УДК 517.944+533

ПОДМОДЕЛЬ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

С. В. Хабиров

Институт механики УНЦ РАН, 450000 Уфа

В рамках программы ПОДМОДЕЛИ исследуется инвариантная подмодель уравнений газовой динамики, построенная на одномерной подалгебре, состоящей из суммы операторов вращения и переноса по времени. Система уравнений подмодели приводится к симметрическому виду. Выводятся условия гиперболичности системы. Проводится групповой анализ и рассматривается инвариантное решение. Изобарические течения перечисляются. На простейших из них рассматриваются характеристики и сильные разрывы. Выводятся необходимые условия существования решений без особенностей на оси.

1. Уравнения подмодели. Уравнения газовой динамики рассматриваются в цилиндрических координатах t, x, r, θ; U, V, W — проекции скорости на орты; p, ρ — давление и плотность. Инвариантное решение [1] записывается через инварианты оператора $X_7 + X_{10} = \partial_\theta + \partial_t$: $U = u$, $V = v$, $W = r(w+1)$; функции u, v, w, p, ρ зависят от x, r, $s = \theta - t$, поэтому на линии уровня функций точка движется по окружности с постоянной круговой скоростью. Подстановка такого представления решения в уравнения газовой динамики дает уравнения подмодели

$$\begin{gathered} D\mathbf{u} + \rho^{-1}(p_x, p_r, r^{-2}p_s) = (0,\ r(w+1)^2,\ -2r^{-1}v(w+1)) = \mathbf{a}, \\ Dp + A\operatorname{div}\mathbf{u} = -r^{-1}Av, \qquad D\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = -r^{-1}\rho v, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u} = (u,v,w) = (u^1,u^2,u^3)$; $\operatorname{div}\mathbf{u} = u_x + v_r + w_s$; $D = u\partial_x + v\partial_r + w\partial_s$; $A = A(\rho,p) = \rho c^2$; $c^2 = \partial f/\partial\rho$; $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния; S — энтропия.

Система (1.1) приводится к симметричному виду. Для этого вместо последнего уравнения записывается уравнение для энтропии $DS = 0$. Линейной заменой скоростей $v^i = b^i_k u^k$, $u^k = c^k_i v^i$, $b^i_m c^m_k = \delta^i_k$ система (1.1) переводится в систему для вектор-функции $\mathbf{q} = (v^1, v^2, v^3, p, S)^{\mathrm{T}}$:

$$B^i \mathbf{q}_{x^i} = \mathbf{F}, \tag{1.2}$$

где $x^1 = x$, $x^2 = r$, $x^3 = s$, $\mathbf{F} = (d^1, d^2, d^3, d^4, 0)^{\mathrm{T}}$, $d^4 = -v^i(r^{-1}c^2_i + c^k_{ix^k})$, $d^i = b^i_k a^k + \rho b^i_{nx^l} c^l_k v^k c^n_m v^m$, $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$,

$$B^i = \begin{bmatrix} \rho c^i_k v^k & 0 & 0 & b^1_i g^{ii} & 0 \\ 0 & \rho c^i_k v^k & 0 & b^2_i g^{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^i_k v^k & b^3_i g^{ii} & 0 \\ c^i_1 & c^i_2 & c^i_3 & A^{-1}c^i_k v^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^i_k v^k \end{bmatrix},$$

$g^{11} = g^{22} = 1$, $g^{33} = r^{-2}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Матрицы B^i симметричны, если выполнены условия

$$c^i_k = b^k_i g^{ii}. \tag{1.3}$$

Отсюда определяются $|\mathbf{c}^i|^2 = g^{ii}$, $\mathbf{c}^i \cdot \mathbf{c}^k = 0$, $i \neq k$, где $\mathbf{c}^i = (c_1^i, c_2^i, c_3^i)^{\mathrm{T}}$. Значит, если задать направление одного из векторов $\mathbf{c}^i$, то матрица c_k^i полностью определяется с точностью до поворота вокруг этого направления.

Система (1.2), (1.3) будет симметрической гиперболической, если одна из матриц B^i положительно определена. Собственные числа B^i вычисляются по формулам

$$\lambda_1^i = u^i = c_k^i v^k, \quad \lambda_{2,3}^i = \rho u^i, \quad \lambda_{4,5}^i = \frac{1}{2}(\rho + A^{-1})u^i \pm \Big(\frac{1}{4}(\rho - A^{-1})^2(u^i)^2 + g^{ii}\Big)^{1/2}.$$

Отсюда следуют условия положительной определенности $\rho > 0$, $u^i > c(g^{ii})^{1/2} > 0$.

Характеристики системы (1.2), (1.3) находятся из равенства

$$\det \sum_{i=1}^{3} B^i \xi^i = 0,$$

где $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — нормальный вектор к характеристической поверхности. Получается трехкратная характеристика C_0: $\sum\limits_{i=1}^{3} u^i \xi^i = 0$, и возможны еще две характеристики, определяемые равенством

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} u^i \xi^i\Big)^2 - c^2 \sum_{k=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} c_k^i \xi^i\Big)^2 = 0.$$

В матричном виде это равенство принимает вид [2] $\xi H \xi^{\mathrm{T}} = 0$, где $H = \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} - G(x)$; $\mathbf{h} = (h^1, h^2, h^3)$; $h^i = c^{-1}u^i$; $G = (g^{ik}) = \mathrm{diag}\,(1, 1, r^{-2})$. Если собственные числа матрицы H, которые все действительны, имеют разные знаки, то существуют две действительные характеристики $C_\pm$.

Уравнение для определения собственных чисел имеет вид

$$f(\lambda) = \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0,$$

где

$J_1 = \mathrm{tr}\, H = |\mathbf{h}|^2 - \mathrm{tr}\, G = |\mathbf{u}|^2 c^{-2} - 2 - r^{-2}$;

$J_2 = \mathrm{tr}\, H^{-1} \det H = \mathrm{tr}\, G^{-1} \det G - |\mathbf{h}|^2\, \mathrm{tr}\, G + \mathbf{h}\, G\, \mathbf{h}^{\mathrm{T}} = 1 + 2r^{-2} - |\mathbf{u}|^2 c^{-2}(1 + r^{-2}) + w^2 c^{-2}(r^{-2} - 1)$;

$J_3 = \det H = \det G(-1 + \mathbf{h}\, G^{-1}\, \mathbf{h}^{\mathrm{T}}) = r^{-2}(-1 + |\mathbf{u}|^2 c^{-2} + w^2 c^{-2}(r^2 - 1))$.

По теореме Рауса число положительных корней многочлена $f(\lambda)$ равно числу перемен знака в последовательности 1, $-J_1$, $J_2 - J_3 J_1^{-1}$, $-J_3$.

Область гиперболичности системы (1.1) на фиксированном решении определяется системами неравенств:

— число перемен знаков равно 1

$$\begin{aligned} &J_1 > 0, \quad J_2 J_1 < J_3, \quad J_3 > 0,\\ &J_1 < 0, \quad J_2 J_1 > J_3, \quad J_3 > 0,\\ &J_1 < 0, \quad J_2 J_1 < J_3, \quad J_3 > 0; \end{aligned}$$

— число перемен знаков равно 2

$$\begin{aligned} &J_1 > 0, \quad J_2 J_1 > J_3, \quad J_3 < 0,\\ &J_1 > 0, \quad J_2 J_1 < J_3, \quad J_3 < 0,\\ &J_1 < 0, \quad J_2 J_1 > J_3, \quad J_3 < 0. \end{aligned}$$

Решение этих неравенств приводит к утверждению.

№	A	Расширяющие операторы
2	$p\varphi(p\rho^{-\gamma})$	$(\gamma-1)Z+2\gamma Y_p$
3	$p\varphi(p\rho^{-1})$	Y_p
4	$\varphi(p)$	Z
5	$p\varphi(\rho)$	$Z+2Y_p$
6	γp	Y_p, Z
8	$\varphi(\rho\,\mathrm{e}^{-p})$	$Z-2Y_1$
9	$\varphi(\rho)$	Y_1
10	$\gamma\rho^\gamma$	$Y_1, (\gamma-1)Z+2\gamma Y_p$
11	ρ	Y_p, Y_1
12	1	Y_1, Z
13	0	$Z, Y_{\varphi(p)}$

Предложение 1. *Система* (1.1) *гиперболична на решении в области, определяемой неравенством*

$$u^2+v^2+r^2w^2>c^2. \tag{1.4}$$

В физических переменных условие (1.4) принимает вид $U^2+V^2+(W-r)^2>c^2$, из которого следует, что для больших r система (1.1) всегда гиперболична даже с дозвуковыми физическими скоростями. При $W\simeq r$ неравенство (1.4) может не выполняться, хотя физическое течение сверхзвуковое. В этом состоит отличие системы (1.1) от системы уравнений установившихся течений.

2. Групповая классификация и инвариантное решение. Система (1.1) допускает преобразования эквивалентности $x'=a_1x$, $r'=a_1r$, $u'=a_1u$, $v'=a_1v$, $\rho'=a_2\rho$, $p'=a_1^2a_2(p+a_3)$, $A'=a_1^2a_2A$, где a_i — параметры; остальные переменные инвариантны. С произвольной функцией $A(\rho,p)$ система (1.1) допускает абелеву алгебру $L_2=\{\partial_x,\partial_s\}$, которая является ядром допускаемых алгебр и фактором нормализатора подалгебры X_7+X_{10} в алгебре L_{11} уравнений газовой динамики [1]. Расширение ядра происходит точно в тех же случаях, как и для исходной модели [1] (см. таблицу), за исключением случая $A=(5/3)p$. В таблице сохранена нумерация табл. 1 из [1], $Z=x\partial_x+r\partial_r+u\partial_u+v\partial_v-2\rho\partial_\rho$, $Y_{\varphi(p)}=\rho\varphi'(p)\partial_\rho+\varphi(p)\partial_p$, где φ — произвольная функция. Эта таблица есть результат групповой классификации системы (1.1) по произвольному элементу A.

Замечание. Любое расширение ядра является фактор-алгеброй нормализатора подалгебры X_7+X_{10} в соответствующем расширении L_{11} по идеалу X_7+X_{10}, так как легко подбираются операторы из расширений табл. 1 в работе [1], которые в инвариантных переменных совпадают с операторами, приведенными в таблице настоящей работы для соответствующих расширений.

Оптимальная система подалгебр для ядра очевидна, так как для абелевой алгебры нет нетривиальных внутренних автоморфизмов. Рассматривается инвариантное решение, построенное по алгебре L_2. Решение u, v,w, S, ρ зависит только от r. При $v\neq 0$ справедливы 5 интегралов для фактор-системы:

$$\begin{gathered}S(\rho,p)=S_0(\rho S_\rho+AS_p=0),\quad u=u_0,\quad rv\rho=E_0,\quad r^2(1+w)=B,\\ E_0^2r^{-2}\rho^{-2}+I(\rho)+r^{-2}B^2=C^2,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где S_0, u_0, E_0, w_0, B, C — постоянные; $I=2\int\limits_0^\rho \rho^{-1}c^2(\rho)\,d\rho\geqslant 0$.

Предложение 2. *Для нормального газа уравнение (2.1) задает ограниченную двузначную функцию $\rho(r)$, определенную в области $r \geqslant r_0 > 0$. Первая ветвь $\rho_1 > \rho > \rho(r_0) = \rho_0$, для которой радиальная скорость дозвуковая, монотонно возрастает. Вторая ветвь $0 < \rho < \rho_0$, для которой радиальная скорость сверхзвуковая, монотонно убывает.*

Доказательство следует из свойств функции $I(\rho)$ для нормального газа [3, с. 101].

В физических переменных решение задается формулами $U = u_0$, $V = E_0 r^{-1}\rho^{-1}$, $W = Br^{-1}$. Оно определяет установившееся течение газа из цилиндрического неточечного источника $r \geqslant r_0$ с закруткой $W \neq 0$.

При $v = 0$ решение с произволом в три функции

$$u(r),\ w(r),\ p(r),\ \rho = r^{-1}p'(w+1)^{-2} \tag{2.2}$$

описывает установившееся стратифицированное движение частиц по винтовым линиям на цилиндрах.

3. Изобарические течения. Для рассматриваемой подмодели существует большой класс течений с постоянным давлением $p = p_0$. Общее решение изобарических течений построено в [4]. В настоящей работе дается другое представление решения для подмодели. Система (1.1) становится переопределенной

$$u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_r + w\mathbf{u}_s = (0,\, r(w+1)^2,\, -2r^{-1}v(w+1)),\quad \operatorname{div}\mathbf{u} + r^{-1}v = 0,\quad u\rho_x + v\rho_r + w\rho_s = 0. \tag{3.1}$$

Эта система допускает, кроме переносов ∂_x, ∂_s, два растяжения $x\partial_x + u\partial_u$, $r\partial_r + v\partial_v$. Таким образом, из любого точного решения с постоянным давлением можно получить с помощью указанной допускаемой группы решение с пятью произвольными постоянными. Общую допускаемую группу нельзя вычислить, пока (3.1) не приведена в инволюцию, хотя можно указать еще два допускаемых оператора ∂_ρ, $\rho\partial_\rho$.

Система (3.1) интегрируется в лагранжевых переменных. В качестве одной из них выбирается параметр линии тока τ

$$u^{-1}dx = v^{-1}dr = w^{-1}ds = d\tau,\quad x\Big|_{\tau=0} = \xi,\quad r\Big|_{\tau=0} = \eta,\quad s\Big|_{\tau=0} = \zeta, \tag{3.2}$$

где точка (ξ, η, ζ) лежит на двумерной поверхности, не касательной к полю (u, v, w). Система (3.1) принимает вид

$$u_\tau = 0,\quad v_\tau = r(w+1)^2,\quad w_\tau = -2r^{-1}v(w+1),\quad \rho_\tau = 0,\quad r(u_x + w_s) + (rv)_r = 0. \tag{3.3}$$

С точностью до растяжений решение (3.2), (3.3) таково:

$$\begin{gathered} x = \xi + \tau,\quad r^2 = \eta^2 + \tau^2 + 2\tau f,\quad \eta r\cos(s + \tau - \zeta) = \eta^2 + \tau f, \\ u = 1,\quad v = r^{-1}(\tau + f),\quad w = -1 + r^{-2}(\eta^2 - f^2)^{1/2},\quad \rho = \rho_0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $f = \eta\sin(\zeta + \xi - \varphi(f - \xi))$; $\varphi(\lambda)$ — произвольная функция. Величины ξ, η, ζ, f — функции двух параметров. Любые две из них могут быть приняты за параметры. Переносы, допускаемые системой (3.1), задают преобразования подобия между решениями. Из общего решения (3.4) выделяются два случая:

1. ξ, η — параметры, $\zeta = 0, f(\xi, \eta)$:

$$\tau = x - \xi,\quad r\sin(s + \tau) = \tau\cos(\xi - \varphi),\quad r\cos(s + \tau) = \eta + \tau\sin(\xi - \varphi),$$

$$\eta\sin(\xi - \varphi) = f,\quad u = 1,\quad v = r^{-1}(\tau + f),\quad w = -1 + r^{-1}\cos(\xi - \varphi).$$

При $\varphi(\lambda) = -\lambda$ получается инвариантное ∂_x-решение.

2. η, ζ — параметры, $\xi = 0, f(\zeta, \eta)$:

$$f = \eta\sin(\zeta - \varphi(f)),\quad r^2 = \eta^2 + x^2 + 2xf,\quad \eta r\cos(s + x - \zeta) = \eta^2 + xf,$$

$$u = 1, \quad v = r^{-1}(x+f), \quad w = -1 + r^{-2}\eta\cos(\zeta - \varphi).$$

При $\varphi = 0$ решение задается явными формулами.

Простое решение получается из (3.4) при $f = 0$:

$$r\sin(s+x-\varphi(-\xi)) = x-\xi, \ \ u=1, \ \ v = \sin(s+x-\varphi(-\xi)), \ \ w = -1+r^{-1}\cos(s+x-\varphi(-\xi)).$$

При этом если еще и $\varphi = 0$, то получается периодическое решение, заданное всюду, кроме оси x. С помощью растяжений, переносов и инверсий (постоянные могут принимать и отрицательные значения) оно переводится в простое решение, зависящее от пяти постоянных,

$$\begin{gathered} u = u_0, \quad v = q_0\sin(s + u_0^{-1}x - s_0), \quad w = -1 + q_0 r^{-1}\cos(s + u_0^{-1}x - s_0), \\ p = p_0, \qquad \rho = \rho_0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

В физических переменных решение принимает вид

$$\begin{gathered} U = u_0, \quad V = q_0\sin(xu_0^{-1} + \theta - t + \theta_0), \quad W = q_0\cos(xu_0^{-1} + \theta - t + \theta_0), \\ p = p_0, \qquad \rho = \rho_0. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Это решение задает истечение газа с оси x.

4. Характеристики и сильные разрывы. Характеристические поверхности для уравнений газовой динамики могут быть построены для инвариантного решения подмодели (1.1) [3, с. 60].

Инвариантные характеристические поверхности $h(x,r,s) = \mathrm{const}$ определяются по подмодели (1.1):

$$\begin{aligned} &C_0\colon \quad uh_x + vh_y + wh_z = 0, \\ &C_\pm\colon \quad uh_x + vh_y + wh_z \pm cq = 0, \quad q = (h_x^2 + h_r^2 + r^{-2}h_s^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Бихарактеристики задаются уравнениями

$$\begin{aligned} C_0\colon\ & d_0x = u, \quad d_0r = v, \quad d_0s = w \qquad \text{(линия тока)}, \\ C_\pm\colon\ & d_\pm x = u \pm \mathrm{ch}_x q^{-1}, \quad d_\pm r = v \pm \mathrm{ch}_r q^{-1}, \quad d_\pm s = w \pm \mathrm{ch}_s r^{-2} q^{-1}, \\ & d_\pm h = \pm c(1 - r^{-2})h_s^2 q^{-1}, \quad d_\pm h_x = -u_x h_x - v_x h_r - w_x h_s \mp c_x q, \\ & d_\pm h_r = -u_r h_x - v_r h_r - w_r h_s \pm \mathrm{ch}_s^2 r^{-3} q^{-1} \mp c_r q, \quad d_\pm h_s = -u_s h_x - v_r h_r - w_s h_s \mp c_s q. \end{aligned}$$

Для решения (3.5) линия тока является неравномерной винтовой линией $q_0(x - x_0)\cos(s + xu_0^{-1}) = r_0u_0\sin(s - s_0 + u_0^{-1}(x - x_0))$ на поверхности вращения, образованной гиперболой, $u_0^2r^2 = q_0^2(x-x_0)^2 + 2(x-x_0)r_0u_0q_0\sin(s_0+x_0) + r_0^2$. При этом характеристическая поверхность задается уравнением $q_0x = u_0r\sin(u_0^{-1}x+s) + \varphi(r\cos(u_0^{-1}x+s))$. Область существования характеристик $C_\pm$ определяется неравенством $r^2 - 2rq_0\cos(s+u_0^{-1}x-s_0) > C_0^2 - u_0^2 - q_0^2$.

При $r = 0$ получается условие сверхзвукового течения.

Для решения (3.5) уравнения бихарактеристик имеют два интеграла $u_0h_x - h_s = C_1$, $h_r^2 + r^{-2}h_s^2 = C_2^2$, которые вместе с уравнением характеристик $\lambda = s + u_0^{-1}x$, $u_0h_x + q_0\sin\lambda h_r + (-1 + q_0r^{-1}\cos\lambda)h_s \pm c_0(h_x^2 + h_r^2 + r^{-2}h_s^2)^{1/2} = 0$ определяют все производные от функции h. Поскольку интегралы в инволюции, то h определяется квадратурой

$$h = C + C_1u_0^{-1}x + C_2\int r\cos\omega d\lambda + \sin\omega\, dr, \tag{4.1}$$

где функция $\omega = \omega(\lambda, r)$ удовлетворяет уравнению

$$q_0\cos(\omega - \lambda) \pm c_0[u_0^{-2}(C_1C_2^{-1} + r\cos\omega)^2 + 1]^{1/2} = 0.$$

Равенство (4.1) задает полный интеграл уравнения для характеристик $C_{\pm}$. С его помощью определяются характеристики на решении [4].

Поверхность сильного разрыва в цилиндрической системе координат задается уравнением $F(t,x,r,\theta)=0$. Нормаль и скорость в направлении нормали таковы:

$$\mathbf{n}=\nabla_c F|\nabla_c F|^{-1},\qquad D_n=-F_t|\nabla_c F|^{-1},\qquad \nabla_c=(\partial_x,\partial_r,r^{-1}\partial_\theta).$$

Для инвариантной поверхности и инвариантного решения справедливы равенства

$$F=h(x,r,s),\qquad D_n=h_s q^{-1},\qquad \mathbf{n}=(h_x,h_r,r^{-1}h_s)q^{-1},$$

$$q=(h_x^2+h_r^2+r^{-2}h_s^2)^{1/2},\qquad \omega=u_n-D_n=(uh_x+vh_r+wh_s)q^{-1},$$

$$\mathbf{n}_\sigma=\mathbf{u}-u_n\mathbf{n}=(u(1-h_xq^{-1}),v(1-h_rq^{-1}),w-(w+1)q^{-1}h_s).$$

Контактный разрыв [3, с. 38] характеризуется равенствами $[p]=0$, $u_n=D_n$, $[\mathbf{u}_\sigma]\neq 0$. В инвариантах равенства принимают вид

$$[p]=p_2-p_1=0,\quad u_ih_x+v_ih_r+w_ih_s=0,\quad i=1,\,2. \tag{4.2}$$

Индексами 1 и 2 обозначены предельные значения величин на поверхности разрыва с разных его сторон.

Предложение 3. *На решениях* (3.5) *инвариантный контактный разрыв возможен лишь при* $u_1=u_2=u_0$, $[q]\neq 0$:

$$h=ru_0(q_1\cos(s+u_0^{-1}x+s_1)-q_2\cos(s+u_0^{-1}x+s_2))+q_1q_2x\sin(s_1-s_2)=C. \tag{4.3}$$

Доказательство. Равенства (4.2) на решениях (3.5) таковы:

$$Y_ih=u_ih_x+q_i\sin(s+s_i+u_i^{-1}x)h_r+(-1+q_ir^{-1}\cos(s+s_i+u_i^{-1}x))h_s=0. \tag{4.4}$$

Эта система должна быть замкнутой, поэтому уравнение

$$[Y_1,Y_2]h=(u_1-u_2)(q_2u_2^{-1}\cos(s+s_2+u_2^{-1}x)+q_1u_1^{-1}\cos(s+s_1+u_1^{-1}x))h_r-$$
$$-r^{-1}(q_2u_2^{-1}\sin(s+s_2+u_2^{-1}x)+q_1u_1^{-1}\sin(s+s_1+u_1^{-1}x))h_s=0 \tag{4.5}$$

должно выполняться в силу (4.4).

Инварианты уравнения (4.4) при $i=1$ таковы:

$$I=rq_1^{-1}\cos(s+s_1+u_1^{-1}x),\qquad J=xu_1^{-1}-rq_1^{-1}\sin(s+s_1+u_1^{-1}x).$$

В этих инвариантах уравнение (4.4) для $i=2$ принимает вид:

$$h_I(\varkappa(xu_1^{-1}-J)+q_2q_1^{-1}u_2^{-1}\sin(s_2-s_1+\varkappa x))+h_J(u_1^{-1}+\varkappa I+q_2q_1^{-1}u_2^{-1}\cos(s_2-s_1+\varkappa x))=0, \tag{4.6}$$

где $\varkappa=u_2^{-1}-u_1^{-1}$.

Функции x, $\sin(s_2-s_1+\varkappa x)$, $\cos(s_2-s_1+\varkappa x)$ линейно независимы, а переменная x является свободной в (4.6). Значит, x не должна входить в (4.6). Это возможно лишь при $\varkappa=0$, т. е. $u_2=u_1=u_0$. Тогда (4.5) тождественно выполнено, а решение (4.6) принимает вид (4.3).

Ударная волна определяется соотношениями [3, с. 39]

$$[u_n]\neq 0,\quad \omega_1^2=\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1},\quad \omega_2^2=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1},\quad H(\rho_2,p_2;\rho_1,p_1)=0,\quad [\mathbf{u}_\sigma]=0,$$

где H — функция Гюгонио; u_n, $\mathbf{u}_\sigma$ — проекция на нормаль и касательная составляющая вектора скорости к поверхности ударной волны. Последнее векторное уравнение равносильно системе уравнений для инвариантной ударной волны

$$[u]^{-1}h_x=[v]^{-1}h_r=r^{-2}[w]^{-1}h_s=q[\omega]^{-1}. \tag{4.7}$$

Отсюда следует равенство

$$[u]^2 + [v]^2 + r^2[w]^2 = [\omega]^2. \tag{4.8}$$

Предложение 4. *На решениях* (3.5) *не может быть ударной волны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для инвариантной ударной волны уравнение (4.8) принимает вид

$$[\omega]^2 - [u]^2 - q_1^2 - q_2^2 + 2q_1q_2\cos\left([s] + x(u_2^{-1} - u_1^{-1})\right) = 0.$$

Отсюда следует $u_1 = u_2 = u_0$, $[\omega]^2 + 2q_1q_2\cos[s] = q_1^2 + q_2^2$.

Из (4.7) получаются равенства: $h_x = 0$,

$$[\omega]^2h_r^2 = (q_2\sin(s + s_2 + u_0^{-1}x) - q_1\sin(s + s_1 + xu_0^{-1}))(h_r^2 + r^{-2}h_s^2).$$

В последнем равенстве x — свободная переменная. Приравнивание нулю коэффициентов при линейно независимых функциях, зависящих от x, дает $q_2 = q_1$, $s_2 = s_1$, т. е. $[\mathbf{u}] = 0$, что противоречит предположению.

Аналогично доказывается, что не может быть неинвариантной ударной волны.

Инвариантная ударная волна в виде архимедова винта может соединять два различных решения вида (2.2).

Предложение 5. *Инвариантный ударный переход возможен на решениях* (2.2), *причем с одной стороны разрыва можно задать решение с произволом в две функции, а с другой — решение* (2.2) *определяется с точностью до решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть течение газа по обе стороны инвариантной ударной волны $h(x, r, s) = H_0$ определяется функциями (2.2):

$$v_i = 0, \quad u_i(r), \quad w_i(r), \quad p_i(r),\ \rho_i = r^{-1}p_i'(w_i + 1)^{-2}.$$

Равенства (4.7) принимают вид $h_r = 0$, $[u]^{-1}h_x = r^{-2}[w]^{-1}h_s$. Отсюда

$$[u] = Cr^2[w], \tag{4.9}$$

где C — произвольная постоянная; $h = s + Cx$. Таким образом, поверхность ударной волны есть архимедов винт. Определяются относительные скорости $\omega_i = (Cu_i + w_i)(C^2 + r^{-2})^{-1/2}$, с которыми равенство (4.8) выполняется тождественно. Из уравнений ударного перехода определяются

$$\rho_2 = G(p_2, p_1, r^{-1}p_1'(w_1 + 1)^{-2}), \qquad [\rho] = G - p_1'(w_1 + 1)^{-2}r^{-1},$$
$$Cu_1 + w_1 = r^{-1}(r^2C^2 + 1)^{1/2}(G[p])^{1/2}(\rho_1[\rho])^{-1/2},$$
$$Cu_2 + w_2 = r^{-1}(r^2C^2 + 1)^{1/2}(G[\rho])^{-1/2}(\rho_1[p])^{1/2}.$$

Подстановка этих выражений в (4.9) дает для определения p_2 дифференциальное уравнение $r(C^2r^2 + 1)p_1'(p_2'^{1/2} - (1 + w_1)(rG)^{1/2})^2 = (p_2 - p_1)(Gr(w_1 + 1)^2 - p_1')$. Функции $w_1(r)$, $p_1(r)$ можно выбрать произвольно.

В целом поверхность ударной волны определяется одним шагом винтовой поверхности. Ее след на цилиндре ограничивается винтовыми линиями тока до скачка и за ним. Если угол между вектором скорости и осью цилиндра за скачком увеличивается, то за винтовой линией скачка должна быть поставлена стенка, ограниченная винтовыми линиями тока за скачком и частью винтовой линии до скачка, длина которой определяет шаг винтовой линии скачка. Если этот угол уменьшается, то до винтовой линии скачка должна быть поставлена стенка, ограниченная винтовыми линиями тока до скачка и частью винтовой линии после скачка, длина которой определяет шаг винтовой линии скачка.

5. Решения без особенностей на оси. Подмодель (1.1) при $r = 0$ может иметь особенность. Решение без особенности представляется рядами по неотрицательным степеням переменной r. Подстановка рядов в систему (1.1) приводит к необходимому условию существования таких решений. Ряды должны иметь вид

$$u = \sum u_k r^k, \quad v = r \sum v_k r^k, \quad w = \sum w_k r^k, \quad \rho = \sum \rho_k r^k, \quad p = P(x) + r^2 \sum p_k r^k,$$
$$A = \sum A_k r^k, \quad A_k = (k!)^{-1} D_r^k A(\rho, p)\Big|_{r=0} = A^0_\rho \rho_k + A^0_p p_{k-2} + A^0_{\rho\rho} \rho_1 \rho_{k-1} + A^0_{p\rho} \rho_1 p_{k-3} + \ldots, \tag{5.1}$$
$$A_0 = A^0 = A(\rho_0, P), \qquad A_1 = A^0_\rho \rho_1,$$

где D_r^k — k-я степень оператора полного дифференцирования по r; суммирование по целым $k \geqslant 0$.

Величины с нулем удовлетворяют уравнениям главного члена асимптотического представления

$$D_0 u_0 = -\rho_0^{-1} P', \quad D_0 v_0 = -v_0^2 + (1 + w_0)^2 - 2\rho_0^{-1} p_0, \quad D_0 w_0 + \rho_0^{-1} p_{0s} = -2v_0(1 + w_0),$$
$$D_0 \rho_0 = -A_0^{-1} \rho_0 u_0 P', \quad u_{0x} + w_{0s} = -2v_0 - A_0^{-1} u_0 P', \quad D_0 = u_0 \partial_x + w_0 \partial_s. \tag{5.2}$$

Система (5.2) есть система типа Коши по переменной s при $w_0 \neq 0$. Величины $P'(x)$, $A_0 = A(\rho_0, P)$ — произвольные элементы. Система может быть подвергнута групповому анализу. Величины u_k, v_k, ρ_k, p_k $(k > 0)$ определяются из линейных систем уравнений

$$D_0 u_k = -(u_{0x} + k v_0) u_k - u_{0s} w_k + P' \rho_0^{-2} \rho_k + g_1^k,$$
$$D_0 v_k = -v_{0x} u_k - (k+2) v_0 v_k + (2 + 2w_0 - v_{0s}) w_k + 2p_0 \rho_0^{-2} \rho_k - (k+2) \rho_0^{-1} p_k + g_2^k,$$
$$D_0 w_k + \rho_0^{-1} p_{ks} = -w_{0x} u_k - 2(w_0 + 1) v_k - (w_{0s} + (k+2) v_0) w_k + p_{0s} \rho_0^{-2} \rho_k + g_3^k, \tag{5.3}$$
$$D_0 \rho_k = (A_0^{-1} \rho_0 P' - \rho_{0x}) u_k - \rho_{0s} w_k + (A_0^{-1} u_0 P' - A_0^{-2} \rho_0 u_0 P' A^0_\rho - k v_0) \rho_k + g_4^k,$$
$$u_{kx} + w_{ks} = -A_0^{-1} P' u_k - (k+2) v_k + A_0^{-2} u_0 P' A^0_\rho \rho_k + g_5^k,$$

где g_i^k выражаются через u_l, v_l, w_l, ρ_l, p_{l-1}; $l = 0, \ldots, (k-1)$. При $k = 1$ получается однородная линейная система $g_i^1 = 0$, $i = 1, \ldots, 5$.

Система (5.3) является системой типа Коши по переменной s при $w_0 \neq 0$. Таким образом, формальные ряды (5.1) могут быть построены. Вид этих рядов необходим для существования решения без особенности на оси.

Алгебра, допускаемая (5.2), иногда продолжается на переменные системы (5.3). Например, при $P'' = 0$ допускается алгебра системы (1.1), поэтому могут быть построены инвариантные решения для уравнений (5.2), (5.3).

В случае $w_0 = 0$ систему (5.2) необходимо исследовать на совместность. Имеется два интеграла $A(\rho_0, P)\rho_{0x} = -\rho_0 P' \Longrightarrow S(\rho_0, P) = C(s) \Longrightarrow \rho_0 = g(P, C)$, $u_0^2 + I(P, C) = E^2(s)$, $I = 2 \int g^{-1}(P, C)\, dP$, которыми определяется вид решения

$$2p_0 = \rho_0 \Big[1 - \frac{1}{2} P''(\rho_0^{-1} - u_0^2 A_0^{-1}) - \frac{1}{2} P'^2 \Big(\frac{3}{2} \rho_0^{-2} u_0^{-2} - \rho_0^{-1} A_0^{-1} + A_0^{-3} u_0^2 \Big(\frac{1}{2} A_\rho^2 + A^0 A^0_p + \rho_0 A^0_\rho\Big)\Big)\Big],$$
$$2v_0 = P'(\rho_0^{-1} u_0^{-1} - u_0 A_0^{-1}).$$

Остается удовлетворить уравнению совместности $u_0 p_{0s} + (1 - u_0^2 \rho_0 A_0^{-1}) P' = 0$.

Для произвольной функции $A(\rho_0, P)$ это возможно лишь при $P' = 0$. Тогда P, C — постоянные, $\rho_0 = C_0$ — постоянная, $p_0 = (1/2) C_0$, $v_0 = 0$, $u_0 = E(s)$ — произвольная функция. Системы (5.3) при этом совместны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01780).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Хабиров С.В.** К анализу инвариантных решений ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 6. С. 764–766.
3. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
4. **Овсянников Л. В.** Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.
5. **Гюнтер Н. М.** Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1934.

Поступила в редакцию 20/I 1997 г.,
в окончательном варианте — 22/V 1997 г.