

МЕТОД РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ПЕРЕМЕННЫХ ВИХРЬ — ФУНКЦИЯ ТОКА

А. С. Овчарова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Расчеты движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей в переменных вихрь — функция тока связаны с трудностями в реализации граничных условий на свободной поверхности. В работе предложен новый подход к развязке граничных условий, учитывающий специфику их задания на свободной поверхности. Разработан и реализован эффективный численный метод расчета стационарных течений жидкости. Проведены модельные расчеты для задач, имеющих точное решение.

Основные трудности решения задач в областях, имеющих свободную границу, связаны с тем, что граничные условия задаются на заранее неизвестных поверхностях, которые должны быть определены в процессе решения задачи. В настоящей работе выделяются два основных аспекта:

- а) разработка математической модели движения вязкой жидкости со свободной границей, куда входят основные уравнения, описывающие это движение, и граничные условия;
- б) реализация предлагаемого метода численного решения задачи.

1. Математическая модель. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотностью ρ с кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ заполняет область GB: $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq f(x)$, где $f(x)$ — неизвестная свободная поверхность (рис. 1). Вектор силы тяжести \mathbf{g} параллелен оси y и направлен вниз. Система уравнений, описывающих движение жидкости в переменных ω (вихрь), ψ (функция тока), имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (1.1)$$

$$\Delta \psi = -\omega. \quad (1.2)$$

Здесь $Re = v_0 h_0 / \nu$ — число Рейнольдса; в качестве масштаба давления выбрана величина

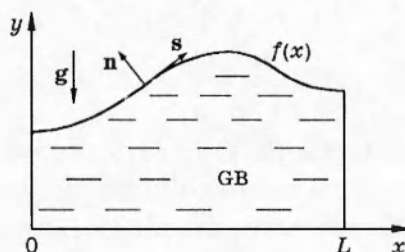


Рис. 1

ρv_0^2 ; v_0 , h_0 — характерные масштабы скорости и глубины жидкости. Функция тока введена соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Будем считать, что граничные условия на боковых и нижней границах области GB заданы. На свободной поверхности ставятся кинематическое условие и условия непрерывности нормальной и касательной компонент вектора напряжений.

Кинематическое условие имеет вид

$$f_t = v - f_x u. \quad (1.4)$$

Определяя векторы нормали и касательной к свободной поверхности $f(x)$ в каждой ее точке как

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}} \right\}, \quad \mathbf{s} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}}, \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2}} \right\},$$

запишем условие непрерывности нормальной компоненты вектора напряжений на свободной поверхности

$$P - P_0 = -\frac{\text{Ca}^{-1}}{\text{Re}} \frac{1}{R} + \frac{2}{\text{Re}(1+f_x^2)} \left[f_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - f_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \right], \quad \frac{1}{R} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{(1+f_x^2)^3}}. \quad (1.5)$$

Здесь P — давление жидкости на свободной поверхности; P_0 — внешнее давление (например, атмосферное); R — радиус кривизны $f(x)$; $\text{Ca} = \rho v_0 \nu / \sigma$ — параметр, называемый капиллярным числом.

Условие непрерывности касательной компоненты вектора напряжений имеет вид

$$2f_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (1 - f_x^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Исключая давление в уравнениях Навье — Стокса, записанных в переменных u , v , P , путем их перекрестного дифференцирования, получим, вообще говоря, уравнение четвертого порядка для функции тока ψ . Тогда (1.1) можно рассматривать как запись этого уравнения, где ω — функция, определяемая уравнением (1.2). При этом (1.1) выражает закон переноса вихря ω . Аналогичную операцию с исключением давления можно провести и для граничных условий [1]. Тогда, используя (1.3), для функции тока на границе области получим довольно громоздкое уравнение третьего порядка, которое содержит смешанные производные [2, 3]. Такое уравнение сложно как решать, так и анализировать, не говоря уже об огромной подготовительной работе, которую надо выполнить исследователю, особенно если определение свободной границы есть лишь фрагмент большой задачи. Имеет смысл ввести промежуточную функцию, которая, как и ω в основных уравнениях, подчиняется определенному закону, полученному на основе исходных уравнений.

Введем обозначение. Пусть

$$v_s = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{y=f(x)} \quad (1.7)$$

есть скорость жидкости в направлении касательной на свободной поверхности. Поскольку рассматривается только стационарное движение жидкости и свободная поверхность в этом случае является линией тока, на свободной поверхности выполняется соотношение [4]

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = -\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{G f_x}{\sqrt{1+f_x^2}}. \quad (1.8)$$

Здесь и далее время t рассматривается как параметр; $G = h_0 g / v_0^2$ — число Галилея; g — ускорение свободного падения.

Уравнение (1.5), следуя [1], можно представить в виде

$$F - F_0 = -\frac{\text{Ca}^{-1}}{\text{Re}} \frac{1}{R} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v_s}{\partial s}. \quad (1.9)$$

Дифференцируя (1.9) по s и подставляя результат в (1.8), получим

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + D, \quad (1.10)$$

где

$$D = \frac{\partial}{\partial s} \left(-P_0 + \frac{\text{Ca}^{-1}}{\text{Re}} \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{G f_x}{\sqrt{1 + f_x^2}}.$$

Из условия (1.6), учитывая стационарность течения, можно получить явное выражение для вихря на свободной поверхности [1]:

$$\omega = \frac{2}{R} v_s.$$

Граничное условие для функции тока следует из (1.7), где v_s — решение уравнения (1.10), которое обладает такими замечательными свойствами, как дивергентный вид относительно v_s и простота решения. При этом (1.10), (1.7) можно рассматривать как аналог двухполевого метода, записанного для свободной поверхности. Для определения свободной поверхности служит уравнение (1.4), которое можно записать в виде

$$f_t + \sqrt{1 + f_x^2} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0.$$

2. Метод решения. Отообразим область GB на прямоугольник $0 \leq \xi \leq L$, $0 \leq \eta \leq 1$ с помощью преобразования

$$x = \xi, \quad y = f(\xi)\eta.$$

Тогда все границы области GB, включая свободную поверхность, будут совпадать с координатными линиями новой сетки, а каждое из уравнений (1.1), (1.2) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{Bf} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - A\Phi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + A\Phi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right] + F. \quad (2.1)$$

Здесь

$$B_{11} = f(\xi), \quad B_{12} = -f_\xi \eta, \quad B_{22} = (1 + B_{12}^2) / f(\xi), \quad (2.2)$$

причем $B_{11} B_{22} - B_{12}^2 = 1$.

Если $\Phi = \omega$, то $B = \text{Re}$, $A = \text{Re}$, $F = 0$. Если $\Phi = \psi$, то $B = 1/\lambda$, $A = 0$, $F = \lambda\omega$ (λ — итерационный параметр, вводимый при решении уравнения Пуассона для ψ).

Введем обозначения:

$$U(\Phi) = B_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \bar{B}_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - A\Phi \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad V(\Phi) = B_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \bar{B}_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + A\bar{\Phi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{Bf} [U_{\xi}(\Phi) + V_{\eta}(\Phi)] + F, \quad (2.3)$$

а граничные условия на свободной поверхности ($\eta = 1$) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial \xi} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f_{\xi}^2}} \frac{\partial v_s}{\partial \xi} \right) + D, \quad (2.4)$$

где

$$D = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-P_0 + \frac{\text{Ca}^{-1}}{\text{Re}} \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left(B_{12} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - Gf_{\xi};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{v_s \sqrt{1 + f_{\xi}^2}}{B_{22}}; \quad (2.5)$$

$$\omega = \frac{2}{R} v_s; \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0. \quad (2.7)$$

Стоит отметить, что кинематическое условие (2.7) теперь выражает закон сохранения массы.

Решение уравнения (2.3) на каждом временном шаге будем искать по схеме стабилизирующей поправки [5], взятой в форме

$$\frac{\Phi^{k+1/2} - \Phi^k}{\tau} = \frac{1}{Bf} [U_{\xi}^k(\Phi) + V_{\eta}^{k+1/2}(\Phi)] + F,$$

$$\frac{\Phi^{k+1} - \Phi^{k+1/2}}{\tau} = \frac{1}{Bf} [U_{\xi}^{k+1}(\Phi) - U_{\xi}^k(\Phi)]. \quad (2.8)$$

Здесь

$$V^{k+1/2}(\Phi) = B_{12} \Phi_{\xi}^k + B_{22} \Phi_{\eta}^{k+1/2} + A \Phi^{k+1/2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

$$U^{k+1}(\Phi) = B_{11} \Phi_{\xi}^{k+1} + B_{12} \Phi_{\eta}^{k+1/2} - A \Phi^{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}. \quad (2.9)$$

Из (2.8), (2.9) следует, что уравнение (2.3) решается сначала в направлении η , а затем в направлении ξ . Далее будет показано, что последовательность направлений решения (2.3) для функций ψ и ω разная, а здесь важно лишь обозначить, что выражения для смешанных производных берутся с предыдущего полушага. Схема стабилизирующей поправки относится к классу экономичных разностных схем с дробными шагами, где первый шаг дает полную аппроксимацию уравнения, следующий является поправочным и служит цели улучшения устойчивости.

Для реализации схемы (2.8), (2.9) в прямоугольнике, соответствующем преобразованной области GB, строится прямоугольная расчетная сетка стандартным образом:

$$\xi_n = (n - 1)\Delta\xi, \quad \Delta\xi = L/NB, \quad n = 1, \dots, NN, \quad NN = NB + 1,$$

$$\eta_m = (m - 1)\Delta\eta, \quad \Delta\eta = 1/MB, \quad m = 1, \dots, MM, \quad MM = MB + 1.$$

Дифференциальные выражения типа $(a_{11}\Phi_\xi)_\xi$, $(a_{22}\Phi_\eta)_\eta$, $(a_1\Phi)_\xi$, $(a_2\Phi)_\eta$ аппроксимируем со вторым порядком точности конечно-разностными аналогами Λ_{11} , Λ_{22} , Λ_1 , Λ_2 , которые имеют традиционное представление [5, 6]. Для аппроксимации смешанной производной, например $(a_{12}\Phi_\xi)_\eta$, согласно [7], использован оператор

$$\Lambda_{12}\Phi = \frac{(a_{12})_{n,m+1}(\Phi_{n+1,m+1} - \Phi_{n-1,m+1}) - (a_{12})_{n,m-1}(\Phi_{n+1,m-1} - \Phi_{n-1,m-1})}{4\Delta\xi\Delta\eta}.$$

Оператор $\Lambda_{21}\Phi$ определяется аналогично. Тогда схема (2.8), (2.9) будет аппроксимировать (2.3) с точностью $O(\tau + h^2)$.

После замены в (2.8) производных соответствующими конечными разностями и подстановки вместо $V_\eta(\Phi)$ и $U_\xi(\Phi)$ их разностных аналогов из (2.9) на каждом полушаге по времени для всех внутренних точек ($n = 2, \dots, NB$; $m = 2, \dots, MB$) получим систему линейных разностных уравнений относительно функции $\Phi(\xi_n, \eta_m)$. Система имеет трехдиагональную структуру с преобладанием диагональных элементов матрицы и может быть эффективно решена методом прогонки с учетом специфики граничных условий.

Уравнение (2.4) относится к уравнениям типа Бюргерса — Хопфа с правой частью. Как показано в [7, 8], при аппроксимации и получении численного решения существенное значение имеет представление такого уравнения в консервативной форме. Запишем (2.4) в виде

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (v_s)^2 - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f_\xi^2}} \frac{\partial v_s}{\partial \xi} \right) + D$$

и аппроксимируем второе слагаемое в левой части следующим образом [8]:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (v_s)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(v_s^2)_{n+1}^{k+1} - (v_s^2)_{n-1}^{k+1}}{2\Delta\xi} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(v_s)_{n+1}^k (v_s)_{n+1}^{k+1} - (v_s)_{n-1}^k (v_s)_{n-1}^{k+1}}{2\Delta\xi}.$$

Первое слагаемое в правой части аппроксимируем на верхнем временном слое $(k + 1)$ разностным оператором Λ_{11} , остальные дифференциальные операторы имеют также традиционное представление. Для производной по η на границе области используется односторонняя аппроксимация второго порядка, причем значение $\partial\omega/\partial n$ берется с предыдущего временного шага. Получаемая при этом система разностных уравнений имеет трехдиагональную структуру и решается методом прогонки. Граничные условия для решения (2.4) могут быть определены из граничных условий для ψ , заданных на боковых стенках области GB, а также из физической постановки задачи.

3. Расчет вихря и функции тока. Основную идею предлагаемого метода решения уравнения (2.3) с граничными условиями (2.4)–(2.7) можно выразить так. Среди основных сеточных функций $\omega(\xi_n, \eta_m)$ и $\psi(\xi_n, \eta_m)$ выделяется некоторая группа неизвестных, называемых параметрами, через которые можно выразить основные неизвестные во всех внутренних точках рассматриваемой области. Например, для вихря это будут значения ω на границах области, а для функции тока — значения ψ в приграничных точках. Получив соотношения, содержащие только эти параметры, решаем их с помощью граничных условий. Определив параметры, восстанавливаем все значения основных неизвестных во всех точках области.

Опишем этапы перехода с k -го на $(k + 1)$ -й временной слой. Пусть в момент времени $t_k = k\tau$ известны поля функции тока и вихря, а также положение свободной поверхности, при котором они были найдены.

Этап I. Из уравнения (2.7) определим новое положение свободной поверхности, соответствующее моменту времени $t_{k+1} = (k+1)\tau$, а по формулам (2.2) — матрицу коэффициентов B_{11} , B_{12} , B_{22} . Решая уравнение (2.4), находим граничные условия для ψ и ω на свободной поверхности по формулам (2.5) и (2.6) соответственно.

Этап II. Сначала уравнение (2.3) для вихря решается в направлении ξ . Граничное условие для него берется с нижнего временного слоя. Получаемые системы разностных уравнений решаются методом обычной прогонки. Затем (2.3) решается в направлении η . Решение систем разностных уравнений ищем с помощью метода прогонки с параметром [9], т. е.

$$\omega(n, m) = P(n, m)\omega^*(n) + Q(n, m)\omega^{**}(n) + \bar{\omega}(n, m), \quad (3.1)$$

где $\omega^*(n)$ — неизвестные пока значения вихря на нижней границе области ($\eta = 0$); $\omega^{**}(n)$ — значение вихря на свободной поверхности ($\eta = 1$); $P(n, m)$, $Q(n, m)$, $\bar{\omega}(n, m)$ — известные двумерные массивы, причем $P(n, 1) = 1$, $Q(n, 1) = 0$, $\bar{\omega}(n, 1) = 0$, $P(n, MM) = 0$, $Q(n, MM) = 1$, $\bar{\omega}(n, MM) = 0$. Запоминаем массивы $P(n, m)$, $Q(n, m)$, $\bar{\omega}(n, m)$ и переходим к следующему этапу.

Этап III. Рассмотрим какое-либо конкретное условие на нижней границе области GB ($\eta = 0$). Пусть, например, нижняя граница будет твердой непроницаемой стенкой, на которой граничные условия заданы в виде условий вязкого прилипания. Тогда, используя для связи вихря и функции тока на границе формулу Тома [7], можно записать:

$$\psi \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \omega^*(n) = -\frac{2}{(\Delta\eta)^2} \frac{1}{f^2} \psi_{n,2}. \quad (3.2)$$

На верхней границе ($\eta = 1$) выполнены соотношения (2.5) и (2.6) соответственно:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \Big|_{\eta=1} = \frac{v_s \sqrt{1 + f_\xi^2}}{B_{22}} \Big|_{\eta=1}, \quad \omega^{**}(n) = \frac{2}{R} v_s. \quad (3.3)$$

Решая (2.3) для функции тока в направлении η с учетом (3.1) и (3.2), для каждого n получим систему разностных уравнений вида

$$-a_m \psi_{m-1} + b_m \psi_m - c_m \psi_{m+1} = F_m - A_m \psi_2 \quad (3.4)$$

(индексы, содержащие n , для простоты записи опущены). Решение (3.4), учитывая граничное условие для ψ (3.3), естественно искать в виде [10]

$$\psi_m = S(m)\psi_2 + T(m)\psi_{MB} + \bar{\psi}(m), \quad (3.5)$$

где ψ_2 , ψ_{MB} — неизвестные пока функции, а $S(m)$, $T(m)$, $\bar{\psi}(m)$ — известные массивы, причем

$$S(1) = T(1) = \bar{\psi}(1) = 0,$$

$$S(MM) = 0, \quad T(MM) = 1, \quad \bar{\psi}(MM) = \frac{\Delta\eta v_s \sqrt{1 + f_\xi^2}}{B_{22}} \Big|_{\eta=1}.$$

Подставляя в левую часть (3.5) последовательно ψ_2 и ψ_{MB} , получаем систему двух линейных уравнений для определения этих функций. Затем по формулам (3.5) восстанавливаем ψ во всех точках области. Для простоты изложения метода производная $\partial\psi/\partial\eta$ аппроксимирована с первым порядком. Понятно, что порядок аппроксимации может быть повышен до любых разумных пределов. Тогда в правой части (3.5) появятся слагаемые с теми значениями ψ_m , которые привлекались для аппроксимации $\partial\psi/\partial\eta$ на верхней границе области.

Далее (2.3) решается в направлении ξ с учетом граничных условий. Этап III повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\max_{n,m} \left| \frac{|\psi_{n,m}^{s+1}| - |\psi_{n,m}^s|}{|\psi_{n,m}^{s+1}|} \right| < \varepsilon,$$

где s — номер итерации; ε — заданная точность.

Этап IV. После завершения третьего этапа находим $\omega^*(n)$ с помощью формул (3.2), а затем восстанавливаем ω во всех точках области с помощью формулы (3.1). Таким образом, переход на новый временной слой завершен. Далее процесс повторяется, пока не будет получено стационарное решение, которое считается найденным, если выполняется условие

$$\max_n |f_n^{k+K} - f_n^k| < \varepsilon$$

(K — заданное число шагов, ε — заданная точность).

ЗАМЕЧАНИЕ. Полагая скорость по нормали $v_n = 0$ и «заставляя» свободную поверхность в любой момент времени быть линией тока (уравнение (1.8)), тем самым вводим ограничение на класс решаемых задач. Отсюда следует, что предложенным методом можно решать только те задачи, которые имеют устойчивое стационарное решение.

4. Примеры расчета. Для проверки точности и эффективности численного алгоритма необходимо использовать либо точные решения модельных уравнений (если таковые имеются), либо хорошо изученные и решаемые другими исследователями приближенные решения.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим задачу, предложенную в [2], где имеется и точное решение линейаризованной системы, и приближенное решение полных уравнений. Пусть вязкая несжимаемая жидкость совершает движение в бесконечной полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq f(x)$. На нижней границе области $y = 0$ заданы условия на профиль скорости, которые в терминах ψ имеют вид

$$\psi = \psi_m \sin \frac{2\pi}{L} x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Верхняя граница жидкости $y = f(x)$ — свободная поверхность. Обезразмеривание уравнений (1.1), (1.2) проведем так же, как и в [2], выбрав в качестве масштабов длины, времени и функции тока соответственно h_0 , h_0^2/ν , ν . Будем искать стационарное решение задачи, удовлетворяющее условию периодичности:

$$\psi(x+L, y) = \psi(x, y), \quad \omega(x+L, y) = \omega(x, y), \quad f(x+L, y) = f(x, y).$$

Линеаризованная задача при таких граничных условиях имеет аналитическое решение

$$f_0 = 1 - \psi_{\pi_1} \frac{2k^2 (\operatorname{ch} k + k \operatorname{sh} k)}{(\operatorname{sh} k \operatorname{ch} k - k)(G + \operatorname{Ca}^{-1} k^2/\operatorname{Re})} \cos kx, \quad k = \frac{2\pi}{L}. \quad (4.1)$$

Из условия периодичности и вследствие симметрии профиля скорости на нижней границе стационарное решение оказывается симметричным. Перейдя к новым переменным (ξ, η) , граничные условия для ψ и ω на левой и правой границах можно записать в виде

$$\psi|_{\xi=0} = \omega|_{\xi=0} = 0, \quad \psi|_{\xi=L} = \omega|_{\xi=L} = 0, \quad v_s|_{\xi=0} = v_s|_{\xi=L} = 0,$$

P_0 в (2.4) тоже полагаем равным 0.

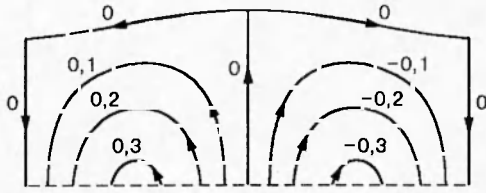


Рис. 2

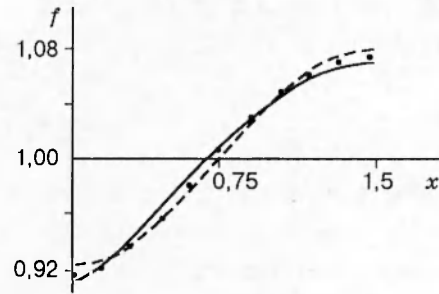


Рис. 3

Для связи вихря и функции тока на нижней границе ($\eta = 0$) использован подход Тома:

$$\omega_{n,1} = -2 \frac{\psi_{n,2} - \psi_{n,1}}{f^2(\Delta\eta)^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right)_{n,1}.$$

На свободной поверхности граничные условия для ψ и ω заданы соотношениями (2.5) и (2.6) соответственно, где v_s — решение уравнения (2.4). Расчеты по предлагаемому методу проводились на различных сетках. На рис. 2 представлены изолинии функции тока для течения, рассчитанного на сетке 21×11 при значениях параметров $L = 3$, $\text{Ca}^{-1} = 0$, $\psi_m = 0,32$, $G = 32$. Форма искривления свободной поверхности $f(x)$ приведена на рис. 3. Штриховой линией нанесен график функции $f_0(x)$, определяемой формулой (4.1). Точками обозначено решение этой задачи, полученное в [2] на сетке 24×21 . Амплитуда искривления свободной поверхности $\delta = \max_x f(x) - \min_x f(x)$ отклоняется от величины δ_0 , получаемой из (4.1), менее чем на 1 %.

Задача решена в предположении, что поверхностное натяжение жидкости равно нулю. Тогда, как следует из (4.1), будет получена максимальная амплитуда искривления свободной поверхности при заданных G и ψ_m . Однако поверхностное натяжение играет очень важную роль в формировании свободной поверхности, особенно в областях с малыми размерами. Кроме того, оно выступает как стабилизатор устойчивости решения. Этот факт наглядно проявился при исследовании решения задачи, проведенном для тех же значений L , G , ψ_m , что были рассмотрены выше, и $0 < \text{Ca}^{-1} \leq 100$. Результаты расчетов, полученные автором, совпадают с результатами [2].

ПРИМЕР 2. В начальный момент времени жидкость, заполняющая область $GB \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 1\}$, находится в состоянии покоя. Здесь $x = 0$, $x = L$, $y = 0$ — твердые непроницаемые стенки; $y = 1$ — свободная поверхность. Источник возмущения — переменная по x область внешнего давления $P_0 = P_0(x)$, приложенная к свободной поверхности.

Граничные условия на твердых стенках:

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=L} = 0, \quad \psi|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{y=0} = 0, \quad v_s|_{x=0} = v_s|_{x=L} = 0.$$

Для связи функции тока и вихря на твердых стенках используется условие Тома.

Для определения граничных условий на свободной поверхности решается уравнение (2.4), где P_0 — заданная функция. Чтобы задать P_0 , воспользуемся результатами решения первого примера. Решив задачу 1 при $\text{Ca}^{-1} = 0,03$ и $P_0 = 0$, получим в явном виде распределение давления на свободной поверхности по формуле (1.9) в виде некоторой функции

$$P|_{\eta=1} = P(\xi).$$

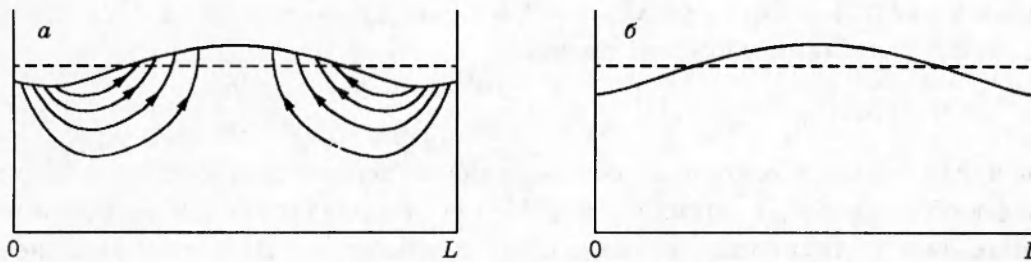


Рис. 4

На рис. 4 представлены результаты расчета для $Ca^{-1} = 0,03$, $G = 32$ и $P_0 = 3\bar{P}(\xi)$. Штриховой линией показано положение свободной поверхности в начальный момент времени, сплошными линиями — положение свободной поверхности и изолинии функции тока в некоторый промежуточный момент времени, до момента установления (а) и на момент установления (б).

ПРИМЕР 3. Пусть в начальный момент времени жидкость, заполняющая область GB $\{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 2\}$, находится в состоянии покоя. Источник возмущения — вращение пары цилиндров, перпендикулярных плоскости течения жидкости, геометрическими размерами которых можно пренебречь. Такой источник возмущений можно трактовать как задание пары вихрей внутри области (рис. 5):

$$\omega(x_0, 1) = -\omega_0, \quad \omega(L - x_0, 1) = \omega_0.$$

Граничные условия на нижней границе области GB ($y = 0$) зададим в виде условий вязкого прилипания

$$\psi|_{y=0} = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{y=0} = 0,$$

на левой и правой границах области GB — условия проскальзывания

$$\psi|_{x=0} = \omega|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=L} = \omega|_{x=L} = 0.$$

Задачу проще всего решать, разбив область GB на 2 подобласти GB₁ и GB₂, как это сделано в [11]. В результате источник возмущения переносится изнутри области на границу, общую для обеих подобластей (штриховая линия). Верхняя подобласть GB₁ отображается на прямоугольник по формулам, описанным в п. 2. В каждом из прямоуголь-

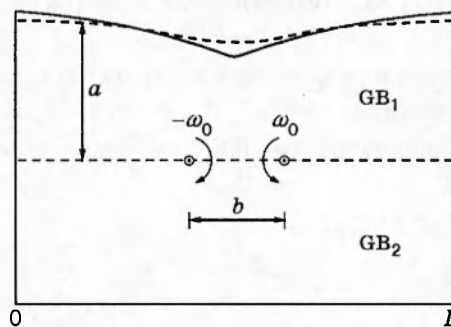


Рис. 5

ников строится расчетная сетка размером 21×11 , и задача решается локально в каждой из подобластей с условиями на общей границе

$$\omega(n, MM)|_{GB_2} = \omega(n, 1)|_{GB_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{(n, MM), GB_2} = \frac{\partial \psi}{\partial y}|_{(n, 1), GB_1}.$$

Чтобы найти распределение ω на общей границе, решается уравнение для вихря в направлении ξ в области GB_2 на линии $\eta = 1$. Метод стабилизирующей поправки на первом дробном шаге дает полную аппроксимацию этого уравнения. Второе условие использовано для определения ψ в каждой из подобластей GB_1 и GB_2 методом, описанным в п. 3 (этап III). Для связи вихря и функции тока на нижней границе области GB_2 использовано условие Тома. На рис. 5 представлены результаты расчета, проведенного для $b/a = 0,6$, $\omega_0 = 12$, $G = 70$, $Ca^{-1} = 0$ и $Ca^{-1} = 0,5$. Здесь b — расстояние между вихрями, a — расстояние от общей границы подобластей GB_1 и GB_2 до свободной поверхности GB_1 в начальный момент времени. Положение свободной поверхности в момент установления для $Ca^{-1} = 0$ обозначено сплошной линией, для $Ca^{-1} = 0,5$ — штриховой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01546).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Движение вязкой жидкости со свободными границами: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 1989.
2. Непомнящий А. А., Тарунин Е. Л. Двухполевой метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью // Мат. модели течений жидкости: Тр. VI Всесоюз. семин. по числ. методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1978. С. 197–206.
3. Ильин А. В., Ривкин В. Я. Приближенное решение задачи стекания пленочной жидкости с угла // Задачи гидромеханики и тепломассообмена со свободными границами: Межвуз. сб. науч. тр. / Новосибирск: НГУ, 1978. С. 80–91.
4. Суд, Элрод (мл.). Численное решение уравнений Навье — Стокса в двухсвязных областях для течения несжимаемой жидкости // Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12, № 5. С. 76–82.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
8. Остапенко В. В. Метод теоретической оценки дисбалансов неконсервативных разностных схем на ударной волне // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295, № 2. С. 292–297.
9. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981.
10. Воеводин А. Ф. Устойчивость и реализация неявных схем для уравнений Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 1. С. 119–130.
11. Овчарова А. С. Метод решения двумерной многофронтальной задачи Стефана // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 110–119.

Поступила в редакцию 23/IV 1996 г.,
в окончательном варианте — 8/VII 1996 г.