямых $x = 8$, $x = 4$ (а) и вдоль оси Ox (б):
 сплошные линии — $\beta = 35$, $KC = 2$, штриховые — $\beta = 35$, $KC = 4,0$; 1 — $x = 8$, 2 — $x = 4$

Изменение скорости во внешнем течении показано на рис. 5. Максимальные значения скорости в горизонтальном потоке для рассматриваемых случаев ($\beta = 35$, $KC = 2$ и $\beta = 35$, $KC = 4$) различаются почти на порядок. При увеличении расстояния от цилиндра ширина потоков постепенно увеличивается, скорость уменьшается.

Найденное в ходе численных исследований значение KC_{cr} для верхней границы режима S (см. рис. 1) хорошо согласуется с данными [14, 15]. В зоне высоких частот $\beta > 45$ моделирование проводилось в области $KC < KC_{cr} = 12,5\beta^{-2/5}$. Согласно [24] данное значение KC_{cr} соответствует границе области возникновения трехмерной неустойчивости течений.

Сравним результаты численных экспериментов в малоамплитудном диапазоне с данными, полученными по асимптотическим моделям [11, 12, 23], построенным при $\beta \gg 1$. В настоящее время границы области применимости этих моделей строго не обозначены. Согласно приведенной выше классификации решения, полученные в [11, 12], имеют структуру, характерную для режима S течения. При этом в предельном случае [11, 12] вторичные течения зависят от одного параметра — стационарного числа Рейнольдса Re_s . Рассмотрим скорости вторичного течения для случая $Re_s = 90$ (см. рис. 4). Заметим, что в решениях [11, 12] учитывается только главный стационарный член разложения порядка $1/\sqrt{\beta}$. При этом внутренняя вихревая система описывается членами более высокого порядка. Поэтому численное решение для $\beta = 141$, когда точка перехода между внутренней и внешней зонами находится в середине рассматриваемого диапазона, наиболее значительно отличается от общего массива данных. Данные, полученные при $\beta = 1035, 2000$ после достижения максимального значения (находящегося в области внешнего пограничного слоя вторичного течения), в целом соответствуют результатам асимптотического решения. Следует отметить, что численные данные, полученные при $\beta = 1035, 2000$, хорошо согласуются с результатами эксперимента [22] для $\beta = 8201$.

Оценки скорости внешних стационарных потоков (см. рис. 4), полученные при численном моделировании, значительно отличаются от асимптотических оценок. Как показывают результаты расчетов, скорость внешних потоков в рассматриваемом диапазоне существенно зависит от безразмерной частоты при постоянном значении Re_s . Такие эффекты при конечных значениях параметра β не описываются главным стационарным членом асимптотического разложения.

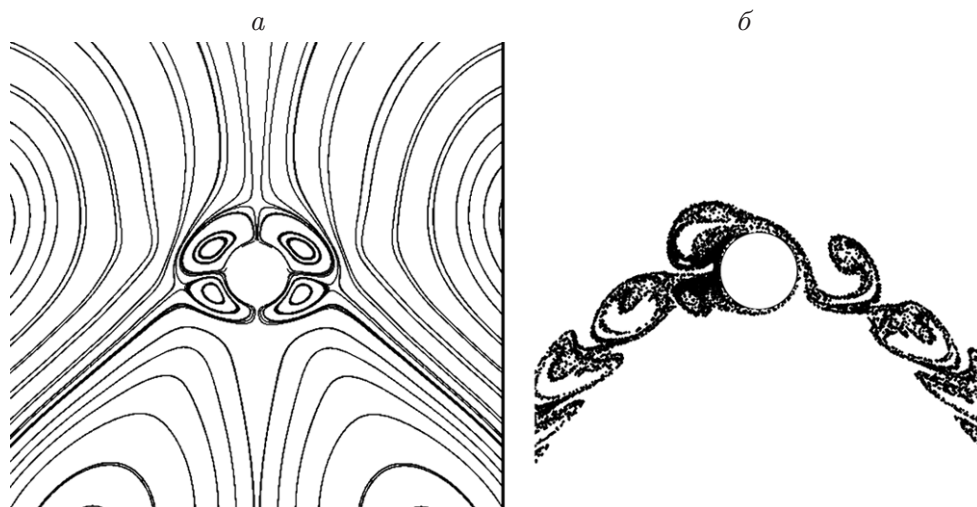


Рис. 6. Линии тока вторичного течения (а) и мгновенная картина течения (б) для режима V при $\beta = 35$, $KC = 5,5$

4.2. *Режимы течения при низкочастотных колебаниях.* Течение в области низкочастотных колебаний существенно зависит от обоих управляющих параметров осцилляционного процесса (KC и β). Вся область делится на зоны, где наблюдаются течения с различной структурой. При переходе между зонами структура течения меняется скачкообразно (наблюдается резкое изменение структуры при малых изменениях параметров), что указывает на существование различных режимов течения, смена которых происходит в результате бифуркаций.

При $KC > KC_{cr}$ ($\beta < 45$) течение вокруг цилиндра утрачивает горизонтальную симметрию (см. рис. 1). В низкочастотной области колебаний симметричный режим сменяется квазипериодическим режимом течения, который имеет место в узком диапазоне значений параметра KC вдоль границы режима S. Далее этот режим переходит в периодический V-образный режим течения (см. рис. 1).

Соответствующая V-образному режиму структура вторичного течения приведена на рис. 6. Как и в случае S-режима, течение делится на четыре зоны, в каждой из которых находятся внутренняя и внешняя вихревые ячейки. Однако размеры этих зон, расположенных выше и ниже оси колебаний, различаются. Преобладание верхних (см. рис. 6) или нижних вихревых зон является вариативным. Переход к одному из этих течений осуществляется в зависимости от выбора начального приближения. Потoki, формирующиеся между противоположно вращающимися вихрями и переносящие жидкость от цилиндра во внешнюю область, отклоняются от оси колебаний на угол, приблизительно равный 45° . Изменение направления потоков хорошо видно на рис. 7, где максимум скорости, соответствующий ядру потока, смещен относительно точки $y = 0$. При этом максимальное значение скорости и ширина потока (для представленных значений параметров) остаются приблизительно такими же, как и в случае режима S в окрестности границы области потери устойчивости (см. рис. 5).

Влияние, оказываемое вторичными потоками на полную картину течения в случае V-режима, показано на рис. 6, б, распределение частиц на котором хорошо согласуется с данными, полученными в экспериментах [14] и численных исследованиях [15, 16].

Течения в случае V-режима занимают большую зону параметрической области. Верхняя и нижняя границы области устойчивости этого режима являются функциями обоих управляющих параметров процесса (см. рис. 1). При переходе через верхнюю границу режим течения меняется на периодический двухпарный режим (D-режим).

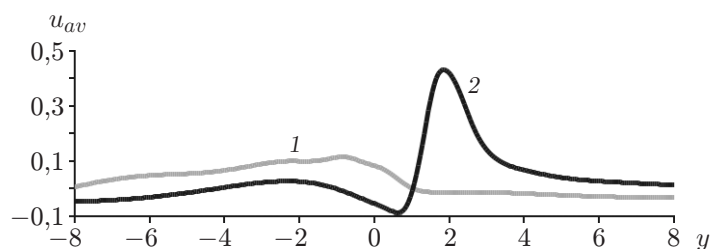


Рис. 7. Распределение горизонтальной компоненты скорости вторичного течения вдоль прямой $x = 4$ при $\beta = 35$, $КС = 5,5$ (1) и $\beta = 35$, $КС = 8,0$ (2)

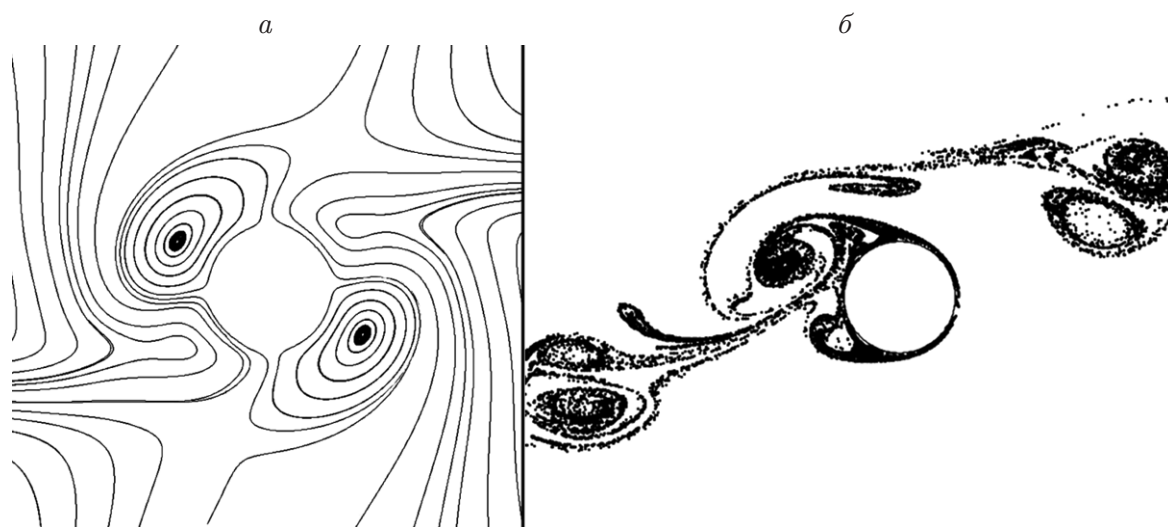


Рис. 8. Линии тока вторичного течения (а) и мгновенная картина течения (б) для режима D при $\beta = 35$, $КС = 8,0$

Структура вторичного течения в двухпарном режиме значительно отличается от наблюдаемых ранее (рис. 8). Внутренняя вихревая система, расположенная вблизи цилиндра, состоит из двух вихрей, центры которых расположены на прямой, проходящей через ось цилиндра под углом к оси колебаний, внешняя система — из четырех вихрей. При этом картина течения обладает симметрией вращения второго порядка (ось симметрии совпадает с осью цилиндра). Направления вторичных потоков, образующихся во внешнем течении, отклонены от оси колебаний (как и в случае V-режима течения). Максимальное значение скорости (см. рис. 7) этих потоков в несколько раз больше, чем в рассмотренных случаях, что свидетельствует об интенсификации вторичных течений при увеличении амплитуды колебаний цилиндра.

Образовавшиеся в результате взаимодействия с цилиндром вихревые пары (две за период) отрываются от него и формируют полноценные вихревые дорожки (расположенные вдоль направления основных вторичных потоков), которые медленно диссипируют во внешней области. Две такие пары вихрей хорошо видны на представленной на рис. 8, б мгновенной картине течения.

Заключение. В рассматриваемых диапазонах значений управляющих параметров вторичные течения имеют разнообразную структуру и характеристики.

В зоне малоамплитудных колебаний наблюдаются симметричные относительно оси колебаний режимы течения. Большой части этой области соответствует режим S, исследованный в [11, 12, 23] для случая $\beta \gg 1$. Сравнение результатов асимптотических

исследований с данными численного моделирования, проведенного в настоящей работе, показывает, что в области конечных значений $\beta \leq 2000$ при ненулевых амплитудах колебаний главный стационарный член асимптотического разложения (как для ограниченной области течения [11], так и для безграничной [12]) не позволяет корректно описать основные параметры вторичного течения.

В зоне низкочастотных колебаний в области течения выделяются четыре параметрические зоны с различными устойчивыми режимами течения. Смена режимов происходит скачкообразно. При переходе через значение KC_{cr} режимы течения становятся несимметричными относительно оси колебаний. Границы режимов являются функциями обоих управляющих параметров процесса.

Интенсивность массопереноса увеличивается с увеличением амплитуды колебаний, при этом направление основных потоков определяется конкретным режимом течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Faraday M.** On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // *Philos. Trans. Roy. Soc. London.* 1831. V. 121. P. 299–430.
2. **Lord Rayleigh.** On the circulation of air observed in kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // *Philos. Trans. Roy. Soc. London.* 1884. V. 175. P. 1–21.
3. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
4. **Riley N., Yan B.** Inviscid fluid-flow around a submerged circular-cylinder induced by free-surface traveling waves // *J. Engng Math.* 1996. V. 30. P. 587–601.
5. **Розенберг Д.** Физика и техника мощного ультразвука. М.: Наука, 1967.
6. **Бурдуков А. П., Накоряков В. Е.** О переносе массы в звуковом поле // *ПМТФ.* 1965. № 2. С. 62–66.
7. **Родченков В. И., Сергеев Д. А.** Исследование течений в жидкости, индуцированных сфокусированным ультразвуковым полем, и их применение для воздействия на рост монокристаллов // *ПМТФ.* 2009. Т. 50, № 4. С. 11–17.
8. **Frampton K. D., Martin S. E., Minor K.** The scaling of acoustic streaming for application in micro-fluidic devices // *Appl. Acoust.* 2003. V. 64. P. 681–692.
9. **Lutz B. R., Chen J., Schwartz D. T.** Microfluidics without microfabrication // *Proc. Nat. Acad. Sci.* 2003. V. 100. P. 4395–4398.
10. **Wang C. Y.** On high-frequency oscillating viscous flows // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. P. 55–68.
11. **Haddon E. W., Riley N.** The steady streaming induced between oscillating circular cylinders // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1979. V. 32, N 2. P. 265–282.
12. **Нуриев А. Н., Егоров А. Г.** Применение методов бифуркационного анализа для решения задач гидромеханики // *Вестн. Казан. технол. ун-та.* 2013. № 4. С. 104–109.
13. **Нуриев А. Н., Зайцева О. Н.** Решение задачи об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM // *Вестн. Казан. технол. ун-та.* 2013. № 8. С. 116–123.
14. **Tatsuno M., Bearman P. W.** A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan — Carpenter numbers and low Stokes numbers // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 211. P. 157–182.
15. **Elston J. R., Blackburn H. M., Sheridan J.** The primary and secondary instabilities of flow generated by an oscillating circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 550. P. 359–389.
16. **Dütsch H., Durst F., Becker S., Lienhart H.** Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan — Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 360. P. 249–271.

17. **Егоров А. Г., Камалутдинов А. М., Нуриев А. Н., Паймушин В. Н.** Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 2. Аэродинамическая составляющая демпфирования // *Механика композит. материалов*. 2014. Т. 50, № 3. С. 379–396.
18. **Нуриев А. Н., Захарова О. С.** Численное моделирование движения клиновидного двухмассового виброробота в вязкой жидкости // *Вычисл. механика сплошных сред*. 2016. Т. 9, № 1. С. 5–15.
19. **Morison J. R., O'Brien M. P., Johnson J. W., Schaaf S. A.** The force exerted by surface waves on piles // *Petrol. Trans.* 1950. V. 189. P. 149–157.
20. **Kuhtz S.** Experimental investigation of oscillatory flow around circular cylinders at low beta numbers: Ph. D. thesis / Univ. London. L., 1996.
21. **Suthon P., Dalton C.** Observations on the Honji instability // *J. Fluids Structures*. 2012. V. 32. P. 27–36.
22. **Bertelsen A. F.** An experimental investigation of high Reynolds number steady streaming generated by oscillating cylinders // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64. P. 589–697.
23. **Riley N.** The steady streaming induced by a vibrating cylinder // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. P. 801–812.
24. **Hall P.** On the stability of unsteady boundary layer on a cylinder oscillating transversely in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. P. 347–367.

*Поступила в редакцию 20/II 2016 г.,
в окончательном варианте — 18/VIII 2017 г.*
