

УДК 519.6:537.812

## О ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ ТЕХНИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ И БИОТКАНЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

А. С. Кравчук

Московская государственная академия приборостроения и информатики, 107846 Москва

Рассматривается математическая модель методов типа импедансной компьютерной томографии. Изучена постановка основной задачи в континуальной форме. Выведены разрешающие интегральные уравнения. Построен алгоритм решения, основанный на использовании метода Бубнова — Галёркина в сочетании с линеаризацией нелинейных разрешающих уравнений. Приведен численный пример, выполнен анализ численных результатов. Отмечены недостатки рассмотренной модели и указаны способы их устранения.

**Введение.** Математические модели томографических методов диагностики, представляющих собой современные варианты методов неразрушающего контроля качества в технике и неинвазивных методов биомедицинской диагностики, сводятся к обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2], уравнений в частных производных [3], интегральным и иногда алгебраическим системам уравнений [3, 4], как правило, переопределенным.

Грубой классификацией методов томографии и соответствующих математических моделей является классификация по типу получаемой и обрабатываемой информации. Эта информация может быть связана со свойствами материала в данной точке (точечное возбуждение ядерного магнитного резонанса по Дамадяну в ЯМР-томографии [2]) либо представлять собой интегралы по множеству линий (в рентгеновской, акустической, эмиссионной и ЯМР-томографии), сечениям диагностируемого объекта или по его объему. Последние два варианта относятся к импедансной компьютерной томографии (ИКТ).

Указанная классификация удобна для исследования устойчивости восстановления сигнала. При точечном возбуждении и строго монотонном росте или убывании сигнала в зависимости от количества данного вещества или интенсивности исследуемого процесса в данной точке (частице) реконструкция будет устойчивой, а задача — однозначно разрешимой. Однако исследования методом точечного возбуждения требуют больших временных затрат, что не позволяет применять их для исследования протяженных или подвижных объектов. Поэтому на практике чаще всего применяются методы, в которых используются интегралы по линиям.

Задача восстановления (реконструкции) функции по множеству интегралов от нее по некоторым линиям (чаще всего прямым) известна как задача Радона. Эта задача имеет точное решение [5].

Несмотря на наличие точного решения, на практике используют различные приближенные методы, так как численная реализация формулы Радона связана с вычислением

---

Работа выполнена в рамках научно-технической программы Министерства образования РФ “Исследования высшей школы по технологии живых систем” (код проекта 004.03.03.05) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (код проекта А0112 (426)).

сложных сингулярных интегралов. При подходящем выборе дискретизации процесс приближенной реконструкции будет устойчивым: в каждой конкретной задаче можно подобрать количество измеренных интегралов и выбрать тип дискретизации таким образом, чтобы обеспечить заданную точность реконструкции.

При исследовании методом ИКТ объект подвергается воздействию распределенного по плоскому сечению или объему электрического тока. Получаемая информация — плотность тока через границу и распределение электрического потенциала по границе, связанные, очевидно, интегральным соотношением, например через функцию Грина [6]. Процесс реконструкции здесь менее устойчив по сравнению с задачей с известными интегралами по линиям. Грубую оценку устойчивости приближенной реконструкции можно получить следующим образом.

Пусть  $h$  — характерный параметр дискретизации, например диаметр конечных элементов или шаг конечно-разностной сетки. Тогда изменение реконструируемого параметра на расстояниях порядка  $h$  вызовет изменения интеграла по линии порядка  $O(h)$ , интеграла по сечению порядка  $O(h^2)$  и интеграла по объему порядка  $O(h^3)$ . Следовательно, наименее устойчивой, а значит, наиболее трудной задачей реконструкции является реконструкция функции по ее объемным интегралам.

Следует отметить, что впервые теоретические оценки устойчивости в задачах о восстановлении функции по ее плоским или объемным интегралам получены в работе [7].

Слабая зависимость измеряемых параметров от локальных вариаций реконструируемой функции определяет низкую разрешающую способность методов типа ИКТ. В то же время метод ИКТ обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами томографии. Во-первых, при соблюдении известных ограничений на амплитуду тока повреждающее воздействие его на биоткань отсутствует, в то время как в рентгеновской и эмиссионной томографии повреждения тканей неизбежны. Во-вторых, аппаратура, при помощи которой реализуется метод ИКТ, значительно дешевле рентгеновских, эмиссионных и ядерно-магниторезонансных томографов. Кроме того, эта аппаратура малогабаритна и может быть выполнена в переносном варианте. Наконец, основной реконструируемый параметр — электрическая проводимость биоткани — чувствителен к патологиям, вызванным различными болезнями, а в технической диагностике — к опасным дефектам типа трещин.

В настоящей работе приводятся результаты численных экспериментов по реконструкции электрической проводимости методом последовательных приближений типа Ньютона, которые позволяют повысить эффективность методов типа ИКТ, в частности, увеличить точность и разрешающую способность.

**1. Описание метода.** Идея метода заключается в том, чтобы, зная связь между приложенным к поверхности распределением электрического потенциала и измеренным распределением плотности электрического тока, найти распределение электрической проводимости в объеме, занятом диагностируемой средой. Модель [8], позволяющая понять суть метода, связана с представлением объемной проводимости в виде электрической цепи, состоящей из параллельно и последовательно соединенных резисторов. Цепь имеет  $N$  внешних выводов (электродов), к которым можно прикладывать электрический потенциал и измерять возникающие при этом токи; измерения на внутренних узлах цепи по предположению невозможны.

Применительно к задачам реконструкции распределений модулей упругости неоднородной среды, в том числе к задаче нахождения дефектов, дискретная модель может быть построена с использованием методов конечных элементов, конечных разностей или аппроксимацией объемной конструкции некоторой стержневой системой.

Необходимо задать некоторую структуру дискретной системы, например в виде объединения резисторов в четырехугольники, соединенные, в свою очередь, с другими четырехугольниками в вершинах. Узлам цепи присваиваются значения координат соответствующей точки диагностируемого объема относительно некоторой заранее выбранной системы координат, например декартовой.

Объединим значения потенциалов на внешних электродах в вектор  $\varphi$  размерности  $N$ , соответствующий вектор токов обозначим через  $\mathbf{j}$ . Если в множестве векторов  $\{\varphi\}$  выбрать некоторый базис, например декартов:

$$\varphi^{(1)} = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \varphi^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad \varphi^{(N)} = (0, 0, 0, \dots, 1),$$

то, проведя эксперименты для всех векторов данного базиса (измерив набор токов  $\{\mathbf{j}^{(i)}\}_{i=1}^N$  через электроды), можно найти сопротивления всех резисторов выбранной цепи. Данное утверждение представляет собой известную теорему Телегена.

Алгоритмы практического определения сопротивлений резисторов в принципе являются итерационными, поскольку система уравнений Кирхгофа, рассматриваемая в данной задаче как система для расчета потенциалов и сопротивлений резисторов, является нелинейной. Один из первых алгоритмов решения предложен в работе [8]. Применительно к решению двумерных задач метод конечных элементов развит в работах [9, 10]. Оценки погрешности решений обратных квазилинейных задач получены в работе [11].

Ниже приведен алгоритм, построенный на основе континуальной формулировки задачи, изложены некоторые методы регуляризации задачи, а также проанализирована постановка с целью ее уточнения с использованием как более корректных физических соотношений, так и усложненных математических моделей.

**2. Континуальная модель.** Пусть  $\Omega$  — область, занятая диагностируемым объектом,  $\partial\Omega \equiv \Sigma$  — граница области  $\Omega$ . Электрический потенциал, распределенный в  $\Omega$ , обозначим через  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , электрическую проводимость материала в области  $\Omega$  — через  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ .

Предположим, что известно отображение  $Q_\sigma$ , которое каждому распределению потенциала  $\varphi(\mathbf{x})|_\Sigma \equiv \varphi_\Sigma(\mathbf{x})$  ставит в соответствие распределение плотности тока  $j_{\nu\Sigma}(\mathbf{x})$  через поверхность  $\Sigma$ :

$$j_{\nu\Sigma} = \sigma(\nabla\varphi) \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Sigma,$$

где  $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$  — решение задачи Дирихле:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \tag{1}$$

$$\varphi|_\Sigma = \varphi_\Sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma. \tag{2}$$

Формальное определение оператора  $Q_\sigma$ , данное Кальдероном, имеет вид

$$Q_\sigma(\varphi_\Sigma) = \int_\Omega \sigma |\nabla \varphi|^2 d\Omega = \int_\Sigma \varphi_\Sigma (\sigma (\nabla \varphi_D \cdot \boldsymbol{\nu}))|_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma \varphi_N j_{\nu\Sigma} d\Sigma, \tag{3}$$

где  $\varphi_D$  — решение задачи Дирихле с граничным значением потенциала  $\varphi|_\Sigma = \varphi_\Sigma$ ;  $\varphi_N$  — решение задачи Неймана с граничным значением тока  $j_{\nu\Sigma}$ .

Задача формулируется следующим образом: зная оператор  $Q_\sigma$ , найти функцию  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Доказательство существования и единственности решения приведено в работе [12]. Развита в [12] теория основана на обобщении результатов работы [13] на уравнения в частных производных. Приведение к задаче типа задачи Гельфанда — Левитана осуществ-

ляется с помощью замены  $\varphi = \sigma^{-1/2}w$ , в результате которой уравнение (1) преобразуется к виду  $-\Delta w + qw = 0$ , где  $q = \sigma^{-1/2}\Delta\sigma^{1/2}$ . После нахождения “спектральной функции”  $q = q(\mathbf{x})$  реконструкция проводимости  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$  осуществляется путем решения задачи Дирихле  $-\Delta\sqrt{\sigma} + q\sqrt{\sigma} = 0$ ,  $\sqrt{\sigma}|_{\Sigma} = f(\mathbf{x})$ , где функция  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma$  вычисляется через данные на границе исследуемого объекта для потенциала и ток через границу.

Следует отметить, что работа [12] не дает конструктивного метода решения, так как промежуточные выкладки содержат предельные переходы для выражений, включающих потенциалы простого и двойного слоя для оператора  $\nabla \cdot (\sigma\nabla)$ , которые до нахождения проводимости  $\sigma$  не вычисляются в принципе (можно указать лишь некоторые их общие свойства типа гладкости).

Таким образом, проблема построения алгоритмов решения обратной задачи остается актуальной. В п. 3 предложено ее решение в предположении, что  $\varphi_{\Sigma}(\mathbf{x}) \in H^{1/2}(\Sigma)$ . В этом случае  $\varphi(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$ .

**3. Вывод разрешающих уравнений и некоторые их свойства.** Так как пространство  $H^{1/2}(\Sigma)$  сепарабельно, то в нем можно выбрать счетное всюду плотное множество, которое будем обозначать через  $\{\varphi_{\Sigma}^{(i)}\}$ . По постановке основной задачи каждой функции  $\varphi_{\Sigma}^{(i)}$  можно поставить в соответствие единственную функцию  $j_{\nu\Sigma}^{(i)}$ , имеющую смысл тока через границу и определяемую из эксперимента. Учитывая определение (3), заключаем, что известен оператор  $Q_{\sigma}: \varphi_{\Sigma} \xrightarrow{Q_{\sigma}} j_{\nu\Sigma}$ . Очевидно, что этот оператор известен лишь приближенно, поскольку число реальных экспериментов конечно, а следовательно, известно лишь конечное число пар  $\{\varphi_{\Sigma}, j_{\nu\Sigma}\}$ .

Для выявления некоторых общих свойств задачи предположим, как и в [12], что известна связь решения задачи Дирихле  $\varphi_D^{(i)}(\mathbf{x}_0)$  в области  $\Omega$  с граничным значением  $\varphi_{\Sigma}^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma$  через функцию Грина  $G_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ :

$$\varphi_D^{(i)}(\mathbf{x}_0) = \int_{\Sigma} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \nu_x} \varphi_{\Sigma}^{(i)}(\mathbf{x}) d\Sigma. \quad (4)$$

Решению (4) соответствует ток через границу  $j_{\nu\Sigma}^{(i)}$ , следовательно, для определения проводимости в области  $\Omega$  имеем следующие интегральные уравнения:

$$\sigma(\mathbf{x}_0) \frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}} \int_{\Sigma} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial G_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \nu_x} \varphi_{\Sigma}^{(i)}(\mathbf{x}) d\Sigma = j_{\nu\Sigma}^{(i)} \quad \forall i. \quad (5)$$

Отметим следующие свойства уравнений (5).

1. Функция Грина  $G_{\sigma}$  зависит от неизвестного заранее распределения проводимости  $\sigma$  в области  $\Omega$ .

2. Каждое из уравнений (5) может иметь неединственное решение. Это утверждение следует из физических соображений: при фиксированном распределении граничного потенциала один и тот же ток можно получить для различных внутренних распределений проводимости.

3. Имеет место классическая некорректность [1]: малым изменениям тока через границу могут соответствовать большие изменения подынтегрального выражения в уравнении (5).

**4. Метод последовательных приближений.** Для построения алгоритма решения используем вариационный метод и линеаризацию. Вариационный подход к решению применим в форме метода Бубнова — Галёркина. Верхним индексом  $V$  обозначим функции, соответствующие истинному распределению проводимости  $\sigma = \sigma^V$ :  $\varphi^{(i)} = \varphi^{(i)V}$ ,  $j_{\nu\sigma}^{(i)} = j_{\nu\sigma}^{(i)V}$ .

Эти функции предполагаются известными из эксперимента. Итерационный метод нахождения функции  $\sigma^V$  состоит из циклов, каждый из которых включает следующие этапы.

1. Задается нулевое приближение  $\sigma^V \approx \sigma^{(0)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ .
2. Для каждой функции  $\varphi_{\Sigma}^{(i)}$  решается задача Дирихле с граничным условием  $\varphi^{(i,0)}|_{\Sigma} = \varphi_{\Sigma}^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , после чего вычисляется распределение граничного тока  $j_{\nu\Sigma}^{(i,0)}$ .
3. Выбирается произвольная функция  $\chi \in H^1(\Omega)$  и вычисляется взвешенная с  $\chi$  разность истинного распределения тока  $j_{\nu\Sigma}^{(i)V}$  и тока  $j_{\nu\Sigma}^{(i,0)}$  (взвешенная невязка):

$$\delta J^{(i,0)} = \int_{\Sigma} (j_{\nu\Sigma}^{(i)V} - j_{\nu\Sigma}^{(i,0)}) \chi d\Sigma.$$

При использовании формулы Гаусса — Остроградского находим следующие выражения для невязки  $\delta J^{(i,0)}$ :

$$\delta J^{(i,0)} = \int_{\Sigma} \left( \sigma^V \frac{\partial \varphi^{(i)V}}{\partial \nu} - \sigma^{(0)} \frac{\partial \varphi^{(i,0)}}{\partial \nu} \right) \chi d\Sigma = \int_{\Omega} (\sigma^V \nabla \varphi^{(i)V} \cdot \nabla \chi - \sigma^{(0)} \nabla \varphi^{(i,0)} \cdot \nabla \chi) d\Sigma. \quad (6)$$

Вводятся разности  $\delta\sigma = \sigma^V - \sigma^{(0)}$ ,  $\delta\varphi^{(i)} = \varphi^{(i)V} - \varphi^{(i,0)}$  (индекс, соответствующий номеру приближения у невязок, опускается), по которым линеаризуются правые части в определении (6):

$$\delta J^{(i,0)} \approx \int_{\Sigma} \left( \delta\sigma \frac{\partial \varphi^{(i,0)}}{\partial \nu} + \sigma^{(0)} \frac{\partial \delta\varphi^{(i)}}{\partial \nu} \right) \chi d\Sigma \approx \int_{\Omega} [\delta\sigma \nabla \varphi^{(i,0)} \cdot \nabla \chi + \sigma^{(0)} \nabla(\delta\varphi^{(i)}) \cdot \nabla \chi] d\Sigma. \quad (7)$$

При замене в (7) приближенного равенства точным получается два вариационных уравнения (величина  $\delta J^{(i,0)}$  известна), второе из которых связывает две неизвестные функции  $\delta\sigma$ ,  $\delta\varphi^{(i)}$  в области  $\Omega$ .

4. Считая формально функцию  $\delta\sigma$  известной, все функции  $\delta\varphi^{(i)}$  можно выразить через  $\delta\sigma$ . Из второго уравнения (7) следует, что данная операция эквивалентна задачам Дирихле  $\nabla \cdot [\sigma^{(0)} \nabla(\delta\varphi^{(i)})] = -\nabla \cdot [\delta\sigma \nabla(\varphi^{(i,0)})]$ ,  $\delta\varphi^{(i)}|_{\Sigma} = 0$ . Найденные таким образом решения можно записать в виде

$$\delta\varphi^{(i)} = L^{(i)}(\delta\sigma). \quad (8)$$

Операторы  $L^{(i)}$ , очевидно, линейны.

5. Решения (8) подставляются в первое уравнение (7):

$$\delta J^{(i,0)} = \int_{\Sigma} \left[ \delta\sigma \frac{\partial \varphi^{(i,0)}}{\partial \nu} + \sigma^{(0)} \frac{\partial (L^{(i)}(\delta\sigma))}{\partial \nu} \right] \chi d\Sigma. \quad (9)$$

Заметим, что система (9) является переопределенной, поэтому для ее решения необходимо применять специальные методы, например метод наименьших квадратов. Приведем описание данного метода для дискретной системы. Дискретизация реализуется путем построения множества линейно независимых функций  $\chi_k$  и поочередной подстановки в уравнения (9) функций данного набора. Предварительно искомая функция  $\delta\sigma$  аппроксимируется

разложением по данному базису. В результате этих преобразований набор интегральных уравнений (9) превращается в набор линейных алгебраических систем

$$[R^{(i)}]\delta\sigma = \delta J^{(i)},$$

где  $\delta\sigma$  и  $\delta J^{(i)}$  — векторы (столбцы), полученные в результате дискретизации функций  $\delta\sigma$ ,  $\delta J^{(i)}$ . Решение методом наименьших квадратов имеет следующий вид:

$$\delta\sigma = ([R]^T[R])^{-1}[R]^T\delta J,$$

где  $\delta J$  — вектор-столбец, составленный из вектор-столбцов  $\delta J^{(i)}$ ;  $[R]$  — матрица, составленная из подматриц  $[R^{(i)}]$  в соответствии со структурой вектора  $\delta J$ ; индекс  $T$  обозначает транспонирование.

6. Проводимость  $\sigma^{(0)}$  уточняется по формуле

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(0)} + \beta\delta\sigma^{(0)}, \quad (10)$$

где длина шага  $\beta$  — экспериментально подбираемый числовой параметр. Затем следует перейти к шагу 2 описанного алгоритма.

**5. Численный пример.** Алгоритм, предложенный в п. 4, реализован в плоской задаче для прямоугольной области, которая после введения безразмерных переменных преобразовывалась в единичный квадрат. Для дискретизации использован метод конечных разностей второго порядка точности с пятиузловой схемой типа “крест”. Узлы нумеровались слева направо и снизу вверх.

Анализ численных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Если граничный оператор типа Неймана  $\sigma\nabla\varphi \cdot \nu$  аппроксимирован, как и оператор  $\nabla \cdot (\sigma\nabla\varphi)$ , со вторым порядком точности, то даже для небольшого числа степеней свободы (порядка 20–30) алгоритм, приведенный в п. 4, не позволяет найти решение, поскольку матрица  $[R]^T[R]$  оказывается почти вырожденной. Следовательно, необходима регуляризация.

2. Для того же количества неизвестных эффективна простейшая регуляризация — замена аппроксимации граничного оператора  $\sigma\nabla\varphi \cdot \nu$  второго порядка точности аппроксимацией первого порядка (более простой в реализации). После 300 итераций ошибка реконструкции даже кусочно-постоянных распределений проводимости  $\sigma^V$  оказалась порядка  $10^{-4}$ . Тот же результат получен после 100 итераций после введения ограничения

$$0 < \sigma_{\min} = \text{const} \leq \sigma^{(k)} \leq \sigma_{\max} = \text{const} \quad (11)$$

( $k$  — номер итерации), учитывающего физические свойства реальных материалов.

Следует отметить, что в работе [8], в которой реконструируется 25 параметров, задача решается без регуляризации. По-видимому, в этой работе аппроксимация сопротивления электрической цепи законами Кирхгофа и аппроксимация граничного тока имеют различные порядки.

3. При увеличении числа искомых параметров до 100–200 указанная выше простейшая регуляризация оказалась неэффективной даже с учетом ограничения (11). После введения регуляризации первого порядка (добавления к функционалу задачи комбинации квадратов первых производных решения) [1] с одновременным использованием ограничений (11) удалось получить приемлемое решение, варьируя в итерационном процессе три параметра: длину шага  $\beta$  в формуле (10), параметр  $\varepsilon_0$  регуляризации нулевого порядка и параметр  $\varepsilon_1$  регуляризации первого порядка.

Некоторые полученные результаты, соответствующие распределению проводимости вида

$$\sigma^V(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq 0,5, \\ 1, & 0,5 < y \leq 1, \end{cases}$$

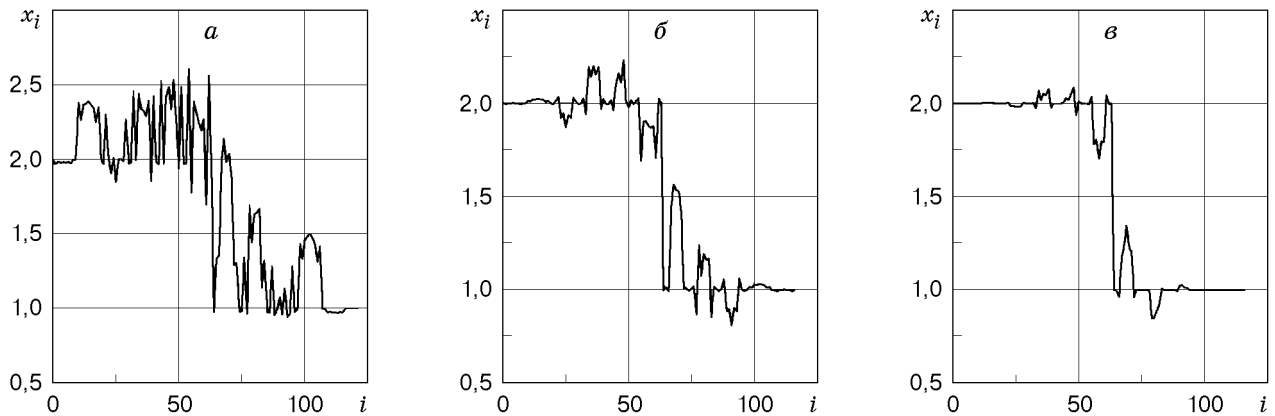


Рис. 1. Решение задачи:  
*a* — после 100 итераций; *б* — 300 итераций; *в* — 500 итераций

приведены на рис. 1, 2. На рис. 1, *a* показано решение после 100 итераций (по оси абсцисс отложены номера узлов, по оси ординат — значения решения в узлах). Видно, что в области, соответствующей скачку проводимости  $\sigma^V$ , имеет место осцилляция решения, однако вне этой области приближенное решение близко к точному.

На рис. 1, *б, в* представлено решение после 300 и 500 итераций. Видно, что с увеличением числа итераций точность решения повышается, однако в области скачка проводимости  $\sigma^V$  осцилляции остаются даже после 500 итераций.

На рис. 2 показано поведение максимальных по модулю компонент  $s_i$  вектора  $\delta\sigma$  в зависимости от числа итераций  $i$ . Немонотонное поведение данной кривой объясняется тем, что на определенных итерациях параметры  $\beta, \varepsilon_0, \varepsilon_1$  изменялись.

**Заключение.** В задачах биомедицинской диагностики модель, описываемая соотношениями (1), (2), может оказаться слишком грубой. Для сложных материалов, чувствительных к скорости нагружения, обладающих памятью и т. п., модель может быть построена с использованием уравнений Максвелла и определяющих соотношений общего вида

$$D(t) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}(t, t', \mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \mathbf{E}(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}' dt', \tag{12}$$

где  $\hat{\varepsilon}(t, t', \mathbf{x}, \mathbf{x}')$  — тензор диэлектрической проницаемости;  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности

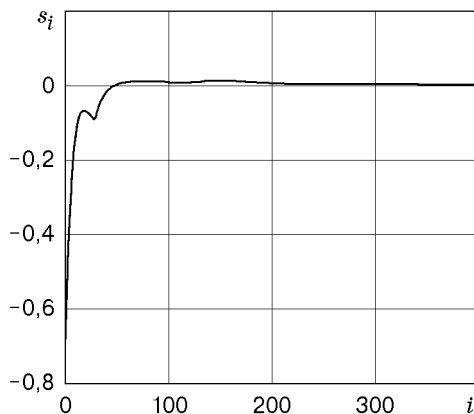


Рис. 2. Поведение корректирующей добавки

электрического поля;  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции. Соотношение (12) позволяет учесть такие эффекты, как нелокальность по времени и пространству, анизотропия, переходные процессы.

Контактные электроды, используемые в биомедицинской диагностике для воздействия на биообъект и измерений, имеют конечные размеры. Следовательно, на практике имеется не точечный контакт электрода с объектом, а некоторое распределение электрического потенциала в области контакта  $\Sigma_E^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_E$ , где  $N_E$  — число электродов:  $\varphi|_{\Sigma_E^i} = \varphi_{\Sigma}^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma_E^i \subset \Sigma$ . Так как вне этих областей электрический ток через поверхность равен нулю, то  $\sigma(\nabla\varphi) \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\Sigma} = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma \setminus \bigcup_i \Sigma_E^i \equiv \Sigma_j$ . Следовательно, основной задачей, используемой в алгоритмах реконструкции, должна быть не задача Дирихле (в двойственной формулировке [6] задача Неймана), а смешанная задача  $\varphi|_{\Sigma \setminus \Sigma_j} = \varphi_{\Sigma}^{(i)}$ ,  $\sigma(\nabla\varphi) \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\Sigma_j} = 0$ . Данный вывод проверен прямой обработкой экспериментальных данных, полученных на образцах из электропроводной бумаги. Оказалось, что различие данных расчета и эксперимента может достигать 200–300 %.

Задача, рассмотренная выше, аналогична задаче реконструкции упругих модулей неоднородной упругой среды [6, 14, 15]. Полученные результаты свидетельствуют о том, что для достижения удовлетворительной точности в задачах теории упругости необходимо, во-первых, применять регуляризацию не ниже первого порядка; во-вторых, число итераций даже при оптимальном выборе параметров регуляризации и длины шага должно быть порядка нескольких сотен или даже тысяч.

Отметим также, что квазистатических экспериментов может оказаться недостаточно для реконструкции распределений модулей анизотропной среды [15], поэтому необходимо привлекать результаты динамических испытаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические проблемы компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
2. Физика визуализации изображений в медицине / Под ред. С. Узбба. М.: Мир, 1991. Т. 1, 2.
3. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1978.
4. Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
5. Натерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
6. Кравчук А. С. Алгоритмы томографии в теории упругости // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 491–494.
7. Alessandrini G. Stable determination of conductivity by boundary measurements // Appl. Anal. 1988. V. 27. P. 153–172.
8. Dines K. A., Lytles R. J. Analysis of electrical conductivity imaging // Geophys. 1981. V. 46, N 7. P. 1025–1036.
9. Hua P., Woo E. J., Webster J. G., Tompkins W. J. Iterative reconstruction methods using regularization and optimal current patterns in electrical impedance tomography // IEEE Trans. Med. Imag. 1991. V. 10. P. 621–628.
10. Woo E. J., Hua P., Webster J. G., Tompkins W. J. Finite element method in electrical impedance tomography // Med. Biol. Engng. Comput. 1994. V. 32. P. 137–146.
11. Karkkainen T. A. Linearization technique and error estimates for distributed parameter identification in quasilinear problems // Numer. Funct. Anal. Optim. 1996. V. 17, N 3/4. P. 345–364.



- 
12. **Nachman A. I.** Reconstruction from boundary measurements // Ann. Math. 1988. V. 128. P. 531–576.
  13. **Гельфанд И. М., Левитан Б. М.** Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 309–360.
  14. **Яхно В. Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений теории упругости. М.: Наука, 1990.
  15. **Constantinescu A.** On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements // Inverse Probl. Engng. 1995. V. 1. P. 293–313.

*Поступила в редакцию 28/VIII 2000 г.*

---