

УДК 532.5.032, 533.6.011.5

**Численное моделирование развития
неустойчивых возмущений различных мод
и начальных стадий ламинарно-турбулентного
перехода в пограничном слое
при числе Маха потока $M = 6^*$**

Д.В. Хотяновский, А.Н. Кудрявцев

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

E-mail: khotyanovsky@itam.nsc.ru

На основе полных нестационарных уравнений Навье–Стокса сжимаемого газа проводится прямое численное моделирование линейных и нелинейных стадий развития неустойчивых возмущений различных мод и начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на плоской пластине при числе Маха набегающего потока $M = 6$. Показано существенное влияние трехмерных неустойчивых возмущений на инициирование ламинарно-турбулентного перехода.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, ламинарно-турбулентный переход, сверхзвуковой пограничный слой.

Введение

Хорошо известно, что переход к турбулентности в пограничном слое приводит к существенному увеличению действующей на обтекаемое тело силы сопротивления. При больших сверхзвуковых числах Маха полета ламинарно-турбулентный переход сопровождается также значительным увеличением тепловых потоков, что является критически значимой проблемой гиперзвукового полета. Поэтому выяснение механизмов турбулизации пограничного слоя при больших числах Маха потока и, особенно, нахождение возможных способов управления переходом, является важной научной проблемой, решение которой весьма актуально для создания новых скоростных летательных аппаратов.

В соответствии с общепринятой точкой зрения, начальные стадии ламинарно-турбулентного перехода в высокоскоростных пограничных слоях определяются пространственным ростом неустойчивых возмущений малой амплитуды. В соответствии с линейной теорией устойчивости и имеющимися экспериментальными данными при больших числах Маха

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 14-11-00490).

в пограничном слое доминируют неустойчивые возмущения второй моды, впервые идентифицированные Л. Мэком [1, 2]. При этом наибольшие инкременты нарастания имеют возмущения, распространяющиеся под нулевым углом к направлению скорости потока. Наклонные трехмерные возмущения первой и второй мод также неустойчивы, но имеют значительно меньшие инкременты нарастания. Линейная и нелинейная динамика возмущенного пограничного слоя при больших числах Маха включает в себя сложное взаимодействие волн неустойчивости в широком спектре, конкуренцию различных мод возмущений и может приводить к совершенно различным сценариям перехода в зависимости от условий вверх по потоку.

Предыдущие численные и экспериментальные исследования развития неустойчивых возмущений в пограничных слоях при больших сверхзвуковых числах Маха потока [3–14] фокусировались на исследовании развития неустойчивых акустических возмущений второй моды [3–5], восприимчивости переходного пограничного слоя к внешним акустическим возмущениям [6–8], влиянию локализованного нагрева и охлаждения стенки на возмущения второй моды [9], подавлению развития неустойчивых акустических возмущений с помощью пористых покрытий [10–12]. Влияние пористости поверхности на устойчивость и переход в сверхзвуковом пограничном слое исследовались также в работах [13, 14]. Поскольку при больших сверхзвуковых числах Маха наибольшие инкременты нарастания имеют двумерные возмущения, численное исследование начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода может быть выполнено в двумерной постановке [15, 16]. При этом за рамками исследования остаются неустойчивые возмущения, распространяющиеся под углом к основному течению. Исследование нелинейного межмодового взаимодействия требует проведения полного трехмерного численного моделирования.

В настоящей работе на основе полных нестационарных уравнений Навье–Стокса сжимаемого газа проводится прямое численное моделирование линейных и нелинейных стадий пространственного развития неустойчивых возмущений различных мод и начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на плоской пластине при числе Маха набегающего потока $M = 6$.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о развитии неустойчивого пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой под нулевым углом атаки сверхзвуковым потоком воздуха с числом Маха $M = 6$. Течение описывается в рамках модели сплошной среды для совершенного сжимаемого вязкого теплопроводного газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$. Решаются полные трехмерные уравнения Навье–Стокса, предполагается справедливость гипотезы Стокса для вязких напряжений и закона Фурье для тепловых потоков. Динамическая вязкость μ зависит от температуры T по степенному закону с показателем 0,76. Число Прандтля $Pr = 0,72$. Схема течения и вычислительной области представлена на рис. 1. Начало декартовой системы координат располагается на острой передней кромке плоской пластины. Ось x совпадает с направлением вектора скорости U невозмущенного сверхзвукового потока, ось y направлена по нормали к пластине, ось z — вдоль передней кромки. Пластина предполагается бесконечной по размаху z и полубесконечной вдоль координаты x . Вычислительная область имеет форму параллелепипеда, нижняя грань которого совпадает с плоскостью пластины $y = 0$. Размеры области по координатам x , y и z равны соответственно L_x , L_y и L_z . Левая граница вычислительной области находится на расстоянии $x = x_0$ от передней кромки. Предполагается, что течение в пограничном слое в диапазоне координат $0 < x < x_0$ является ламинарным и автомодельным. Локальная толщина пограничного слоя определяется как $\delta = \sqrt{\nu_\infty x / U_\infty}$, где U_∞ , ν_∞ — соответственно скорость и кинематическая вязкость в набегающем потоке. В качестве масштаба длины

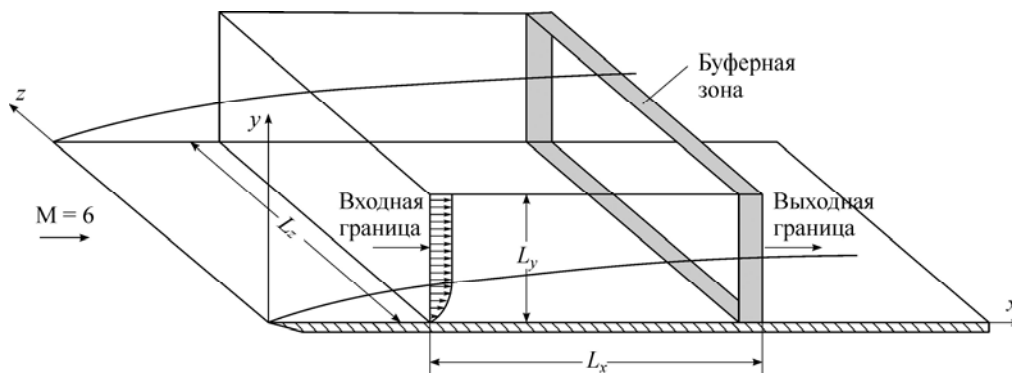


Рис. 1. Схема расчетной области.

используется толщина пограничного слоя $\delta_0 = \sqrt{\nu_\infty x_0 / U_\infty}$ в сечении $x = x_0$, соответствующем входной границе вычислительной области. Положение входной границы выбиралось на достаточном расстоянии от передней кромки пластины в сечении, соответствующем числу Рейнольдса, определенному по локальной толщине пограничного слоя, $Re = U_\infty \delta_0 / \nu_\infty = 1000$. Число Рейнольдса, определенное по расстоянию от передней кромки пластины, в этом сечении равно $Re_x = U_\infty x / \nu_\infty = Re^2 = 10^6$. Как показывают данные линейной теории, при таком числе Рейнольдса и первая, и вторая моды являются неустойчивыми.

2. Методика численного моделирования

Моделирование развития неустойчивого пограничного слоя и перехода к турбулентности основано на прямом численном решении трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса с использованием комплекса программ CFS3D, разработанного в Лаборатории вычислительной аэродинамики ИТПМ СО РАН. Для пространственной дискретизации конвективных членов используется конечно-разностная WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) схема [17] 5-го порядка точности. Диффузионные члены уравнений Навье–Стокса аппроксимируются с помощью центрально-разностных формул 4-го порядка на компактном шаблоне. Численный алгоритм является явным, для интегрирования численного решения по времени используется алгоритм Рунге–Кутты–Гилла [18] 4-го порядка точности. Шаг по времени автоматически выбирается в процессе численного расчета из условия устойчивости интегрирования по времени. Метод численного решения уравнений Навье–Стокса подробно обсуждался в работе [19] и был ранее использован авторами при исследовании нелинейных стадий неустойчивости в пограничном слое при $M = 2$ [20]. Численный алгоритм распараллелен методом декомпозиции расчетной области и использует обмен данными MPI между соседними подобластями. Параллельная эффективность кода составляет около 80 % при использовании 64 центральных процессоров вычислительного кластера.

Процесс численного моделирования развития неустойчивого пограничного слоя состоит из нескольких этапов. На первом этапе производится расчет ламинарного основного течения. Так как основное течение является однородным по трансверсальной координате z , расчеты проводятся в двумерной постановке. На левой границе расчетной области ($x = x_0$) задаются профили продольной и нормальной компонент вектора скорости и температуры, полученные из автомодельного решения для сжимаемого пограничного слоя в данном сечении по x , и давление невозмущенного потока. На верхней границе ($y = L_y$), а также на выходной границе ($x = x_0 + L_x$) значения переменных экстраполируются

изнутри расчетной области. На поверхности пластины ($y = 0$) задаются условия прилипания и равенства нулю нормальной производной давления. Отношение температуры стенки T_w к температуре на внешней границе пограничного слоя T_e было взято равным $T_w/T_e = 7,053$, что соответствует случаю ламинарного обтекания адиабатически изолированной пластины при числе $M = 6$. В качестве начальных данных во всей области задается автомодельное решение для соответствующих сечений по x . Расчет основного течения производится методом установления по времени. Размер вычислительной области по продольной координате задавался достаточно большим — $L_x = 4500$, размер по нормальной координате равнялся $L_y = 150$. Расчетная сетка сгущалась по нормальной координате в области пограничного слоя. В расчетах использовалась прямоугольная структурированная расчетная сетка с числом ячеек по продольной и нормальной координате $N_x = 2304$ и $N_y = 250$ соответственно.

На втором этапе на основе решения полных трехмерных уравнений Навье–Стокса проводится расчет пространственного развития неустойчивых возмущений в пограничном слое. При этом на входной границе задается нестационарное возмущенное поле в виде собственных функций линейной задачи устойчивости. В задаче устойчивости рассматриваются возмущения, зависящие от времени и пространственных координат x, z как $\exp[i(ax + \beta z - \omega t)]$. Здесь ω — вещественная круговая частота возмущения, $a = a_r + i a_i$, a_r и β — составляющие волнового вектора вдоль x и z соответственно, $-a_i$ — коэффициент роста возмущения. Для решения задачи устойчивости используется программа VBLS3D, разработанная в Лаборатории вычислительной аэродинамики ИТПМ СО РАН. В программе VBLS3D реализован алгоритм решения методом стрельбы вязкой задачи устойчивости в локально-параллельном приближении.

При проведении прямого численного моделирования на выходной границе задаются мягкие неотражающие граничные условия, а для предотвращения отражения возмущений в расчетную область перед выходной границей проводится реламинаризация возмущений в специальной буферной области (sponge layer) [21]. Результаты тестовых расчетов свидетельствуют о минимальном возмущающем действии выходной границы на поле течения внутри расчетной области. При проведении трехмерных расчетов используются периодические граничные условия по трансверсальному направлению, а размер вычислительной области по координате z задается равным длине волны трехмерного линейного возмущения по координате z . Число ячеек N_z по трансверсальной координате составляло от 48 до 72, таким образом, общее число ячеек в трехмерной вычислительной области составляло от 27,6 до 41,4 млн. Расчеты проводились на вычислительном кластере Новосибирского государственного университета с использованием до 96 ядер ЦПУ.

3. Результаты численного моделирования

На рис. 2 приведены профили продольной компоненты скорости и температуры, полученные в численном расчете ламинарного основного течения при числе Рейнольдса $Re_{\delta 0} = 1000$, определенном по толщине пограничного слоя во входном сечении. Сплошными кривыми представлены соответствующие профили, полученные из автомодельного решения уравнений ламинарного пограничного слоя. Как видно из рис. 2, результаты численных расчетов хорошо согласуются с автомодельными профилями основного течения.

Исследование характеристик линейной устойчивости при заданных параметрах позволяет определить область неустойчивости возмущений и их коэффициенты роста. Нейтральные кривые в плоскости Re, F , где $F = v_{\infty} \omega / U_{\infty}^2$ — частотный параметр, показаны на рис. 3а для двух углов распространения возмущений: $\chi = \arctg(\beta / \alpha_r) = 0^\circ$ и 57° . Нейтральная кривая при $\chi = 0^\circ$ фактически состоит из двух частей: верхняя часть соответствует

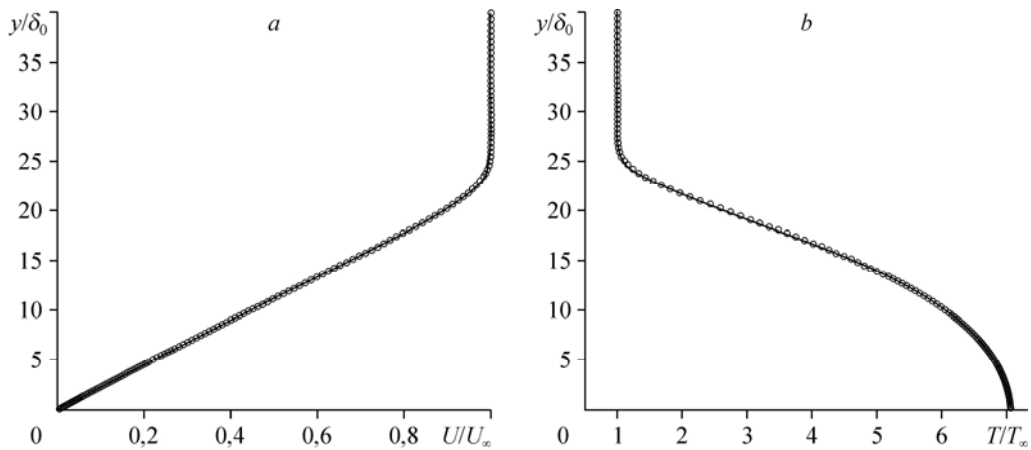


Рис. 2. Профили продольной компоненты скорости (а) и температуры (б) основного течения (символы) в сравнении с автомоделным решением (сплошные кривые) в сечении $x/\delta_0 = 2000$.

акустическим возмущениям второй моды, нижняя — вихревым возмущениям первой моды. При угле $\chi = 57^\circ$ коэффициент роста возмущения первой моды находится вблизи максимума, в то время как возмущения второй моды полностью стабилизируются. Зависимость коэффициентов роста от частотного параметра для этих двух значений χ при $Re = 1000$ приведены на рис. 3б. Как видно, во входном сечении наиболее неустойчивым является двумерное возмущение второй моды с частотным параметром $F_{\max} = 1,4 \cdot 10^{-4}$ и инкрементом нарастания $-\alpha_i \delta = 3,35 \cdot 10^{-3}$. Коэффициенты роста двумерных возмущений первой моды на порядок меньше. При увеличении угла χ инкременты возмущений второй моды уменьшаются, в то время как инкременты первой моды растут вплоть до значений угла $\chi = 62^\circ$, хотя даже при этом значении угла они остаются приблизительно в три раза меньше коэффициентов роста двумерных возмущений второй моды.

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования развития наиболее неустойчивого возмущения второй моды достаточно малой амплитуды, при которой можно пренебречь нелинейными эффектами. Сплошные огибающие соответствуют экспоненциальному нарастанию возмущения по линейной теории для профиля во входном сечении. Как видно из рис. 4, изменение амплитуды возмущения в продольном направлении

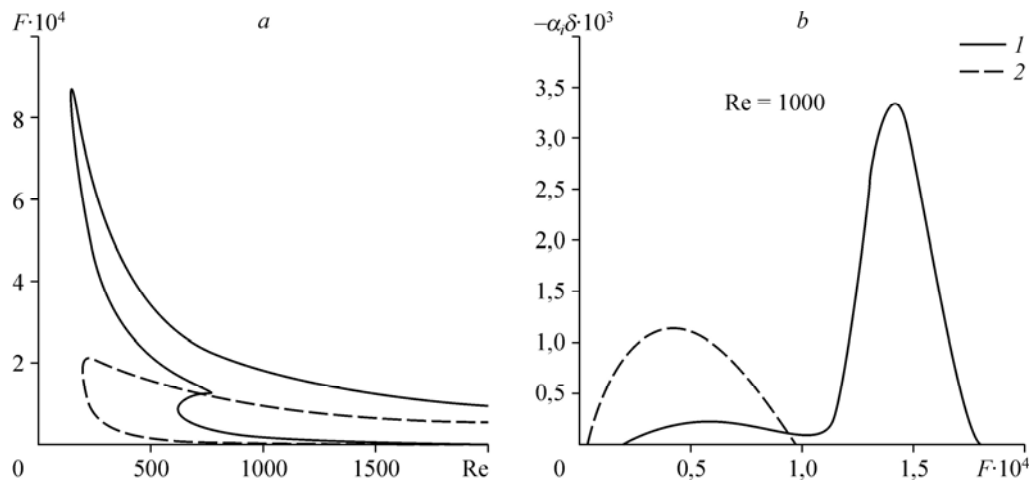


Рис. 3. Кривые нейтральной устойчивости (а) и коэффициенты роста (б) для пограничного слоя при $M = 6$.
 $\lambda = 0^\circ$ (1), 57° (2).

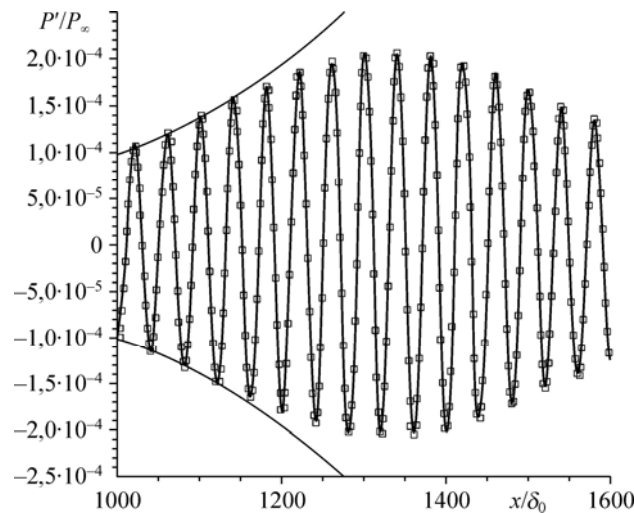


Рис. 4. Развитие малого двумерного возмущения второй моды в прямом численном моделировании. Пульсации давления на стенке.

Сплошные кривые соответствуют экспоненциальному росту с инкрементом нарастания, полученным из линейной теории для сечения $x/\delta_0 = 1000$.

на начальном участке идеально соответствует экспоненциальному росту с инкрементом, предсказанным линейной теорией. Ниже по потоку, вследствие изменения характеристик основного течения (увеличения локальной толщины пограничного слоя), инкремент нарастания возмущения заданной частоты уменьшается и, в конечном счете, возмущение становится устойчивым. Как показывают расчеты по линейной теории, пространственный диапазон неустойчивости возмущения второй моды заданной частоты достаточно небольшой (см. рис. 3а). По мере увеличения толщины пограничного слоя изначально неустойчивое возмущение второй моды быстро становится устойчивым. Напротив, трехмерное возмущение первой моды, хотя и имеет меньшие инкременты нарастания, может оставаться неустойчивым намного дальше вниз по потоку.

Исследование развития возмущений в линейном режиме не дает ответа на вопрос о том, возмущения какой моды являются наиболее опасными для инициирования ламинарно-турбулентного перехода. Из общих представлений о природе возникновения турбулентности понятно, что переход происходит при наличии сильных трехмерных пульсаций поля течения. Однако при развитии чисто двумерных возмущений второй моды отсутствует механизм генерации трехмерных пульсаций. Можно предположить, что переход к турбулентности является следствием комбинированного развития возмущений различных мод. На начальном участке быстро растут двумерные возмущения второй моды и по мере роста толщины пограничного слоя в процесс включаются возмущения все более низких частот. При этом наклонные волны возмущений первой моды растут значительно медленнее, но создают в процессе своего развития необходимые для инициирования перехода трехмерные флуктуации.

На основании вышеизложенного при исследовании нелинейного развития возмущений на входной границе возбуждались двумерные и трехмерные волны неустойчивости различных мод. Начальные амплитуды возмущений составляли, как правило, 0,5 % от скорости невозмущенного потока. При этом для возбуждения второй моды задавалась волна с частотой $F = 10^{-4}$, что меньше частоты наиболее быстрорастущего возмущения $F_{\max} = 1,4 \cdot 10^{-4}$. Инкремент роста заданной волны во входном сечении $-\alpha_i \delta = 2,7 \cdot 10^{-5}$. Ниже по потоку инкремент роста возмущения данной частоты увеличивается, так что оно остается неустойчивым на значительно большем расстоянии от входного сечения, чем возмущение с частотой F_{\max} .

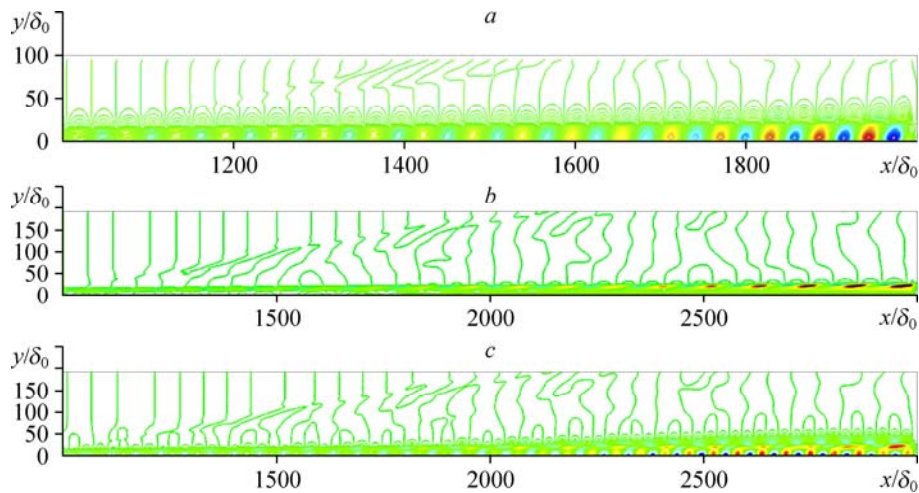


Рис. 5. Нелинейное развитие двумерного возмущения второй моды (а), трехмерного возмущения первой моды (b) и суперпозиции возмущений первой и второй моды (с). Пульсации продольной компоненты скорости в плоскости $z = 0$.

Результаты численного моделирования пространственного развития возмущений при трех различных способах их возбуждения показаны на рис. 5. В первом случае (рис. 5а) моделировалось развитие изолированной двумерной волны второй моды. Во втором случае (рис. 5b) в начальном сечении задавалось трехмерное возмущение первой моды в виде суперпозиции двух симметричных волн с углами распространения $\chi = \pm 57^\circ$, частотами $F = 0,5 \cdot 10^{-4}$ и инкрементами роста $-\alpha_i \delta = 1,05 \cdot 10^{-3}$. В третьем случае (рис. 5с) проводилось моделирование развития суперпозиции двумерного возмущения второй моды и трехмерных симметричных волн первой моды. Для двух последних случаев на рис. 6 приведено распределение пульсаций давления вдоль поверхности пластины.

Проведенные численные расчеты показывают, что на начальном этапе развития, в соответствии с линейной теорией, двумерные возмущения второй моды являются доминирующими и быстро нарастают вниз по потоку. Амплитуда возмущений первой

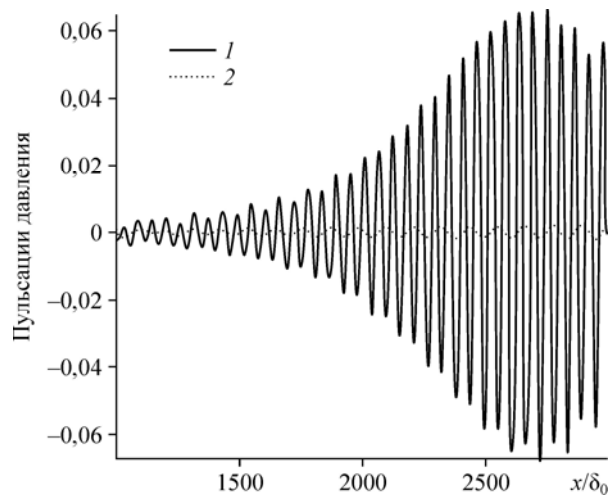


Рис. 6. Пульсации давления на стенке вдоль линии $z = 0$ для изолированного возмущения первой моды и суперпозиции возмущений первой и второй мод.

1 — первая и вторая моды, 2 — только первая мода.

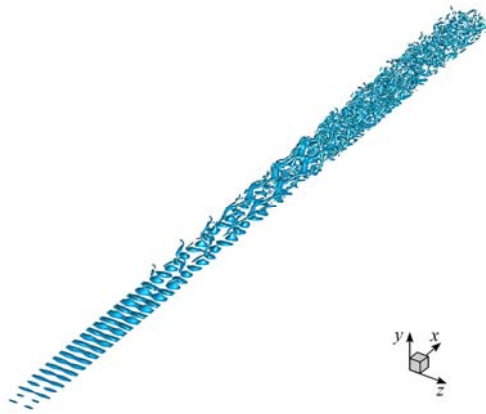


Рис. 7. Нелинейное развитие возмущения в виде суперпозиции двумерного возмущения второй моды и трехмерного возмущения первой моды. Изоповерхности Q-критерия.

моды увеличивается значительно медленнее. Влияние возмущений первой моды заключается, главным образом, в создании трехмерной компоненты пульсаций, что приводит к периодической деформации в трансверсальном направлении изначально плоских «валиков» возмущений второй моды. Этот эффект хорошо виден на рис. 7, где области завихренного движения визуализированы с помощью изоповерхности так называемого Q-критерия [22] — величины, равной полуразности квадратов норм тензора завихренности и тензора скоростей деформаций. Когда рост амплитуды возмущений второй моды прекращается вследствие увеличения толщины пограничного слоя, возмущения первой моды продолжают расти. Таким образом, вторичное течение, образовавшееся в результате многократного увеличения амплитуды пульсаций второй моды и ее дальнейшей стабилизации, продолжает накачиваться трехмерной компонентой пульсаций за счет роста возмущений первой моды.

По мере нарастания трехмерных флуктуаций в потоке наблюдается образование вырывающихся наружу из пограничного слоя подковообразных вихревых структур (hairpin vortices), что согласуется с результатами прямого численного моделирования перехода к турбулентности при числе Маха 4,5, полученными в работе [4]. Ниже по потоку, примерно при $x/\delta_0 = 3000$, рост трехмерных возмущений приводит к «взрыву» неустойчивого пограничного слоя и ламинарно-турбулентному переходу. Это проявляется в быстром росте мелкомасштабных пульсаций и существенном изменении всех характеристик пограничного слоя. На рис. 8а показаны профили средней продольной скорости в нескольких поперечных сечениях, полученные из мгновенных полей скорости усреднением по координате z вдоль размаха и по времени над промежутком, равным 4 периодам заданного

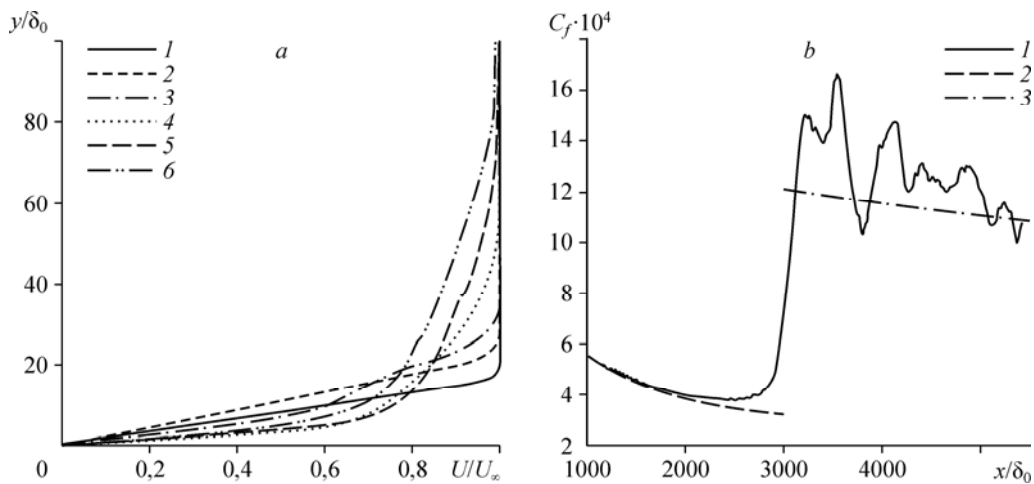


Рис. 8. Изменение профилей средней скорости (а) и коэффициента поверхностного трения (б) вдоль пластины.

$a: x/\delta_0 = 1100$ (1), 2000 (2), 3000 (3), 4000 (4), 5000 (5), 5400 (6); $b: 1$ — прямое численное моделирование, 2 — ламинарный пограничный слой, 3 — турбулентный пограничный слой.

возмущения второй моды. Очевидно, что профиль начинает резко меняться вблизи $x/\delta_0 = 3000$, уходя от ламинарного режима и приобретая «переходный» вид с почти линейным участком минимального наклона при $10 < y/\delta_0 < 15$. Профили при $x/\delta_0 \geq 4000$ можно отнести уже к турбулентным, они выглядят существенно более «наполненными» по сравнению с профилями ламинарного пограничного слоя.

Переход к турбулентному режиму течения особенно отчетливо проявляется в изменении коэффициента поверхностного трения (рис. 8*b*). На этом рисунке наряду со значением C_f , полученным из усредненных профилей скорости, нанесены зависимости, соответствующие ламинарному автомодельному пограничному слою и полностью турбулентному пограничному слою (в последнем случае использован полуэмпирический метод расчета коэффициента трения из монографии [23]). Видно, что примерно до $x/\delta_0 = 2000$ коэффициент трения очень хорошо согласуется с выражением для ламинарного случая. Вблизи $x/\delta_0 = 3000$ коэффициент трения резко (почти в 4 раза) увеличивается, указывая на момент ламинарно-турбулентного перехода. После перехода C_f испытывает сильные колебания и несколько уменьшается, как это и должно быть при завершении процесса перехода, приближаясь к значению для развитого турбулентного пограничного слоя.

Выводы

На основе численного решения полных нестационарных уравнений Навье–Стокса проведено прямое численное моделирование линейных и нелинейных стадий развития неустойчивых двумерных и трехмерных возмущений различных мод и начала ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на плоской пластине при числе Маха потока $M = 6$. Стационарное ламинарное основное течение во входном сечении возбуждалось возмущениями в виде суперпозиции неустойчивых мод линейной теории. Данные численного моделирования, полученные при расчете основного течения и роста малых возмущений в линейном режиме, хорошо совпадают с результатами теории пограничного слоя и линейной теорией гидродинамической устойчивости.

При прямом численном моделировании обнаружено, что двумерные возмущения второй моды являются доминирующими на начальном этапе развития неустойчивости. Ниже по потоку существенное влияние приобретают нарастающие трехмерные возмущения, которые приводят к быстрому росту мелкомасштабных пульсаций и, в конечном итоге, к ламинарно-турбулентному переходу. Переход сопровождается резким изменением средних характеристик пограничного слоя — профилей средней скорости, коэффициента поверхностного трения.

Список литературы

1. Mack L.M. Boundary-layer stability theory: JPL Report 90-277-REV-A (NASA CR 131501). Pasadena: California Inst. of Tech., Jet Propulsion Laboratory, 1969. 396 с.
2. Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 134 с.
3. Pruett C.D., Zang T.A., Chang C.-L., Carpenter M.H. Spatial direct numerical simulation of high-speed boundary-layer flows. Part I. Algorithmic considerations and validation // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1995. Vol. 7. P. 49–76.
4. Adams N.A., Kleiser L. Subharmonic transition to turbulence in a flat-plate boundary layer at Mach number 4.5 // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 317. P. 301–335.
5. Maslov A., Bountin D., Shpiyuk A., Sidorenko A., Shen Q., Bi Z. Experimental study of compressible boundary layer on a cone at angles of attack // Acta Mechanica Sinica. 2009. Vol. 25, No. 3. P. 325–333.
6. Maslov A.A., Shpiyuk A.N., Sidorenko A.A., Arnal D. Leading-edge receptivity of a hypersonic boundary layer on a flat plate // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 426. P. 73–94.
7. Ma Y., Zhong X. Receptivity of a supersonic boundary layer over a flat plate. Part 1. Wave structures and interactions // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 488. P. 31–78.
8. Ma Y., Zhong X. Receptivity of a supersonic boundary layer over a flat plate. Part 2. Receptivity to free-stream sound // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 488. P. 79–121.

9. Fedorov A., Soudakov V., Egorov I., Sidorenko A., Gromyko Y., Bountin D., Polivanov P., Maslov A. High-speed boundary-layer stability on a cone with localized wall heating or cooling // AIAA J. 2015. Vol. 53, No. 9, P. 2512–2524.
10. Shipliyuk A., Maslov A., Burov E., Malmuth N. Stabilization of a hypersonic boundary layer using an ultrasonically absorptive coating // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 479. P. 99–124.
11. Egorov I.V., Fedorov A.V., Soudakov V.G. Receptivity of a hypersonic boundary layer over a flat plate with a porous coating // J. Fluid Mech. 2008. Vol. 601. P. 165–187.
12. Maslov A.A., Fedorov A.V., Bountin D.A., Shipliyuk A.N., Sidorenko A.A., Malmuth N.D., Knauss H. Experimental study of disturbances in transitional and turbulent hypersonic boundary layers // AIAA J. 2008. Vol. 46, No. 7. P. 1880–1883.
13. Гапонов С.А., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Лысенко В.И., Семенов Н.В., Смородский Б.В. Влияние пористости поверхности на устойчивость и переход сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 2, С. 281–290.
14. Гапонов С.А., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Лысенко В.И., Семенов Н.В., Смородский Б.В. Влияние глубины пористого покрытия на устойчивость и переход сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 5. С. 555–560.
15. Егоров И.В., Судаков В.Г., Федоров А.В. Численное моделирование распространения возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 6. С. 33–44.
16. Egorov I.V., Fedorov A.V., Soudakov V.G. Direct numerical simulation of disturbances generated by periodic suction-blowing in a hypersonic boundary layer // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 2006. Vol. 20. P. 41–54.
17. Jiang G.S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 126. P. 202–228.
18. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
19. Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Хотяновский Д.В. Применение схем высокого порядка точности при моделировании нестационарных сверхзвуковых течений // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 7. С. 39–55.
20. Кудрявцев А.Н., Хотяновский Д.В. Прямое численное моделирование перехода к турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 5. С. 581–590.
21. Adams N.A. Direct numerical simulation of turbulent compression ramp flow // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1998. Vol. 12. P. 109–129.
22. Lesieur M., Métais O., Comte P. Large-eddy simulations of turbulence. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. 233 p.
23. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982. 312 с.

Статья поступила в редакцию 17 мая 2016 г.