

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ПОТОКА ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Л. М. Крылова, О. А. Синкевич

(Москва)

Выполнен численный расчет, описывающий превращение в T -слой конечного возмущения электропроводности, наложенного на одномерное сверхзвуковое течение сжимаемой среды при конечном значении магнитного числа Рейнольдса. На характер развития внесенного возмущения существенное влияние оказывает магнитное число Рейнольдса невозмущенного потока, каждому значению которого соответствует своя граничная область «подхвата» возмущения магнитным полем в индуцированный T -слой. Для минимального возмущения исследована устойчивость в линейном приближении и решено дисперсионное уравнение с учетом градиентов невозмущенных параметров. Показано, что в системе может развиваться перегревная неустойчивость, приводящая к образованию T -слоя.

В работе [1] выполнены первые расчеты по развитию возмущения в T -слой (подхвату) в потоке слабопроводящего газа, т. е. при значении магнитного числа Рейнольдса невозмущенного потока

$$R_m^+ = 4\pi\sigma_1 U_1 l / c^2 \quad (1)$$

существенно меньшего единицы. В (1) σ_1 , U_1 — электропроводность и скорость потока на входе в канал, l — длина канала. Было получено, что образование T -слоя происходит, если параметр МГД взаимодействия S , соответствующий параметрам внесенного возмущения и равный $S = R_m R_H$, больше некоторого критического значения S^+ . (Здесь R_m — магнитное число Рейнольдса, определенное в отличие от (1) по средним параметрам в возмущении и по его длине, а $R_H = H^2 / 8\pi P$ — отношение давления магнитного поля к газодинамическому давлению газа.)

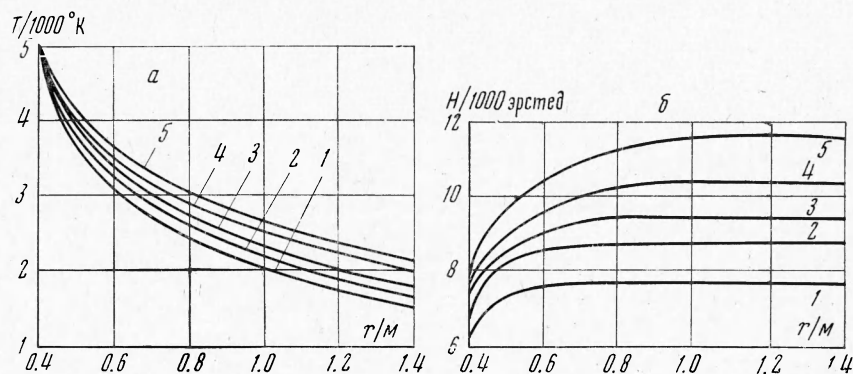
В данной работе исследуется устойчивость потока хорошо проводящего газа в магнитном поле при $R_m^+ > 1$ относительно возмущения температуры конечной и затем бесконечно малой амплитуд. Рассматривается одномерное течение проводящей сжимаемой жидкости в магнитном поле в цилиндрическом канале.

Численное решение нестационарных уравнений магнитной гидродинамики выполнено на основе [2] с учетом особенностей решения, примененных в [1].

Изучается сверхзвуковой поток газа, состоящий из смеси диссоциированного водорода и 1%-ной ионизирующей добавки — лития. Поток расширяется по радиусу канала перпендикулярно силовым линиям магнитного поля. Параметры на входе в канал (температура торможения T_0 и давление торможения P_0) выбираются так, чтобы водород был почти полностью диссоциирован. В силу малости добавки лития газ в рассматриваемом интервале изменения параметров считается идеальным [3].

Электропроводность газа $\sigma(\rho, T)$ рассчитывалась по формуле для частично ионизированного газа [4]. Необходимое для этого расчета значение эффективного сечения столкновения электронов с нейтральными атомами водорода Q_{ea} бралось из работы [5].

При интегрировании системы уравнений используются следующие краевые условия. Газодинамические параметры (температура T_1 , плотность ρ_1 , скорость U_1 на левой границе) задаются постоянными и определяются по параметрам торможения T_0 и P_0 на входе в канал. При постановке левого краевого условия по магнитному полю предполагается, что при $r < r_1$ газ не взаимодействует с ним, т. е. в этой области магнитное поле постоянно. Тогда из интегральных уравнений Максвелла и закона Ома получаем краевое условие при $r = r_1$ для уравнения индукции магнитного поля. Магнитное поле на правой границе поддерживается постоянным и равным своему начальному значению.



Фиг. 1

Предполагалось, что в начальный момент времени $t = 0$ в канале существует течение с известным распределением параметров

$$T = T(r), \quad \rho = \rho(r), \quad U = U(r), \quad H = H(r)$$

Это распределение находилось из численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики, описывающих одномерное стационарное течение газа в канале. Полученный набор стационарных источников для различных значений магнитного поля (на фиг. 1 представлены стационарные распределения температуры (фиг. 1, а) и магнитного поля (фиг. 1, б) по радиусу канала) использовался в дальнейшем в качестве начальных данных для счета нестационарной задачи. На фиг. 1, а кривые 1—5 относятся к $H/1000 = 7.75, 8.79, 9.45, 10.366, 11.65$ э.

Локальное возмущение температуры ΔT_1 задавалось в области $r_1 < r < r_2$ (фиг. 2). Последующая эволюция такого возмущения [1], с одной стороны, определится его взаимодействием с магнитным полем и выделением джоулева тепла, с другой стороны, цилиндрическое расширение и гидродинамический разлет уменьшают температуру и, следовательно, электропроводность.

Если взаимодействие с магнитным полем играет ведущую роль, то возмущение «подхватывается» и развивается в T -слой.

Можно показать, что теплопроводность и излучение не влияют на процесс развития неустойчивости при заданных параметрах газа, так как количество тепла, отводимого от возмущения теплопроводностью или излучением за период колебания значительно меньше энергии возмущения. Проведенные оценки для области исследуемых параметров газа позволяют пренебречь влиянием процессов теплопереноса на величину критического

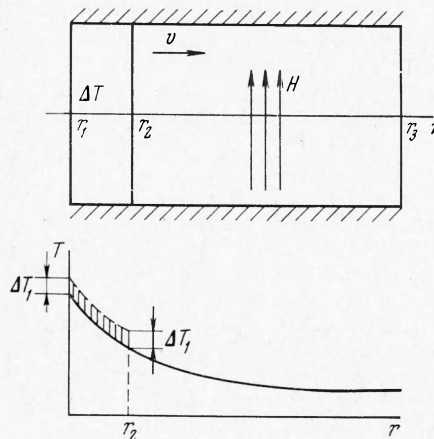
параметра взаимодействия S^+ при выполнении для температуры и длины возмущения следующих условий: $T \leq 10^4$ °K и $\lambda \geq 1$ мм.

При расчете на стационарный источник в области на входе в канал $r_1 < r < r_2$, размеры которой составляют ~ 0.2 всей длины канала $l = 1.1$ м, накладывалось конечное возмущение температуры. В начальный момент времени $t = 0$ во всех точках области возмущения задается одинаковое повышение температуры ΔT_1 , как это показано для произвольного распределения температуры на фиг. 2. При этом скорость и плотность остаются прежними.

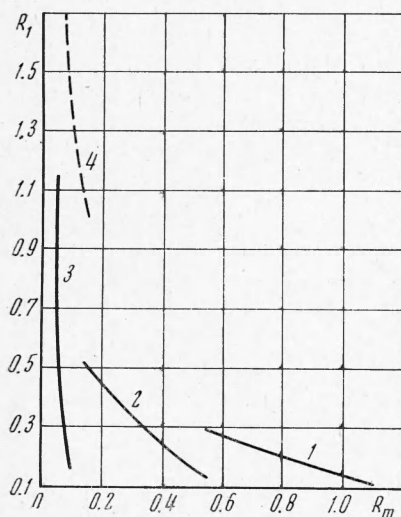
В последующие моменты времени наблюдалось поведение такого локального возмущения, введенного в потоки газа различной проводимости, в магнитном поле. При давлении торможения $P_0 = 50$ атм потоки различались температурой торможения на входе $T_0 = 8000, 7000, 6000$ °K. Этим значениям соответствовали $R_m^+ = 4.78, 2.18, 1$. В каждом случае варьировалось начальное повышение температуры ΔT_1 совместно с длиной возмущения λ (т. е. варьировалось значение R_m , рассчитанное по длине и температуре возмущения) для различных значений магнитного поля, полученных из расчета стационарного источника. Так, например, для $R_m^+ = 4.78$ при изменении магнитного поля H в пределах $6092 \div 11650$ э варьировались параметры возмущения $\Delta T_1 = 130 \div 750$ °K, что соответствовало $R_m = 0.634 \div 1.22$. Для каждого магнитного поля и R_m^+ можно найти некоторое критическое значение R_m , при превышении которого вносимое в поток локальное возмущение температуры развивается в T -слой.

Результаты, полученные для $R_m^+ = 4.78, 2.18$ и 1 , можно наглядно представить в виде трех граничных кривых (1, 2, 3 на фиг. 3), построенных в безразмерных координатах возмущения $R_m - R_H$. Кривая 4 соответствует значению $R_m^+ \ll 1$. Здесь $R_H = H^2 / 8\pi P_+$ (H — приложенное магнитное поле, P_+ — усредненное по возмущению давление). Вдоль этих граничных кривых параметр взаимодействия $S = S^+$. Возмущение развивается в T -слой, если его параметры R_m, R_H определяют точку, лежащую над граничной кривой $S = S^+$ и затухает, если эта точка лежит ниже соответствующей кривой.

Относительное расположение кривых при $R_m^+ \gg 1$ объясняется различной степенью взаимодействия основного потока с магнитным полем. Для одного и того же значения приложенного магнитного поля H (или R_H) большему R_m^+ будет соответствовать большее вытеснение магнитного



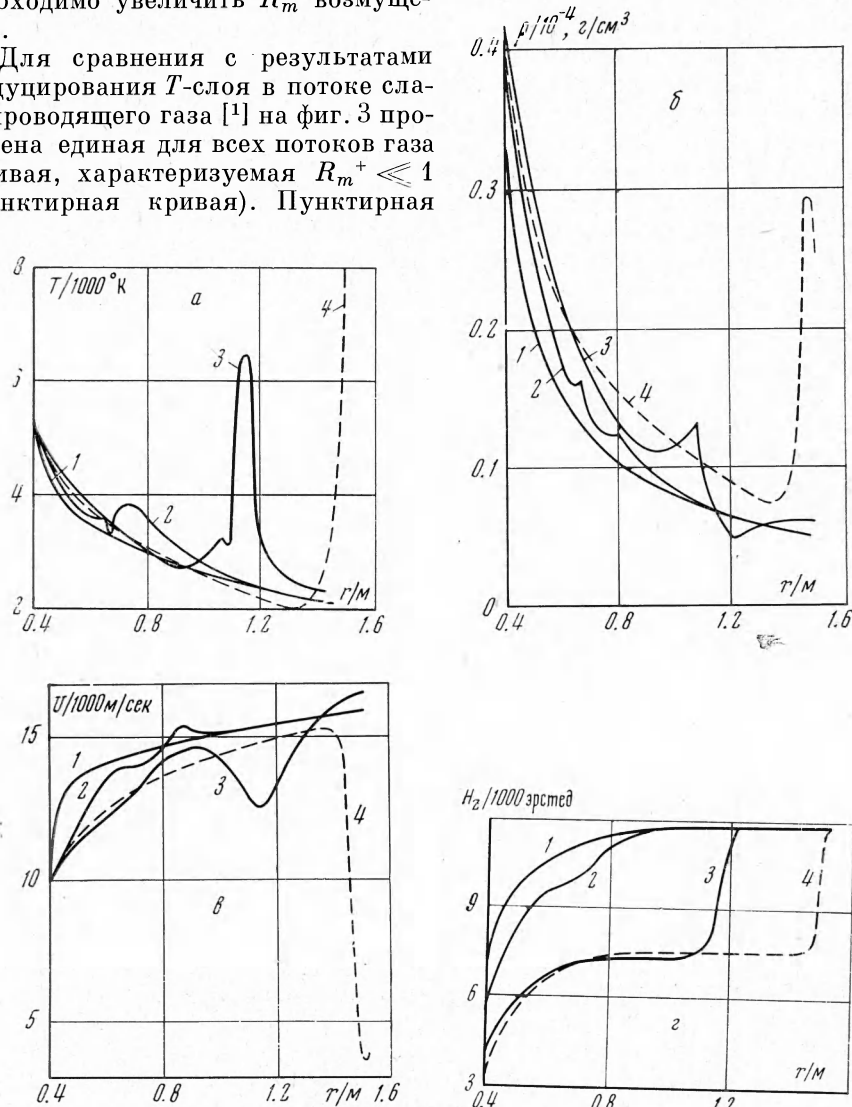
Фиг. 2



Фиг. 3

поля на входе в канал при стационарном течении. Следовательно, при расчете устойчивости этого стационарного течения действующее значение магнитного поля $H_+ = H - H_u$ (H_u — магнитное поле от токов в плазме) меньше и для подхвата возмущения при данном действующем поле H_+ необходимо увеличить R_m возмущения.

Для сравнения с результатами индуцирования T -слоя в потоке слабопроводящего газа [1] на фиг. 3 проведена единая для всех потоков газа кривая, характеризующаяся $R_m^+ \ll 1$ (пунктирная кривая). Пунктирная



Фиг. 4

кривая лежит выше рассмотренных здесь граничных кривых. Это означает, что при $R_m^+ \ll 1$ требуется большее значение параметра взаимодействия S^+ , чтобы осуществился подхват возмущения. Для слабопроводящего газа характерно одностороннее влияние возмущения на поток газа, однако в случае $R_m^+ > 1$ на характер развития внесенного возмущения оказывает влияние поток, в котором наблюдается развитие возмущения. Электрические токи окружающей плазмы складываются с токами в возмущении, взаимодействие с магнитным полем улучшается

и тогда для подхвата одного и того же возмущения, характеризуемого R_m , в потоке хорошо проводящего газа потребуется меньшее значение S^+ по сравнению с потоком газа, для которого $R_m^+ \ll 1$.

Другой особенностью рассмотренного анализа устойчивости течения является то, что для каждого $R_m^+ > 1$ существует такое достаточно большое критическое значение магнитного поля H^* , при превышении которого $H \geq H^*$ не удастся получить установившегося течения при $t \rightarrow \infty$, хотя в поток не внесено никакого возмущения [6]. В данном случае для $R_m^+ = 4.78$ критическое значение $H^* = 10366$ э и соответственно при $R_m^+ = 2.18$ и 1 $H^* = 13700$ и 20000 э. Распределение параметров при этом соответствует развитию T -слоя. Это свидетельствует о том, что наличие в среде диссипативных прецессов, обусловленных джоулевой диссипацией и возрастающей зависимостью электропроводности от температуры, даже в отсутствие в потоке конечного возмущения температуры $\Delta T_1 = 0$ ($R_m = 0$) приводит не к затуханию малых возмущений, а к их нарастанию и качественной перестройке всего течения. На фиг. 4, $a - z$ это проиллюстрировано в виде постепенного развития T -слоя во времени для $R_m^+ = 4.78$ и $H = 11650$ э $> H^*$. Кривые 1, 2, 3, 4 относятся к значениям времени $t = 0.2 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-5}$, 10^{-4} сек.

Наряду с рассмотрением устойчивости стационарного течения к возмущениям конечной амплитуды исследовалась реакция исходного состояния на бесконечно малые возмущения (природа возникновения этих возмущений может быть весьма разнообразной). В такой системе может развиваться перегретая неустойчивость, вызванная сильной зависимостью проводимости от термодинамических параметров потока. Невозмущенные параметры зависят от радиуса, поэтому при линеаризации исходной системы уравнений в отличие от работ [7-9] будем учитывать градиенты невозмущенных параметров. Решение линеаризованной системы уравнений будем искать в виде

$$\exp i (K_x x + K_y y - \omega t) \quad (2)$$

где K — волновой вектор, ω — частота колебаний.

Используя (2), получаем из исходной системы уравнений дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} D(\omega, K_x, K_y) &= |a_{ij}| = 0 \quad (3) \\ a_{11} &= U_0' - i\omega, \quad a_{12} = \rho_0' + i\rho_0 K_x \\ a_{13} &= i\rho_0 K_y, \quad a_{21} = U_0 U_0' + iK_x P_0 / \rho_0'' \\ a_{22} &= \rho_0 U_0' + i\omega \rho_0, \quad a_{24} = iK_x P_0 / T_0 \\ a_{25} &= -j_0 + iB_0 K_x / \mu, \quad a_{31} = iK_y P_0 / \rho_0 \\ a_{33} &= -i\omega \rho_0, \quad a_{34} = iK_y P_0 / \rho_0, \quad a_{35} = iK_y B_0 / \mu \\ a_{41} &= C_{v0} U_0 T_0' + P_0 U_0' / \rho_0, \quad a_{43} = iP_0 K_y \\ a_{42} &= P_0 C_{v0} T_0' + iK_x P_0, \quad a_{44} = K^2 \lambda_* - i\rho_0 C_{v0} \omega \\ a_{45} &= -2iK_x B_0' / \sigma_0 \mu^2, \quad a_{52} = iK_x B_0 + B_0' \\ a_{53} &= iK_y B_0, \quad a_{54} = \beta B_0'' / \mu \sigma_0 T_0 \\ a_{55} &= -i\omega + U_0' + K^2 / \mu \sigma_0, \quad a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{32} = \\ &= a_{51} = 0, \end{aligned}$$

$$\beta = \partial \ln \sigma_0 / \partial \ln T_0$$

$$K^2 \lambda_* = (\beta / \mu^2 \sigma_0 T_0) (B_0')^2 + P_0 U_0' / \rho_0$$

Индекс 0 относится к невозмущенным параметрам течения, штрихом обозначены производные невозмущенных параметров по радиусу, j_0 —

плотность электрического тока, B_0 — индукция магнитного поля, μ — магнитная проницаемость, C_{v0} — теплоемкость.

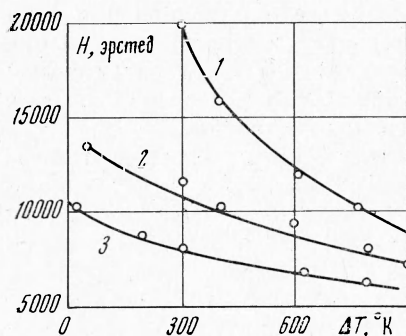
Полученное дисперсионное уравнение является многочленом пятой степени относительно ω . Необходимым условием возникновения неустойчивости является требование

$$\text{Im} \omega = \omega_i > 0 \quad (4)$$

хотя бы для одной из частот, определяемой из уравнения (3) для действительных значений K (длина волны возмущения $\lambda \sim 1/K$ задавалась равной счетному интервалу в задаче об устойчивости исходного течения к конечным возмущениям). Условие (4) является необходимым, достаточным является требование, чтобы за время нахождения в канале амплитуда возмущений успела достаточно возрасти. Последнее требование может быть записано в виде

$$\omega_i \tau > 1 \quad (5)$$

Здесь τ — характерное время задачи, равное по порядку величины $\tau = l/V$, где V — фазовая скорость. Подставляя в неравенство (5) выражение для ин-



Фиг. 5

кремента перегретой неустойчивости, получим

$$\begin{aligned} \omega_i \tau \sim \frac{\partial \ln \sigma_0}{\partial \ln T_0} j_0^2 \tau / \sigma_0 \rho_0 C_{v0} T_0 &= (\sigma_0 U_0^2 B_0^2 / \rho_0 C_{v0} T_0) \frac{l}{V} = \\ &= R_m R_H > \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln \sigma_0} \frac{V \lambda}{U_0 l} \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) можно переписать в виде

$$S = R_m R_H > S^+$$

Для нахождения границ устойчивости дисперсионное уравнение (3) решалось численно для нескольких точек в канале при $K_y = 0$. Для данного случая наиболее опасной (ω_i максимально) является точка на входе в канал, где градиенты параметров велики. Полученные критические значения магнитных полей представлены на фиг. 5 и совпадают с результатами анализа устойчивости по отношению к конечным возмущениям, когда амплитуда возмущений стремится к нулю ($\Delta T_1 \rightarrow 0$). Расчет критических значений магнитных полей был выполнен Е. В. Кудрявцевой.

На фиг. 5 представлена также зависимость амплитуды возмущения ΔT_1 от магнитного поля при $R_m^+ = 1, 2.18, 4.78$ — кривые 1, 2, 3 соответственно.

Проведенный анализ позволяет заключить, что перегретая неустойчивость при дальнейшем нелинейном развитии превращается в состояние, названное авторами [1] T -слоем.

Авторы благодарят Л. М. Дегтярева, Л. А. Заклязьминского, А. П. Фаворского за полезные обсуждения и советы при выполнении работы.

Поступила 27.VI.1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Дегтярев Л. М., Закалязьминский Л. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Соколов В. С., Фаворский А. П. Развитие конечных локальных возмущений электропроводности в потоке слабопроводящего газа в присутствии магнитного поля. Теплофизика высоких температур, 1969, т. 7, вып. 3.

2. Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. И., Курдюмов С. П. Численные методы решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1967.
 3. Гроуз, Нили. Влияние неидеальности используемого в качестве толкающего газа водорода на параметры ударной трубы. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 6, стр. 221.
 4. Lin Shao-Chi, Reisler E. L., Kantrowitz A. Electrical conductivity of highly ionized argon produced by shock waves J. Appl. Phys, 1955, vol. 26, No 1, p. 95.
 5. Devoto R. S. Transport coefficients of partially ionized hydrogen. J. Plasma Phys., 1968, vol. 2, No 4, pp. 617—631.
 6. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 4.
 7. Артюшков Е. В., Морозов А. И. О продольной устойчивости одномерного течения проводящего газа. Теплофизика высоких температур, 1968, т. 6, вып. 4, стр. 525—534.
 8. Артюшков Е. В. Исследование устойчивости продольных коротковолновых колебаний в квазиодномерном потоке проводящего газа. Теплофизика высоких температур, 1968, т. 6, вып. 5, стр. 851—862.
 9. Саночкин Ю. В. О диссипативной неустойчивости неизотермического электропроводящего потока между параллельными пластинами в поперечном магнитном поле. ПМТФ, 1967, № 5, стр. 21.
-