

УДК 536.24

Полуэмпирическая модель интенсивного испарения

Ю.Б. Зудин

*Национальный исследовательский центр Курчатовский институт,
Москва*

E-mail: yzudin@gmail.com

Представлена полуэмпирическая модель интенсивного испарения, построенная на базе линейной кинетической теории. Экстраполированные скачки давления и температуры на поверхности конденсированной фазы получены суммированием линейного и квадратичного составляющих. Найдены аналитические зависимости параметров пара в газодинамической области от числа Маха, коэффициента конденсации, а также числа степеней свободы молекулы идеального газа. Результаты расчета по полуэмпирической модели хорошо согласуются с результатами известных аналитических и численных исследований.

Ключевые слова: полуэмпирическая модель, интенсивное испарение, линейная кинетическая теория, экстраполированные скачки, параметры пара, газодинамическая область.

Введение

Знание закономерностей интенсивного испарения (ИИ) актуально для решения ряда прикладных задач, таких как исследования воздействия лазерного излучения на материалы [1], расчета параметров истечения вскипающего теплоносителя в вакуум [2] и других. Процесс ИИ играет также важную роль в фундаментальной проблеме моделирования внутренней атмосферы комет. Согласно имеющимся представлениям [3], интенсивность испарения ледяного ядра кометы в зависимости от расстояния до Солнца изменяется в очень широких пределах и может достигать огромных значений.

При математическом моделировании ИИ требуется задавать граничные условия на поверхности конденсированной фазы (ПКФ) для уравнений газодинамики во внешней области течения (называемой также «навье–стоксовской» областью). Газодинамические закономерности становятся неприменимыми в прилегающем к ПКФ слое Кнудсена, имеющем толщину порядка длины свободного пробега молекул. Стандартные понятия сплошной среды — плотность, температура и давление — в неравновесном слое Кнудсена утрачивают свой феноменологический смысл. Строгий расчет параметров газа здесь может быть выполнен только на основе решения кинетического уравнения Больцмана [4], описывающего изменение функции распределения (ФР) молекул по скоростям. Точные решения чрезвычайно сложного интегро-дифференциального уравнения Больцмана известны лишь для специальных случаев с пространственно однородными распределениями параметров [5]. Для решения задач даже с простой геометрией, таких,

например, как задача испарения в полупространство газа, используются различные приближенные методы: сведение уравнения Больцмана к системе моментных уравнений [6, 7], замена его на упрощенные уравнения (релаксационное уравнение Крука [6–8], модельное уравнение Кейза [9] и др.). В настоящее время моделирование ИИ проводится, как правило, с помощью различных численных методов [8, 10].

Для случая, когда скорость течения газа u_∞ много меньше скорости звука, кинетический анализ позволяет получать решение в виде системы нелинейных алгебраических уравнений [6, 7] или квадратур [9]. Аналитическое представление решения достигается затем путем тех или иных аппроксимаций. Можно выделить две основные характерные особенности молекулярно-кинетического анализа фазовых переходов. К первой относится *взаимосвязь разномасштабных задач*. Решение задачи для уравнения Больцмана в строгой (микроскопической) постановке, определяющее ФР в слое Кнудсена, связано со значительными математическими трудностями. Приближенная (макроскопическая) задача для системы уравнений в навье–стоксовской области является традиционной, однако для ее решения необходимо задать граничные условия, которые определяются из решения микроскопической задачи. Поэтому микроскопическая и макроскопическая задачи являются неразделимыми. Второй особенностью являются *кинетические скачки параметров*. Экстраполяция профилей газодинамических параметров из навье–стоксовской области на ПКФ приводит к появлению на последней фиктивных значений температуры, плотности и давления газа. Эти значения не равны соответствующим истинным значениям и образуют на ПКФ скачки температуры и давления. Экстраполированные значения параметров на ПКФ задают граничные условия для системы газодинамических уравнений в навье–стоксовской области.

Интенсивность испарения характеризуется скоростным фактором $s_\infty = u_\infty/v_\infty$, где $v_\infty = \sqrt{2RT_\infty}$ — тепловая скорость молекул, R — индивидуальная газовая постоянная, $u_\infty > 0$ — скорость течения пара (газодинамическая скорость), T_∞ — температура газа; все величины приняты для условий в навье–стоксовской области. Теоретической основой исследования неравновесного процесса испарения служит линейный кинетический анализ, описывающий малые отклонения газодинамических параметров от равновесия — $s_\infty \ll 1$. Линейная кинетическая теория, основанная на решении линеаризованного уравнения Больцмана, в своем завершенном виде представлена в работах [6, 7]. Если

скорость истечения газа сравнима со скоростью звука ($s_\infty \approx 1$), а кинетические скачки параметров — со своими абсолютными значениями в навье–стоксовской области, то говорят об интенсивном испарении. Детальные численные исследования ИИ были выполнены в ряде работ, в частности, в работе [8] проводились исследования для одноатомного газа и использовалось релаксационное уравнение Крука, а в работе [10] изучался многоатомный газ и использовались уравнение Больцмана и метод Монте–Карло.

На рис. 1 (см. [8], стр. 4246, рис. 2a) сплошными линиями представлены профили истинных (статистически осредненных)

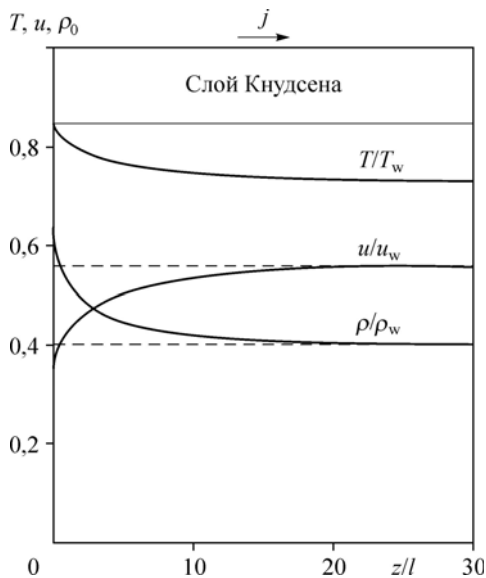


Рис. 1. Расчетные профили истинных параметров в слое Кнудсена при $p_\infty/p_w = 0,3$ из работы [8].

параметров — плотности ρ , температуры T и газодинамической скорости u , рассчитанных для отношения давлений $p_\infty/p_w = 0,3$. Как видно из рисунка, истинные значения параметров по обе стороны от ПКФ не равны друг другу. Пунктирные прямые представляют собой экстраполяцию профилей из газодинамической области вглубь слоя Кнудсена и отсекают на ПКФ макроскопические скачки параметров. По оси абсцисс отложена поперечная координата z , нормированная на длину свободного пробега молекул l . Рисунок 1 наглядно иллюстрирует два различных уровня молекулярно-кинетического описания ИИ. При строгом (микроскопическом) подходе [6–10] из решения уравнения Больцмана определяется функция распределения, которая используется в качестве весовой функции для расчета следующих моментов: температуры, плотности и давления истекающего газа. Микроскопический подход позволяет получить полную информацию о слое Кнудсена и определить как истинные, так и экстраполированные значения параметров на ПКФ.

Целью приближенного (макроскопического) анализа [11–17] является определение граничных условий для уравнений газодинамики в навье–стоксовской области. Для этого ФР аппроксимируется со свободными параметрами, определяемыми из решения системы моментных уравнений. Макроскопический подход связан с существенным упрощением математического описания, однако получаемые при этом решения являются весьма громоздкими и в свою очередь нуждаются в численных аппроксимациях. Поэтому представляется актуальным дальнейшее упрощение макроскопического описания, которое позволило бы выразить искомые экстраполированные скачки в виде аналитических формул. Такой упрощенный подход представлен ниже в виде полуэмпирической модели интенсивного испарения.

Приближенные аналитические модели

Детали поведения ФР (а значит, и истинных распределений параметров в слое Кнудсена) представляют главным образом теоретический интерес [4]. Для приложений достаточно знать лишь значения экстраполированных скачков параметров на ПКФ, которые служат граничными условиями для уравнений газодинамики в навье–стоксовской области.

Макроскопический подход к задаче ИИ был впервые представлен в пионерской работе [11]. Он основывался на аппроксимации ФР с одним свободным параметром — плотностью летящего к ПКФ молекулярного потока. Далее решалась система уравнений сохранения молекулярных потоков массы, нормальной компоненты импульса и энергии, являющихся первыми тремя уравнениями моментной цепочки уравнений [4]. В работе [11] было получено решение для случая «звукового испарения» (при числе Маха $M = 1$). В работах [12, 13] оригинальная однопараметрическая модель [11] была распространена на общий случай течения газа с произвольной дозвуковой скоростью ($0 \leq M \leq 1$).

Автор настоящей работы предложил двухпараметрическую аппроксимацию ФР [14–16], где дополнительным свободным параметром служила скорость летящего к ПКФ молекулярного потока. Для замыкания математического описания система из трех уравнений сохранения дополнялась условием перемешивания в слое Кнудсена. В рамках двухпараметрической модели были получены приближенные аналитические решения задач интенсивного фазового перехода — испарения [14] и конденсации [15]. В работе [16] был представлен линейный кинетический анализ испарения и конденсации, являющийся асимптотическим вариантом расчетного метода [14, 15]. Результаты исследований [14–16] хорошо согласуются как с аналитическими результатами линейной теории [6, 7], так и с численными результатами [8, 10], полученными для интенсивных фазовых переходов.

Автор работы [17] предложил однопараметрическую аппроксимацию ФР, где свободным параметром являлось смещение ФР по молекулярной скорости в направлении потока испарения. Как представляется, такая аппроксимация, обоснования которой

не были приведены, является эмпирической в отличие от физически обоснованных макроскопических моделей (однопараметрической [11–13] и двухпараметрической [14–16]). Тем не менее, полученные в работе [17] расчетные результаты оказались весьма близкими результатам [12–14].

Заслуживает специального упоминания оригинальная работа [18], выполненная в 1936 г. В отличие от предположения изотропного равновесного распределения, ее автор исходил из анизотропного молекулярного спектра газа в слое Кнудсена. Была использована эллипсоидальная аппроксимация ФР, которая отличается от максвелловской наличием разных мер средней скорости движения молекул в продольном и поперечном направлениях. Эллипсоидальная ФР содержала четыре свободных параметра: продольную и поперечную температуру, плотность, скорость. Три из них определялись на основе требования, чтобы молекулярные потоки массы, импульса и энергии, рассчитанные с помощью заданной ФР, были равны потокам, которые переносятся молекулами, эмитируемыми ПКФ. Четвертый параметр и искомые характеристики процесса испарения определялись из законов сохранения молекулярных потоков, записанных для ПКФ (эллипсоидальная ФР) и навье–стоксовской области (локально-равновесная ФР).

Сопоставление результатов приближенных исследований [12–14, 17, 18] между собой, а также с численными результатами [8, 10] показывает их удовлетворительное согласование. Максимальное отклонение параметров газа, рассчитанных по различным методикам, составляет $\approx 1\%$ для давления p_∞ , $\approx 2\%$ — для массовой скорости J , $\approx 5\%$ — для температуры T_∞ . Примечательно, что в отличие от данных всех остальных работ аналитическая кривая $T_\infty(M)$ работы [18] практически сливается с численными кривыми [8, 10].

Важно подчеркнуть, что в приближенных моделях использовались различные аппроксимации ФР, в том числе и сильно отличающиеся друг от друга. Отмеченное выше согласование результатов позволяет предположить, что макроскопическое описание ИИ консервативно по отношению к способу введения свободного параметра в функцию распределения. В этой связи уместно привести заключение авторов [8]: «...даже грубое приближение функции распределения по скоростям в слое Кнудсена может обеспечить удовлетворительное аналитическое описание газодинамических условий при испарении».

Анализ имеющихся подходов

Проведем краткий анализ имеющихся подходов к решению задачи интенсивного испарения.

Численный подход. Используются прямое численное моделирование методом Монте–Карло [10], численное решение релаксационного уравнения Крука [8] и др. Из численного решения уравнения Больцмана определяется ФР, которая затем используется в качестве весовой функции в соответствующих интегралах («сумматорных инвариантах») [4]. В результате определяются моменты ФР в навье–стоксовской области: температура T_∞ , давление p_∞ , плотность ρ_∞ , массовая скорость газа u_∞ . Численные методы являются непрерывно совершенствуемым мощным средством вычисления параметров ИИ. Однако их эффективность может сдерживаться длительностью расчетов, а точность решения — снижаться за счет статистического шума. Здесь также возникают вычислительные трудности в окрестности режима звукового испарения ($M = 1$). Так, в работе [8] последняя расчетная точка получена при $M \approx 0,86$, а в работе [10] — при $M \approx 0,96$. Наконец, в рамках численных методов невозможно получить предельный переход при $M \rightarrow 0$. В частности, в работах [8, 10] первые расчетные точки получены при $M \approx 0,1$.

Линейная кинетическая теория. Функция распределения определяется из решения линеаризованного уравнения Больцмана или его приближенных аналогов [6, 7, 9]. Процедура линеаризации означает следующее. Абсолютные значения параметров газа на ПКФ

(им соответствует нижний индекс “∞”) и в навье–стоксовской области (с нижним индексом “w”) принимаются равными. Целью расчета являются малые (линейные) разности величин, к которым относятся скачок температуры ($T_w - T_\infty \ll T_\infty$) и скачок давления ($p_w - p_\infty \ll p_\infty$). Линейный анализ имеет характер асимптотики общего решения при $M \rightarrow 0$; оценить точную область его применимости в принципе невозможно.

Приближенный аналитический подход. Функция распределения задается в виде равновесного распределения Максвелла с одним свободным параметром [11–13, 17]. Из решения системы уравнений сохранения молекулярных потоков массы, нормальной компоненты импульса и энергии находятся температура и давление (или температура и плотность) истекающего газа, а также свободный параметр. Если задавать ФР с двумя свободными параметрами [14], то метод решения остается прежним, но к системе уравнений добавляется дополнительное уравнение. В отличие от численных методов приближенный подход позволяет получить решение во всем диапазоне изменения чисел Маха: $0 \leq M \leq 1$.

Полуэмпирический подход. Используемые в моделях [12–14] аппроксимации ФР приводят к системе нелинейных трансцендентных алгебраических уравнений, которые неудобны для проведения прикладных расчетов. Поэтому представляется актуальным дальнейшее упрощение математического описания задачи интенсивного испарения. Излагаемый ниже полуэмпирический подход может рассматриваться в качестве способа построения аналитических аппроксимаций решений, получаемых в рамках приближенного аналитического подхода.

Полуэмпирическая модель интенсивного испарения

Будем считать, что физический механизм молекулярно-кинетических явлений при испарении адекватно описывается линейной кинетической теорией [6, 7]. Примем в качестве гипотезы, что для перехода к интенсивному испарению к линейным кинетическим скачкам следует добавить квадратичные члены, описывающие поверхность разрыва¹ [19].

Запишем полученные в работах [6, 7] решения для линейных (с верхним индексом «1») скачков параметров:

линейный перепад давления

$$\Delta p^1 = F p_w s_w, \quad (1)$$

линейный перепад температуры

$$\Delta T^1 = \sqrt{\pi} T_w s_w / 4. \quad (2)$$

здесь $s_w = u_w / v_w$ — скоростной фактор, u_w — скорость газа, p_w, T_w, ρ_w — давление, температура и плотность газа соответственно, $v_w = \sqrt{2RT_w}$ — тепловая скорость молекул; все величины соответствуют условиям на ПКФ. В правую часть выражения (1) входит введенная в работе [7] функция коэффициента конденсации β :

$$F(\beta) = 2\sqrt{\pi}(1 - 0,4\beta)/\beta. \quad (3)$$

Как известно [4], суммарный поток газа в слое Кнудсена формируется в результате взаимодействия двух молекулярных потоков: эмитируемого поверхностью и летящего к ней из навье–стоксовской области. Коэффициент конденсации β определяется как отношение потока массы адсорбированных межфазной границей молекул к общему потоку массы молекул, падающих на ПКФ. Величина β зависит от физической природы

¹ При истечении газа в область пониженного давления поверхность разрыва является фронтом ударной волны разрежения.

поверхности раздела фаз и может изменяться в диапазоне $0 \leq \beta \leq 1$. Обзор различных подходов к вычислению и измерению коэффициента конденсации представлен в работе [20].

Будем искать квадратичные добавки (с верхним индексом «II») к линейным скачкам параметров, описывающие нелинейные закономерности испарения. Для этого предположим, что на ПКФ существует разрыв газодинамических параметров, описываемый соотношениями Рэнкина–Гюгонио [19]. Эта гипотеза физически означает, что на линейные кинетические скачки накладывается ударная волна разрежения. Тогда можно записать: волновой перепад давления

$$\Delta p_{\infty}^{\text{II}} = \rho_{\infty} u_{\infty}^2 - \rho_w u_w^2, \quad (4)$$

волновой перепад температуры

$$\Delta T_{\infty}^{\text{II}} = \frac{1}{2c_p} (u_{\infty}^2 - u_w^2). \quad (5)$$

Добавим к волновым перепадам параметров (4), (5) составляющие, учитывающие ускорение отходящего от ПКФ потока газа:

$$\Delta p_0^{\text{II}} = \rho_w u_w^2 / 2, \quad (6)$$

$$\Delta T_0^{\text{II}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_w^2}{c_p}. \quad (7)$$

Формула (6) следует из уравнения Бернулли, формула (7) — из определения энтальпии торможения идеального газа. Появление дополнительных квадратичных слагаемых (6) и (7) обусловлено исходными положениями кинетического анализа [7]. Согласно им на жидкостной стороне ПКФ молекулы находятся в состоянии хаотического теплового движения с нулевой статистически осредненной скоростью; при переходе на газовую сторону ПКФ молекулы скачкообразно ускоряются и формируют исходящий с межфазной границы поток газа.

Из равенств (4)–(7) получаем суммарные нелинейные перепады параметров (переход через ударную волну разрежения в сочетании с ускорением потока): нелинейный скачок давления

$$\Delta p^{\text{II}} \equiv \Delta p_{\infty}^{\text{II}} + \Delta p_0^{\text{II}} = \rho_{\infty} u_{\infty}^2 - \rho_w u_w^2 / 2, \quad (8)$$

нелинейный скачок температуры

$$\Delta T^{\text{II}} \equiv \Delta T_{\infty}^{\text{II}} + \Delta T_0^{\text{II}} = \frac{u_{\infty}^2}{2c_p}. \quad (9)$$

Суммируя линейные и нелинейные скачки параметров, получаем выражения для результирующих перепадов давления: $\Delta p \equiv p_w - p_{\infty} = \Delta p^{\text{I}} + \Delta p^{\text{II}}$, и температуры: $\Delta T \equiv T_w - T_{\infty} = \Delta T^{\text{I}} + \Delta T^{\text{II}}$.

С учетом выражений (1), (2), (8), (9) окончательно получаем:

$$\Delta p = F p_w s_w + \rho_{\infty} u_{\infty}^2 - \rho_w u_w^2 / 2, \quad (10)$$

$$\Delta T = \frac{\sqrt{\pi}}{4} T_w s_w + \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{\infty}^2}{c_p}. \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) являются итоговыми соотношениями полуэмпирической модели интенсивного испарения. Дальнейшие выкладки носят технический характер.

Введем безразмерные значения параметров газа в навье–стоксовской области: давление $\tilde{p} = p_\infty / p_w$, температура $\tilde{T} = T_\infty / T_w$, плотность $\tilde{\rho} = \rho_\infty / \rho_w$. Эти величины связаны между собой уравнением состояния идеального газа

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{T}. \quad (12)$$

Запишем выражения для изохорной c_v и изобарной c_p теплоемкостей идеального многоатомного газа:

$$c_v = \frac{i}{2} R, \quad c_p = \frac{i+2}{2} R, \quad (13)$$

здесь i — число степеней свободы молекулы: $i = 3$ — для одноатомного, $i = 5$ — для двухатомного, $i = 6$ — для многоатомного газа. Выразив из равенств (10), (11) температуру T_∞ и давление p_∞ газа в навье–стоксовской области и перейдя к безразмерной форме записи, с учетом (12), (13) получим:

$$\tilde{p} + F s_w + \left(\frac{2}{\tilde{\rho}} - 1 \right) s_w^2 - 1 = 0, \quad (14)$$

$$\tilde{T} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} s_w + \frac{2}{i+2} \cdot \frac{s_w^2}{\tilde{\rho}^2} - 1 = 0. \quad (15)$$

Определим массовый поток газа, истекающего из ПКФ, соотношением² $j_w \equiv \rho_w u_w$. Введем физически правдоподобное допущение о равенстве массовых потоков на ПКФ и в навье–стоксовской области: $j_w = j_\infty$. Отсюда следует связь скоростных факторов на ПКФ (s_w) и в газодинамической области (s_∞):

$$s_w = s_\infty \tilde{\rho} \sqrt{\tilde{T}}. \quad (16)$$

Будем использовать в качестве независимой переменной число Маха в навье–стоксовской области:

$$M = \sqrt{2i/(i+2)} s_\infty. \quad (17)$$

Система уравнений (12)–(17) с учетом соотношения (3) представляет собой замкнутое описание полуэмпирической модели интенсивного испарения. По результатам решения определяется также безразмерная массовая скорость газа, истекающего из слоя Кнудсена:

$$J \equiv 2\sqrt{\pi} s_w = j_\infty / j_M, \quad (18)$$

здесь

$$j_M = \rho_w v_w / (2\sqrt{\pi}) \quad (19)$$

испускаемый поверхностью молекулярный поток массы (называемый также «односторонним максвелловским потоком»). Как известно [4], классики ранней кинетической теории поставили «задачу испарения в вакуум»: $j_\infty = j_M$, $J = 1$. Позже те же авторы уточнили постановку задачи, учтя торможение максвелловского потока за счет наличия вблизи межфазной границы «экранирующего облака пара»: $j_\infty < j_M$, $J < 1$.

Критерием эффективности полуэмпирической модели может служить степень согласования полученных на ее основе данных с имеющимися в литературе решениями. Ниже рассматриваются результаты такого сопоставления по трем параметрам: числу Маха M , коэффициенту конденсации β и числу степеней свободы молекулы i .

² Строго говоря, на ПКФ физический смысл имеют температура T_w и плотность ρ_w ; давление p_w и скорость u_w являются условными величинами.

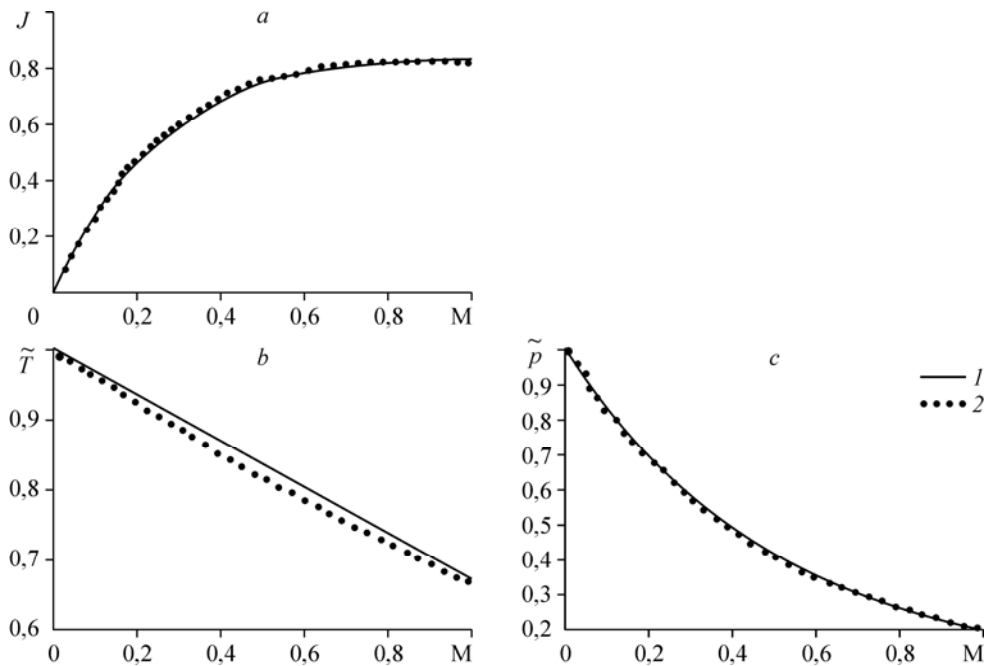


Рис. 2. Зависимости параметров пара в газодинамической области от числа Маха. Безразмерная массовая скорость (а), температура (b), давление (c); 1 — расчет по соотношениям (12)–(18) настоящей работы, 2 — расчеты работы [13].

Одноатомный газ при $\beta = 1$. На рис. 2 приведено сопоставление результатов расчета по соотношениям (12)–(18) с результатами расчета [13] для случая испарения одноатомного газа при $\beta = 1$. Видно, что кривые зависимости безразмерной массовой скорости J от числа Маха (рис. 2а) практически совпадают. Небольшое расхождение (менее 2 %) вблизи точки $M = 1$ может быть обусловлено тем, что, согласно [13], максимум зависимости $J(M)$ достигается при $M \approx 0,879$, в то время как в настоящих расчетах это происходит в точке звукового испарения $M = 1$. Отклонение кривых для безразмерной температуры пара в навье–стоксовской области (рис. 2b) не превышает 3 %, а соответствующих кривых для безразмерного давления — 2 %.

Отметим, что расчет по полуэмпирической модели фактически воспроизводит расчет по модели перемешивания, выполненный ранее автором в работе [14]. Сопоставление этих результатов при звуковом испарении ($M = 1$) приведено в табл. 1.

Представляется интересным оценить относительные вклады двух составляющих в перепадах давления и температуры: линейных —

$$\delta p^I = \frac{\Delta p^I}{\Delta p}, \quad \delta T^I = \frac{\Delta T^I}{\Delta T}, \quad (20)$$

Таблица 1
Звуковое испарение ($M = 1$). Сопоставление результатов настоящей работы с результатами работы [14]

Параметры	Полуэмпирическая модель	Работа [14]
\tilde{T}_∞	0,672	0,657
\tilde{p}_∞	0,209	0,208
J	0,826	0,829

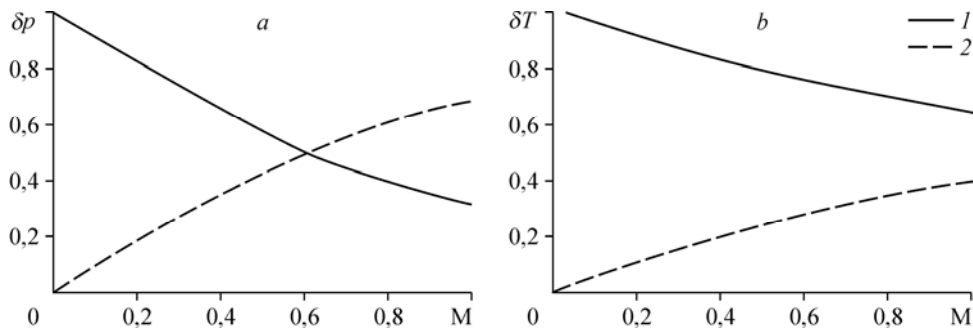


Рис. 3. Зависимости линейной (1) и нелинейной (2) составляющих скачков параметров от числа Маха.

a — скачок давления: δp^I (1), δp^{II} (2); b — скачок температуры: δT^I (1), δT^{II} (2).

и нелинейных —

$$\delta p^{II} = \frac{\Delta p^{II}}{\Delta p}, \quad \delta T^{II} = \frac{\Delta T^{II}}{\Delta T}. \quad (21)$$

Как видно из рис. 3а, перепады давлений δp^I и δp^{II} являются соизмеримыми даже в режиме звукового испарения $M = 1$. Что же касается линейной составляющей перепада температур δT^I , то она заметно превосходит нелинейное слагаемое δT^{II} во всей области изменения числа Маха (рис. 3б).

Одноатомный газ при $0 < \beta \leq 1$. На рис. 4 приведены зависимости J , \tilde{T} , \tilde{p} от числа Маха для трех значений β . Влияние коэффициента конденсации учитывается параметром F , входящим в линейный скачок давления (1). Видно, что уменьшение β приводит

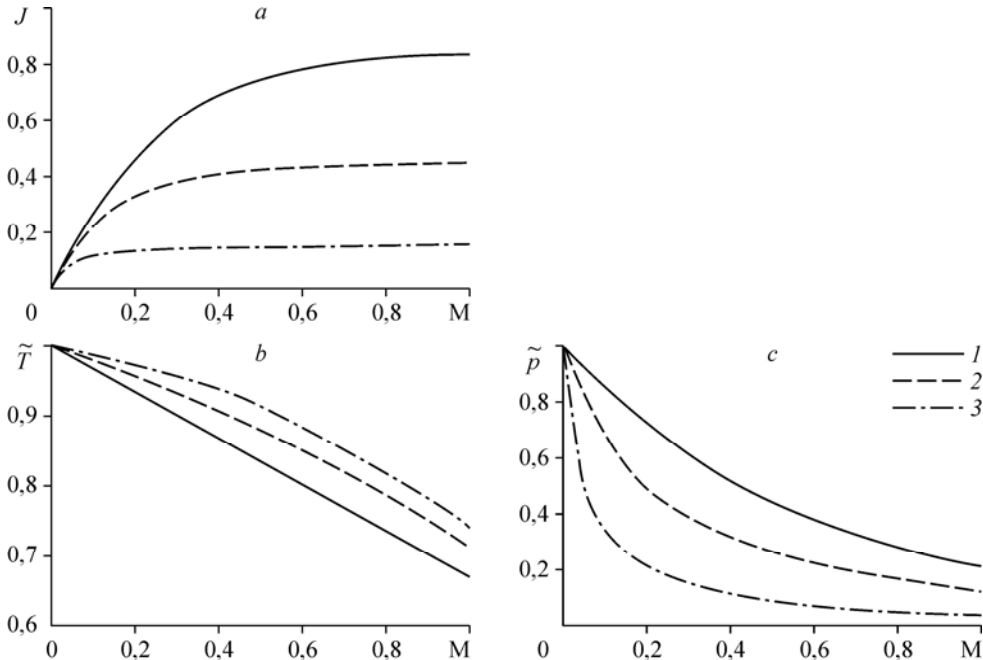


Рис. 4. Влияние коэффициента конденсации на зависимость параметров пара в газодинамической области от числа Маха.

Безразмерные массовая скорость (а), температура (б), давление (с); $\beta = 1$ (1), 0,5 (2), 0,15 (3); расчет по соотношениям (12)–(18) настоящей работы.

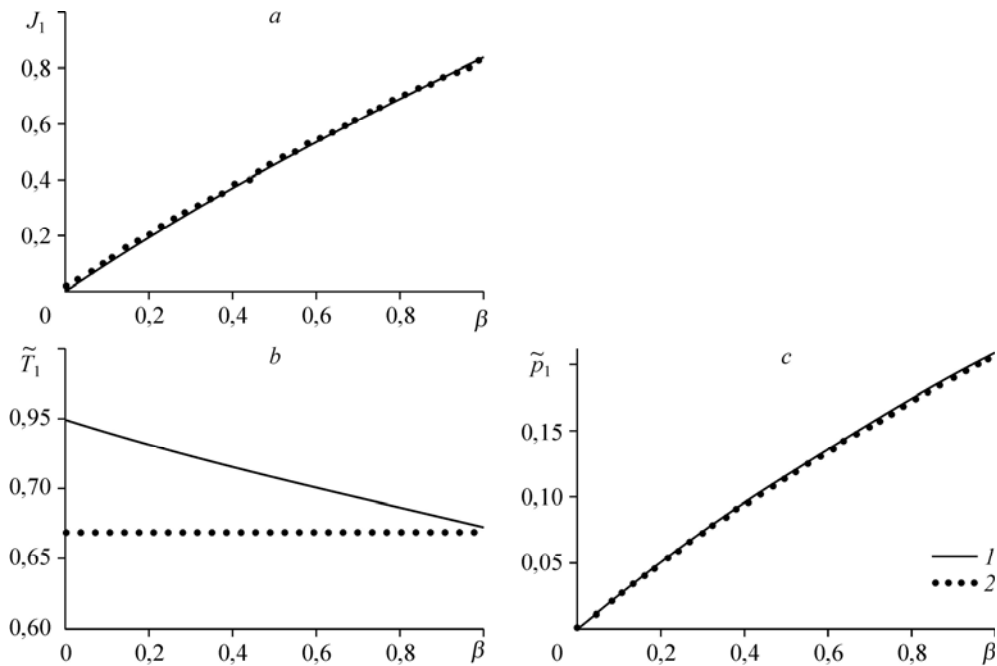


Рис. 5. Зависимость параметров пара в газодинамической области при звуковом испарении от коэффициента конденсации.

Безразмерные массовая скорость (а), температура (б), давление (с); результаты расчетов по соотношениям (12)–(18) настоящей работы (1) и по методике работы [13] (2).

к уменьшению массовой скорости (рис. 4а) и давления (рис. 4с) и к увеличению температуры в газодинамической области (рис. 4б).

На рис. 5 приводятся зависимости J , \tilde{T} , \tilde{p} от коэффициента конденсации, рассчитанные для случая звукового испарения ($M = 1$). Видно, что зависимости для $J_1 \equiv J|_{M=1}$, $\tilde{p}_1 \equiv \tilde{p}|_{M=1}$ практически совпадают. Однако зависимости $\tilde{T}_1 \equiv \tilde{T}|_{M=1}$ от β различаются даже качественно: по расчетам автора при уменьшении коэффициента конденсации происходит линейный рост температуры газа в навье–стоксовской области; в то же время согласно результатам [13] $\tilde{T}_1 = \text{idem}$.

Многоатомный газ при $\beta = 1$. Решение задачи интенсивного испарения для многоатомного газа было впервые получено в работе [21] с помощью моментного метода. Автор [10] провел численное исследование указанной задачи методом Монте–Карло в интервале $0,1 \leq M \leq 0,96$. В рамках полуэмпирической модели влияние числа степеней свободы молекулы определяется теплоемкостью идеального газа (см. формулы (13)). На рис. 6 приведены кривые зависимостей J , \tilde{T} , \tilde{p} от числа Маха для случая многоатомного газа. Видно, что по мере увеличения степеней свободы молекулы массовая скорость газа снижается (рис. 6а), а температура и давление в навье–стоксовской области возрастают (рис. 6б, 6с). В табл. 2 приведено сопоставление результатов расчета по полуэмпирической модели с результатами работы [10] для вариантов $i = 3, 5, 6$ при $M = 0,96$.

Предельный массовый поток. Автор [22] впервые обратил внимание на то, что расчетные зависимости $J(M)$, полученные в работе [21] для $i = 3, 5, 6$ обнаруживают нефизичный максимум в диапазоне $0,8 \leq M \leq 0,9$. Им был предложен полуэмпирический

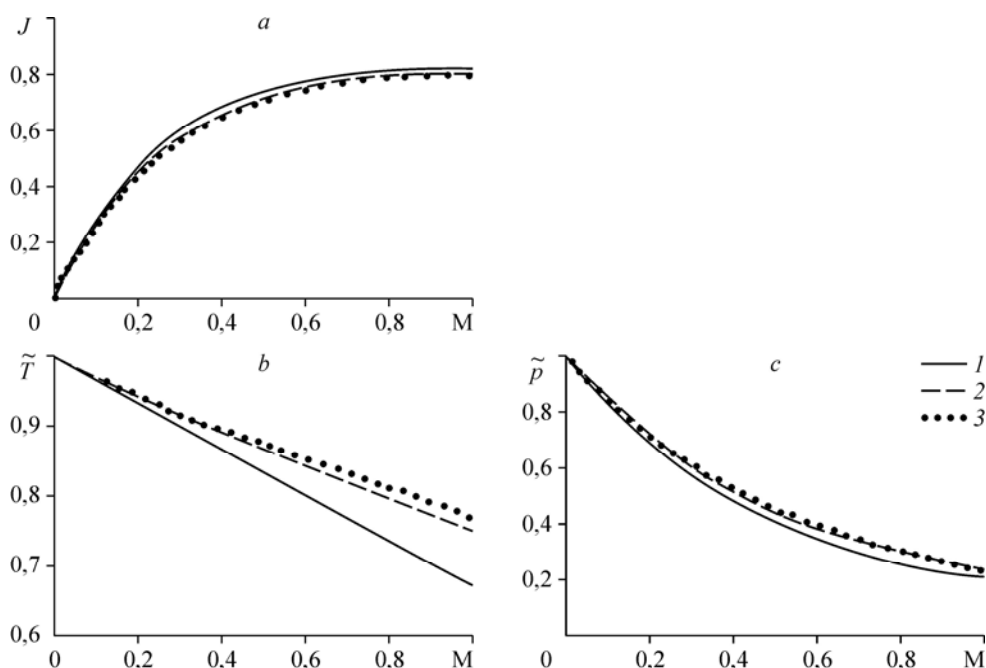


Рис. 6. Влияние числа степеней свободы молекулы на зависимость параметров пара в газодинамической области от числа Маха.

Безразмерные массовая скорость (а), температура (b), давление (с); $i = 3$ (1), 5 (2), 6 (3); расчет по соотношениям (12)–(18) настоящей работы.

метод корректировки околосвуковых параметров газа, основанный на уравнениях сохранения потоков массы, импульса и энергии в слое Кнудсена. Для корректировки привлекались полученные в работе [23] результаты численного расчета уравнения Больцмана для одноатомного газа. В итоге в работе [22] были получены физически обоснованные значения массовой скорости, температуры и давления газа при звуковом испарении. В табл. 3 приведено сопоставление результатов расчета по полуэмпирической модели при $M = 1$ с результатами работы [22] для вариантов $i = 5, 6$.

Отмеченное выше смещение координаты максимума массового потока в область $M_{\max} < 1$ характерно также для приближенных моделей [13, 14] (см. табл. 4). Наоборот, в первой модели работы [24] использование «составной» ФР привело к смещению координаты максимума массового потока в область $M_{\max} > 1$. Авторы [24] достигли требуемого совмещения максимума зависимости $J(M)$ с точкой $M_{\max} = 1$ в своей второй модели «посредством дополнительных подгоночных параметров» признав при этом, что «данный вариант выбора подгоночных коэффициентов не является, разумеется, единственным» (табл. 4).

Таблица 2

$M = 0,96$. Сопоставление результатов настоящей работы с результатами работы [10]

Параметры	Число степеней свободы молекулы					
	$i = 3$		$i = 5$		$i = 6$	
	Полуэмпирическая модель	Работа [10]	Полуэмпирическая модель	Работа [10]	Полуэмпирическая модель	Работа [10]
\tilde{T}_{∞}	0,685	0,667	0,757	0,763	0,779	0,793
J	0,826	0,836	0,809	0,807	0,804	0,798

Таблица 3

Звуковое испарение ($M = 1$). Сопоставление результатов настоящей работы с результатами работы [22]

Параметры	Число степеней свободы молекулы			
	$i = 5$		$i = 6$	
	Полуэмпирическая модель	Работа [22]	Полуэмпирическая модель	Работа [22]
\bar{T}_∞	0,749	0,758	0,771	0,791
\bar{p}_∞	0,236	0,2366	0,244	0,245
J	0,809	0,805	0,804	0,796

Таблица 4

Расчетные числа Маха в различных моделях, при которых достигается максимум массовой скорости пара

Параметр	Работа [18]	Работа [13]	Работа [14]	Работа [24] (первая модель)	Работа [24] (вторая модель)	Настоящая работа
M_{\max}	0,954	0,879	0,928	1,11	1,0	1,0

Здесь следует подчеркнуть, что полуэмпирическая модель однозначно предсказывает максимум зависимостей $J(M)$ при $M_{\max} = 1$ для произвольного числа степеней свободы молекулы i . На рис. 7 приведена иллюстрация «звукового максимума» зависимости массовой скорости от числа Маха. Это важное свойство модели вытекает из выводов теории одномерных ударных волн [19]:

- в сверхзвуковом потоке любое возмущение относится от поверхности;
- если область сверхзвукового течения существовала в начальный момент времени, то она является неустойчивой и должна отрываться от поверхности.

В соответствии с этим область $M > 1$ на рис. 7 является физически нереализуемой, ее назначение сводится к иллюстрации существования максимума зависимостей $J(M)$ при $M = M_{\max} = 1$. Следует отметить, что вывод о невозможности сверхзвукового испарения был впервые сделан в работе [18] и позже подтвержден автором [11].

Таким образом, полуэмпирическая модель позволила с хорошей точностью описать влияние на параметры ИИ числа Маха, коэффициента конденсации и числа степеней свободы молекулы газа. Это дает основание полагать, что заложенные в модель физические гипотезы в целом правильно отражают кинетические закономерности интенсивного испарения.

Представляется полезным обобщить полуэмпирическую модель на случай интенсивной конденсации. Как показано в работах [15, 16], процессы испарения и конденсации являются асимметричными. При фиксированных параметрах на ПКФ для описания испарения необходимо задавать в качестве граничных условий в газодинамической области один параметр (например, давление). В случае конденсации требуется задавать два параметра (например, давление и температуру).

Заключительные замечания

1. В задаче интенсивного испарения исследуется система «ПКФ — слой Кнудсена–навье–стоксовская область». В рамках полуэмпирической модели реальная система заменяется на условную газовую область, в которой поддерживается температура ПКФ.

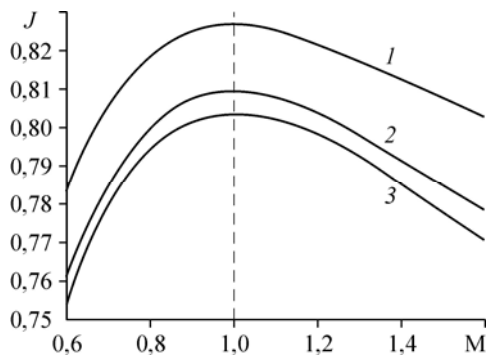


Рис. 7. Иллюстрация «звукового максимума» зависимости массовой скорости от числа Маха. $i = 3$ (1), 5 (2), 6 (3).

2. Используемые гипотезы об ударной волне разрежения и эффекте ускорения потока в одномерной стационарной постановке задачи ИИ не имеют строгого обоснования.

3. Исследования, проведенные в рамках макроскопического кинетического подхода, позволяют выдвинуть гипотезу о консервативности результатов расчета по отношению к способу аппроксимации функции распределения.

4. Как показывает анализ приближенных исследований ИИ, при переходе от микроскопического описания к макроскопическому могут использоваться сильно упрощенные аппроксимации ФР. В настоящей работе предлагается следующий способ упрощения — переход от макроскопического описания к полуэмпирическому. Показано, что при этом достигается в целом хорошее описание экстраполированных скачков давления и температуры.

5. Учет в рамках полуэмпирической модели физических особенностей распространения ударной волны разрежения позволил обеспечить точное выполнение условия максимума зависимости массового расхода от числа Маха при достижении испаряющимся газом скорости звука.

Пункты 1, 2 подчеркивают отсутствие строгого обоснования полуэмпирической модели. Автор надеется, что пункты 3–5 свидетельствуют в пользу ее физической правдоподобности и практической применимости.

Выводы

Показано, что результаты расчета параметров интенсивного испарения в рамках макроскопических моделей консервативны по отношению к способу аппроксимации функции распределения молекул по скоростям. Представлена полуэмпирическая модель интенсивного испарения, построенная на базе линейной кинетической теории. Экстраполированные скачки давления и температуры на поверхности конденсированной фазы получены суммированием линейного и квадратичного составляющих. Выражения для линейных скачков заимствуются из линейной кинетической теории испарения. Нелинейные слагаемые рассчитываются по соотношениям для ударной волны разрежения с учетом поправок на ускорение истекающего потока газа. Найдены аналитические зависимости параметров пара в газодинамической области от числа Маха, коэффициента конденсации, а также от числа степеней свободы молекулы идеального газа. Результаты расчета по полуэмпирической модели хорошо согласуются с результатами известных аналитических и численных исследований. Полуэмпирическая модель обеспечивает точное выполнение условия максимума зависимости массового расхода пара от числа Маха при достижении испаряющимся газом скорости звука. Предлагаемая модель может быть использована для расчетов экстраполированных скачков давления и температуры на поверхности конденсированной фазы при интенсивном испарении.

Список литературы

1. **Gusarov A.V., Smurov I.** Target-vapour interaction and atomic collisions in pulsed laser ablation // *J. Physics D: Applied Physics*. 2001. Vol. 34, No. 8. P. 1147–1156
2. **Ларина И.Н., Рыков В.А., Шахов Е.М.** Испарение с поверхности и истечение пара через плоский канал в вакуум // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 1. С. 150–158
3. **Захаров В.В., Крифо Ж.Ф., Лукьянов Г.А., Родионов А.В.** О моделировании сложных неравновесных течений газа в широком диапазоне чисел Кнудсена на примере внутренней атмосферы комет // *Математическое моделирование*. 2002. Т. 14, № 8. С. 91–95
4. **Коган М.Н.** Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
5. **Бобылев А.В.** Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1987. 251 с.
6. **Лабунцов Д.А.** Анализ процесса испарения и конденсации // *Теплофизика высоких температур*. 1967. Т. 5, № 4. С. 647–654.
7. **Муратова Т.М., Лабунцов Д.А.** Кинетический анализ процессов испарения и конденсации // *Теплофизика высоких температур*. 1969. Т. 7, № 5. С. 959–967.

8. **Gusarov A.V., Smurov I.** Gas-dynamic boundary conditions of evaporation and condensation: Numerical analysis of the Knudsen layer // *Phys. Fluids*. 2002. Vol. 14. P. 4242–4255.
9. **Латышев А.В., Юшканов А.А.** Аналитические методы в кинетической теории. М.: МГОУ, 2008. 280 с.
10. **Frezzotti A.A.** A numerical investigation of the steady evaporation of a polyatomic gas // *Europ. J. Mech. B: Fluids*. 2007. Vol. 26. P. 93–104.
11. **Анисимов С.И.** Об испарении металла, поглощающего лазерное излучение // *Ж. эксперим. и теорет. физ.* 1968. Т. 54, № 1. С. 339–342.
12. **Лабунцов Д.А., Крюков А.П.** Процессы интенсивного испарения // *Теплоэнергетика*. 1977. № 4. С. 8–11.
13. **Labunsov D.A., Kryukov A.P.** Analysis of intensive evaporation and condensation // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1979. Vol. 22. P. 989–1002.
14. **Зудин Ю.Б.** Приближенный кинетический анализ интенсивного испарения // *Инж.-физ. журнал*. 2015. Т. 88, № 4. С. 980–986.
15. **Зудин Ю.Б.** Приближенный кинетический анализ интенсивной конденсации // *Теплофизика и аэромеханика*. 2015. Т. 22, № 1. С. 73–85.
16. **Зудин Ю.Б.** Линейный кинетический анализ испарения и конденсации // *Теплофизика и аэромеханика*. 2016. Т. 23, № 3. С. 437–450.
17. **Rose J.W.** Accurate approximate equations for intensive subsonic evaporation // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2000. Vol. 43. P. 3869–3875.
18. **Crout P.D.** An application of kinetic theory to the problems of evaporation and sublimation of monatomic gases // *J. Math. Phys.* 1936. Vol. 15. P. 1–54.
19. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 2008. 656 с.
20. **Крюков А.П., Левашов В.Ю., Павлюкевич Н.В.** Коэффициент конденсации: определения, современные экспериментальные и расчетные данные, оценка величины // *Инж.-физ. журнал*. 2014. Т. 87, № 1. С. 229–237.
21. **Cercignani C.** Strong evaporation of a polyatomic gas // *Rarefied gas Dynamics. Proc. 12th Intern. Symp. / ed. by S.S. Fisher. Vol. 74 of Progress in Astronautics and Aeronautics. Part 1. New York, 1981. P. 305–320.*
22. **Skovorodko P.A.** Semi-empirical boundary conditions for strong evaporation of a polyatomic gas // *Rarefied Gas Dynamics. Proc. 22th Intern. Symp. / ed. by T. Bartel, M.A. Gallis. Vol. 585 of AIP Conf. Proc. Melville, New York, 2001. P. 588–590.*
23. **Sone Y., Sugimoto H.** Kinetic theory analysis of steady evaporating flows from a spherical condensed phase into a vacuum // *Phys. Fluids*. 1993. Vol. A 5. P. 1491–1511.
24. **Мажукин В.И., Прудковский П.А., Самохин А.А.** О газодинамических граничных условиях на фронте испарения // *Математическое моделирование*. 1993. Т. 5, № 6. С. 3–10.

*Статья поступила в редакцию 9 июня 2016 г.,
после переработки — 9 августа 2016 г.*