УДК 51: 101.8
DOI: 10.15372/PS20210406

В.М. Резников

КРИТИКА ОСНОВАНИЙ ПРИНЯТИЯ МОДЕЛЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ НА ОСНОВЕ ИНТУИТИВНЫХ АРГУМЕНТОВ

В статье проведен анализ значимости понятия независимости для философии, чистой математики и прикладной математики. Так, примеры из геометрии и теории множеств демонстрируют, что исследования утверждений, независимых от аксиоматик, явились импульсом для развития как этих наук, так и математической логики.

Наибольшее внимание уделено исследованию независимости в приложениях. Как известно, в самых популярных приложениях математических дисциплин, таких как элементарная теория вероятностей и математическая статистика, часто используют модели независимых экспериментов. Так как формальная верификация отношения независимости оказывается трудоемкой, часто вводят независимость на основе интуитивных рассуждений. В статье продемонстрирована несостоятельность аргументов в пользу принятия модели независимых испытаний на основе интуитивных соображений, таких как контроль условий проведения экспериментов и ничтожная корреляция случайных величин. Намечены перспективы принятия независимости вне чисто математических подходов, на основе философских и естественно-научных принципов: общей причины и максимальной энтропии.

Ключевые слова: философия; категория; причина; математика; неэвклидова геометрия; теория вероятностей; верификация независимости; принцип общей причины; принцип максимальной энтропии

V.M. Reznikov

CRITICISM OF THE GROUNDS FOR ADOPTING INDEPENDENT EXPERIMENT MODELS BASED ON INTUITIVE ARGUMENTS

The article analyses the value of the concept of independence for philosophy, pure mathematics and applied mathematics. Thus, examples from geometry and set theory demonstrate that the study of mathematical statements independent of axiomatics provided an impetus for the development both of these sciences and mathematical logic.

The main attention is paid to the analysis of the use of independence in applications. As we know, the most popular applications of mathematical disciplines such as elementary probability theory and mathematical statistics often use models of independent experiments.

Since formal verification of the relation of independence is labor-intensive, independence is often introduced on the basis of intuitive reasoning. The article shows the inconsistency of arguments in favor of adopting independent experiment models based on intuitive considerations, such as control of experimental conditions and a negligible correlation of random values. The author outlines the prospects for accepting independence out of pure mathematical approaches, but on the basis of philosophical principles and those of natural sciences, namely the common cause principle and the maximum entropy principle.

Keywords: philosophy; category; cause; mathematics; non-Euclidean geometry; probability theory; verification of independence; common cause principle; maximum entropy principle

Введение

Понятие «независимость» находится на периферии интересов философов, однако, по нашему мнению, оно значимо для философии, науки, образования, так как сопрягается с философскими категориями, общенаучными понятиями и, бесспорно, имеет общенаучный или даже философский статус. Приведем несколько примеров в защиту философского статуса понятия причины. Так, в онтологическом плане независимые положения дел это элементы мироздания у философов Древней Греции: вода, огонь, воздух и т.д. Мир определяется на основе этих элементов, а они независимы от остального мира. Также понятие причины определяет понятие следствия, но не зависит от него, тем самым понятие независимости сопрягается с категорией причины, представлением об элементах мироздания и др. Однако отметим, что на категориальном уровне одни категории частично определяются посредством других категорий, и это верно также для категории «причина»: она, например, частично определяется посредством категории «субстанция».

Независимость оказывается значимым условием познания, обучения и любой интеллектуальной работы. Действительно, познание было невозможным или очень сложным, если бы объект познания не мог быть выделен, а сложная проблема стала бы нерешаемой, если бы она не могла быть разделена на относительно простые, мало-связанные задачи.

Так же как и в философии, в науке проблеме независимости не уделяется пристального внимания, за исключением физики, так как в ней законы сохранения и принципы инвариантности имеют особую значимость. Принципы инвариантности в физике весьма основательно представлены в методологической литературе, поэтому остановимся на анализе понятия независимости в математике. Отметим, что идея независимости имеет большое значение в чистой математике, например в геометрии и теории множеств. Так, безуспешные попытки многих математиков вывести постулат Евклида на основе аксиоматики эвклидовой геометрии явились импульсом для создания Лобачевским неэвклидовой геометрии, в которой этот постулат не является верным. Необходимо отметить, что создание неэвклидовой геометрии было первым шагом к пониманию, того, что аксиомы и постулаты в математике не обязательно должны описывать свойства, присущие миру опыта. Теперь несколько слов о независимости в теории множеств. Так, первая проблема Гильберта заключается в исследовании проблемы о множествах промежуточной мощности между счетными и континуальными множествами. Эта проблема была решена Геделем и Коэном. Сначала Гедель доказал, что утверждение о том, что такое множество не существует, не противоречит аксиоматике Цермело – Френкеля, а позднее Коэн получил доказательство утверждения о том, что существование такого множества также не противоречит этой аксиоматике. Доказательства независимости утверждений привели к разработке новых математических подходов, в частности методов вынуждения.

Наша работа посвящена проблеме верификации свойства независимости в приложениях теории вероятностей на основе формальных и интуитивных подходов. Актуальность проблемы связана с тем, что в элементарной теории вероятностей почти все результаты получены в предположении, что случайные величины, описывающие результаты экспериментов, оказываются независимыми. В то же время формальная проверка независимости оказывается трудоемкой, поэтому становится актуальным вопрос о правомерности введения независимости на основе содержательных аргументов.

Верификация независимости в теории вероятностей и математической статистике

Идея независимости играет большую роль в теории вероятностей, например, в теоремах элементарной теории вероятностей предполагается независимость или слабая связанность результатов испытаний. Независимость чрезвычайно упрощает вычисления. Так, в случае независимости событий A, B, C, D их совместная вероятность определяется следующим образом:

$$P(ABCD)=P(A)\times P(B)\times P(C)\times P(D).$$

В случае зависимых событий их совместная вероятность определяется более сложным образом:

$$P(ABCD)=P(A/BCD)\times P(B/CD)\times P(C/D)\times P(D).$$

Для произвольного числа n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, условие для их независимости имеет следующий вид [2]:

$$P(A_{i1}A_{i2}A_{i3}\ldots A_{im}) = P(A_{i1}) \times P(A_{i2}) \times P(A_{i3}) \times\ldots\times P(A_{im}),$$
$$m = 1, 2, \ldots, n;\ 1\le i_1<i_2<i_3<\ldots<i_m\le n.$$

Легко подсчитать, что для проверки независимости n событий, общее число проверяемых комбинаций вероятностей равно $2^n - n - 1$, а чтобы их осуществить, необходимо знать $2^n - 1$ вероятностей. Так как в реальных приложениях чаще используется не теория вероятностей, а математическая статистика, уместно остановиться на исследовании независимости в рамках последней дисциплины. Как известно, в математической статистике нет унифицированного определения независимости и проверка независимости носит контекстуальный характер. Например, если исследуемые случайные величины имеют нормальное распределение, тогда подходит верификация независимости с помощью коэффициента корреляции. Если две случайные величины имеют произвольное общее известное распределение, тогда для проверки их независимости адекватен критерий Пирсона хи-квадрат [3].

Для дальнейшего изложения потребуется теорема Бернулли.

Теорема Бернулли. Проводится n независимых испытаний события A, и m экспериментов оказались успешными. Известно, что теоретическая вероятность появления события A в каждом эксперименте равняется $p(A)$, а m/n – это частота события A, ε – это точность вычислений. Тогда при бесконечном числе экспериментов выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p(A)| < \varepsilon) = 1\,.$$

На первый взгляд, критерий Пирсона подходит и для верификации независимости результатов испытаний, относящихся к теореме Бернулли, так как вполне допустимо считать, что результаты бросания монеты, представляющие собой последовательность гербов и решек, имеют биномиальное распределение. Однако этот критерий проверяет независимость для двух случайных величин, представленных двумя группами данных, в то время как результаты эксперимента, связанного с теоремой Бернулли, представляют собой одну последовательность гербов и решек и фактически относятся к одной случайной величине.

Возникает вопрос: как правильно выбрать две группы данных?. На основе содержательного анализа это невозможно выполнить, и в то же время для такого рода ситуаций не разработаны и обоснованные стандартные формальные правила выделения подпоследовательностей, поэтому критерий Пирсона не подходит. Мы не будем сейчас останавливаться на применении нестандартных подходов проверки независимости. Отметим, что совсем непросто осуществить верификацию независимости.

Исследование адекватности принятия моделей независимых испытаний на основе интуитивных аргументов

Трудности формальной верификации независимости привели к тому, что в практике научных исследований формальная верификация не всегда осуществляется, а модели независимых испытаний часто принимаются на основе интуитивных и содержательных рассуждений. Возникает естественный вопрос об обоснованности интуитивных подходов. Приведем ряд примеров, посредством которых мы исследуем проблему адекватности моделей независимых испытаний в математике и физике, принятых на основе интуитивных и содержательных рассуждений.

Во-первых, Ю.И. Алимов справедливо отмечал, что в естественнонаучных и инженерных дисциплинах принятие формальных моделей осуществляется не на основе содержательных аргументов, а путем убедительной эмпирической верификации этих моделей [1]. Часто в качестве содержательных аргументов для принятия модели независимых испытаний используются соображения о контроле фоновых условий проводимых экспериментов. Однако за пределами физики полный контроль фоновых условий невозможен, причем даже в физике бывают проблемы с их контролем. Так, из истории физики известно, что когда в лаборатории Резерфорда открыли новый элемент радон, все приборы зашкаливали. И только, когда поняли, что новый элемент – газ, и дополнительно рафинировали условия проведения экспериментов, показания приборов стали корректными.

Во-вторых, не является обоснованным вполне интуитивный переход от слабозависимых случайных величин с ничтожными коэффициентами корреляциями к модели независимых экспериментов при большом числе данных. Идея о необоснованности такого перехода в случае большого числа результатов наблюдений нами иллюстрируется на примере из книги П.Е. Эльясберга [5]. В этом примере сделан сравнительный анализ статистических оценок для двух групп данных, представляющих собой нормально распределенные случайные величины большого объема. Первую группу представляют независимые случайные величины, а вторую – случайные величины с попарным коэффициентом корреляции 0,01, число случайных величин в каждой группе равно 1000. Для каждой группы данных вычислялась сумма случайных величин, а затем определялись дисперсии этих сумм. Оказалось, что дисперсии различались более чем на порядок, а при дальнейшем увеличении выборок, например до 10 000, оценки дисперсий разнились более чем на два порядка. Полученный результат трудно признать интуитивным. Кроме того, во многих областях знания не принимают во внимание коэффициенты корреляции порядка 0,01, а в лучшем случае учитывают 0,1.

Отметим, что структура примера такова, что для любого самого ничтожного коэффициента корреляции можно найти такой объем выборки случайных величин с этим коэффициентом, при котором переход к модели независимых испытаний окажется необоснованным. Несмотря на неинтуитивность полученного результата, он является вполне логически корректным. Дело в том, что при большом числе испытаний многие статистические модели становятся «капризными», а именно, при минимальном отклонении данных от модели статистические критерии отвергают адекватность моделей.

В-третьих, распространенные общепринятые во многих областях знания подходы являются вполне интуитивными. Так, например, в случае сомнений в найденной закономерности, полученной на основе реализации N экспериментов, естественно проведение еще N испытаний с целью уточнения полученных результатов. Однако в статье Г. Шейфера и В. Вовка показано, что общепринятые подходы не адекватны для верификации свойства статистической независимости [10]. Шейфер и Вовк отметили, что проведение верификации независимости осложнено тем обстоятельством, что при осуществлении новых экспериментов необходимо проверять независимость для группы данных, содержащих все прежние и новые результаты исследований. В этом заключается принципиальная уникальность верификации независимости: она является интегральной характеристикой, поэтому ее определение предполагает учет всех известных результатов. Убедительное введение независимости в модель исследований предполагает теоретическое обоснование изучаемых феноменов, в противном случае необходимо ее эмпирическое обоснование с учетом результатов всех проведенных испытаний.

В-четвертых, модели независимых экспериментов популярны в области искусственного интеллекта. Отметим, что некоторые из них имеют вполне интуитивный характер. Прежде чем исследовать обоснованность этих моделей, уделим некоторое внимание формальному аппарату. В качестве формального аппарата используется синтез теории графов и теории вероятностей. Приведем минимальную информацию о теории графов применительно к исследованиям в области экспертных систем.

Граф – это совокупность двух множеств: множества вершин и множества связей. Множество вершин обычно обозначается символом V, а множество ребер – символом E, соответственно, граф символически изображается так: $G = (V, E)$. Обычно вершины – это интерпретации некоторых событий или значений переменных, описывающих исследуемые положения дел. С помощью множества ребер описываются отношения, или связи, переменных. Если переменные связаны, то они соединяются ребром, в противном случае оказываются несвязанными, т.е. независимыми.

Важным для дальнейшего изложения является понятие пути. Последовательность ребер $X_1, X_2, \ldots, X_N$ называется путем, если любые два соседних ребра X_i, X_{i+1} оказываются связанными. Если известно, что одна вершина не просто связана с другой вершиной, но оказывает влияние на нее, то они соединяются ребром со стрелкой. В этом случае графы называются направленными. В приложениях наиболее популярны направленные графы без петель (Directed Acyclic Graph, DAG) [8].

В теории графов для описания отношений используются отношения родственности. Пусть дан ориентированный граф $G = (V, E)$, X и Y – вершины графа. Если ребро направлено от X к Y, то X называется родителем, а Y – ребенком. Если существует путь от X к Y, то X называется предком, а Y – потомком; если не существует пути от X к Y, то Y не является потомком X и называется непотомком.

Теперь укажем на необходимые понятия из теории вероятностей. Нам понадобится только понятие распределения вероятностей для переменных, описывающих вершины графа, символически – $P(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. В простейшем случае распределение – это множество значений переменной с вероятностями, с которыми она принимает эти значения. Для указания на граф $G = (V, E)$, у которого вершины имеют распределение P, введем обозначение (G, P). Теперь перейдем к анализу базового определения независимости в экспертных системах.

Независимость по вероятности определяется на основании марковского условия на графах. Дадим определение марковского условия. Пусть дан граф DAG G с совместным распределением вершин P. Будем говорить, что (G, P) удовлетворяет марковскому условию, если каждая переменная $X \in V$ в вероятностном плане является условно независимой от множества непотомков, где в качестве условия взяты родители переменной X [8].

Формальный аппарат экспертных систем является элегантным, так независимость на графах влечет независимость по вероятности. Отметим, что интуитивность марковского условия не вызывает никаких сомнений. Однако применимость экспертных систем на основе марковского условия в реальных ситуациях предполагает эмпирическую верификацию адекватности этого условия.

Альтернативы формальным подходам введения независимости

А.Н. Колмогоров отмечал, что сложно в рамках математики сформулировать условия использования моделей независимых экспериментов. По мнению знаменитого математика, эта проблема относится к компетенции философии естествознания [2]. Имеются ли в философии адекватные ресурсы для исследования свойства независимости? Кто из отечественных или зарубежных философов занимался проблемой независимости? Так, в России известны публикации Ю.В. Сачкова, в которых обосновывается значимость исследований независимости в науке и философии [4]. Сачков подчеркивал, что исследованию независимости не было уделено специального внимания ни в научной философии, ни в большинстве наук. Приятным исключением оказывается физика, где законы сохранения и инварианты имеют первостепенную значимость. Так как, с одной стороны, понятие независимости является значимым, а по нашему мнению, оно имеет общенаучный, а может быть, и философский статус и, с другой стороны, изучение независимости находится на периферии исследований, то имеет смысл дать хотя бы предварительное описание содержания этого понятия.

Содержание понятия независимости

В научном контексте независимые положения дел не являются связанными или они связаны случайным образом. Поэтому представления о случайности и несвязанности также входят в объем понятия «причина». В логике суждение *A* не зависит от суждения *B*, если оно невыводимо на основе *B*. Суждения, невыводимые в некоторой аксиоматической системе, являются в ней независимыми от аксиом. Поэтому невыводимость, а также широко используемое в физике понятие инвариантности являются базовыми элементами понятия независимости.

Перейдем к описанию независимости с помощью причинных отношений. Очевидно, что если *A* – причина *B*, то *A* не зависит от *B*. Это элементарная идея, она находит развитие в принципе общей причины, введенном Г. Рейхенбахом. Содержательно принцип общей причины означает следующее: если события *A* и *B* коррелируют, но при учете события *C* *A* и *B* становятся независимыми, то *C* является их общей причиной, при этом *C* по времени предшествует *A* и *B*.

Принцип общей причины интенсивно исследуется в работах специалистов по философии физики и философствующих физиков. Например, П. Суппес использовал данный принцип для изучения характера скрытых причин в квантовой физике [11]. Так, в рамках вероятностных причинных формализаций он определял статистические характеристики, в частности дисперсию событий, которые являлись причинами других событий. Если эти дисперсии оказывались равными нулю, то причины оказывались детерминистскими, в противном случае имели вероятностный характер. Суппесом были получены интересные результаты, однако, по его мнению, они незначимы для физики, так как были основаны на предположении о существовании совместного распределения физических характеристик, например ускорения и спина, что не является характерным для квантовой механики. Тем не менее в работах филофствующих физиков продолжаются исследования принципа общей причины, и для его описания используются различные средства, в том числе теория вероятностей, тензоры и др. [7].

Теперь дадим краткое описание независимости с помощью общенаучных принципов, в частности принципа максимальной энтропии.

В приложениях экспертных систем независимость часто вводится на основании принципа максимальной энтропии [9]. Впервые принцип максимальной энтропии был разработан и использован в теории связи К. Шенноном. Принцип заключается в максимизации функции энтропии. В самом простом случае формула энтропии имеет следующий вид:

$$H = -P \times \mathrm{Log}P.$$

Принцип максимальной энтропии вполне обоснован в термодинамике, теории информации. Однако решающими аргументами в пользу применения принципа для вычисления вероятностей в экспертных системах считаются доводы, предложенные Дж. Пэрис и А. Венковской [9]. Они показали совместимость принципа максимальной энтропии с целым рядом рациональных оснований. К таковым относятся:

1) принцип переименования. Полученное решение для задачи вычисления вероятности выпадения грани для правильной кости не изменится, если будет рассмотрена другая грань;

2) принцип иррелевантной информации. Знание, иррелевантное проблеме игнорируется;

3) принцип постоянства. Получение данных, поддерживающих решение, не изменяет принятое решение;

4) принцип относительности. Новая информация имеет значимость относительно решаемой проблемы;

5) принцип непрерывности. Небольшие изменения в знании не приводят к большим изменениям в назначенных вероятностях;

6) принцип эквивалентности. Вероятностные оценки на основе двух одинаковых баз знаний должны быть одинаковыми.

Заключение

В статье обоснована значимость исследований понятия «независимость» для науки и философии. Определены понятия и категории, которые prima facie адекватны для раскрытия содержания понятия независимости. Основное внимание уделено проблеме верификации свойства независимости в теории вероятностей в контексте ее приложений. Корректная верификация независимости формальным образом оказывается трудоемкой. В то же время демонстрируется, что использование моделей независимых экспериментов, принятых на основе интуитивных и содержательных аргументов, не гарантирует от ошибок при оценивании параметров распределений на основе данных.

И в завершение несколько слов о предполагаемых дальнейших исследованиях. В настоящее время известны различные концепции независимости: вероятностная, логическая контрафактическая и др. [6]. Открытым остается вопрос о взаимоотношении этих концепций.

Литература

1. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. – М.: Знание, 1980.

2. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.

3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.

4. *Сачков Ю.В.* Вероятностная революция в науке: Вероятность, случайность, независимость, иерархия. – М.: Научный мир, 1999.

5. *Эльясберг П.Е.* Измерительная информация: Сколько ее нужно? Как обрабатывать? – М.: Наука, 1983.

6. *Fitelson B., Hajek A*. Declarations of independence // Synthese. – 2017. –Vol. 194 (10). – P. 3979–3995.

7. *Hofer-Szabó G., Rédei M., Szabó L.E.* Common-causes are not common common-causes // Philosophy of Science. – 2002. – Vol. 69. – P. 623–636.

8. *Neapolitan E.* Learning Bayesian Networks. – Chicago, Il: Northeastern Illinois University Press, 1990.

9. *Paris J.V., Vencovska A.* In defense of maximum entropy inference process // International Journal of Approximate Reasoning. – 1997. – Vol. 17. – P. 77–103.

10. *Shafer G., Vovk V.* The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21, No. 1. – P. 70–98.

11. *Suppes P.* Probabilistic Methaphysics. – Oxford: Basil Blackwell Publisher Ltd., 1984.

References

1. *Alimov Yu.I.* (1980). Alternativa metodu matematicheskoy statistiki [An Alternative to the Method of Mathematical Statistics]. Moscow, Znanie Publ.

2. *Kolmogorov A.N.* (1974). Osnovnye ponjatija teorii verojatnostey [Foundations of the Theory of Probability]. Moscow, Nauka Publ.

3. *Cramer H.* (1975) *Matematicheskie metody statistiki* [Mathematical methods of statistics]. Moscow, Mir. (In Russ.).

4. *Sachkov Yu.V.* (1999). Vepoyatnostnaya revolyutsiya v nauke (veroyatnost, sluchaynost, nezavisimost, ierarkhiya) [Probabilistic revolution in science (probability, randomness, independence, hierarchy)]. Moscow, Nauchnyy Mir.

5. *Elyasberg P.E.* (1983). Izmeritelnaya informatsiya: Skolko ee nuzhno? Kak obrabatyvat [Measurement Information: How Much of it Does One Need? How to Process It?]. Moscow, Nauka Publ.

6. *Fitelson B., Hajek A*. (2017). Declarations of independence. Synthese, 194(10), 3979-3995.

7. *Hofer-Szabó G., Rédei M., Szabó L. E.* (2002). Common-causes are not common common-causes. *Philosophy of Science,* **6**9, 623-636. DOI: 10.1086/344625.

8. *Neapolitan E.* (1990). Learning Bayesian Networks. Illinois University Press.

9. *Paris J. V., Vencovska A.* (1997). In defense of maximum entropy inference process. International Journal of approximate reasoning, 17, 77–103.

10. *Shafer G., Vovk V.* (2006). The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. Statistical Science, 21(1), 70–98.

11. *Suppes P.* (1984). Probabilistic methaphysics. Basil Blackwell Publisher Ltd.

Информация об авторе

Резников Владимир Моисеевич – Институт философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8); доцент кафедры логики и методологии науки Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2)

mathphil1976@gmail.com

Information about the author

Reznikov Vladimir Moiseevich – Institute of Philosophy and Law, SB RAS (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090); associate professor of the Department of Logic and Methodology of Science at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia)

mathphil1976@gmail.com

Дата поступления 06.10.2021