

УДК 517:9:539:3

ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНАЯ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ СОСТАВНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

С. К. Годунов

Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск

E-mail: godunov@math.nsc.ru

Описана формализация в виде гиперболической системы для гидродинамики многофазной среды или смеси с учетом химических реакций. Выделены дополнительные условия, совместные с системой, которым должны подчиняться решения, чтобы обеспечить сохранение энергии и импульса.

Ключевые слова: производящий потенциал, гиперболичность, диссипация, энтропия.

Введение. Широкое использование разнообразных математических моделей сплошных сред в промышленных расчетах и теоретических исследованиях поставило задачу формализовать законы термодинамики, которым должны подчиняться системы уравнений, управляющие поведением решений таких моделей.

Примеры таких формализаций описаны в [1–5]. Настоящая работа продолжает коллекционирование систем галилеево-инвариантных уравнений, для конкретизации которых достаточно задания одного производящего потенциала L , выраженного через неизвестные функции u_i, q_j, \dots, T .

В п. 1 рассматриваются уравнения газовой динамики, в которых газ является смесью реагирующих между собой химических веществ. По существу, здесь речь идет об еще одной возможной формулировке, использующей хорошо известное описание реакций при помощи закона действующих масс. Нам пришлось в качестве неизвестных функций вместо обычных потенциалов Гиббса выбрать некоторые их комбинации, более удобные при использовании эйлеровых координат.

Уравнения из п. 2 можно рассматривать как усложненный вариант уравнений из п. 1. Среда здесь также считается смесью реагирующих веществ, но предполагается, что эти вещества раздроблены на мелкие, примыкающие друг к другу ячейки, фазовые переходы между которыми моделируются уравнениями того же типа, что и реакции в п. 1. Хотя ячейки рассматриваются как микроскопические детали, составляющие макроскопическую среду, описываемую нашими уравнениями, наличие этих деталей является причиной, по которой нужно учитывать неоднородность внутри ячеек поля скоростей (можно, например, предполагать, что движение границ ячеек вызывает в них эффект “присоединенных масс”, благодаря которому скорости вблизи границ отличаются от скоростей в центрах ячеек, или что ячейки-пузырьки перемещаются относительно основной массы, в которую они вкраплены). Для учета такого рода неоднородностей мы, кроме усредненного по соседним ячейкам вектора импульса с компонентами ρu_i , используем для каждого вещества еще одну векторную характеристику с компонентами $v_i^{(j)}$, имеющую размерность количества движения и характеризующую неоднородность поля скоростей. (При переходе в новую систему координат, движущуюся с постоянной скоростью относительно старой, компоненты u_i заменяются на $u_i + U_i$, тогда как $v_i^{(j)}$ не меняются.)

Наша модель возникла как естественное формальное видоизменение уравнений, используемых физиками для сверхтекучих жидкостей (см. [6]). Конкретным поводом для ее создания послужили теоретические работы [7–9] по моделированию жидкости с вкрапленными пузырьками. В этих работах была отмечена необходимость введения двух полей скорости для учета присоединенных к пузырькам масс жидкости. К сожалению, нам не удалось использовать результаты работ [7–9] при выводе наших уравнений, описывающих среду, в которой элементы содержат усреднения по большому числу пузырьков. Отчасти это вызвано тем, что в этих работах жидкость несжимаемая, а у нас сжимаемость учитывается, а отчасти, тем что неясно, как завершить эти работы, учитывая статистику колебаний пузырьков, что позволило бы учесть их воздействие на среду термодинамическим путем.

Мы не пытаемся выводить изучаемые в п. 2 уравнения и ограничиваемся приведенным выше кратким пояснением причин выбора параметров, описывающих среду. В то же время мы очень подробно обосновываем корректность (в локальном смысле) изучаемых уравнений в бездиссипативном варианте. Оказывается, наша система является симметрической гиперболической и можно выделить класс ее решений, на которых выполнены физически осмысленные законы сохранения. Включение реакций и диссипативных членов не нарушает, а видоизменяет эти законы сохранения, превращая один из них в закон возрастания энтропии.

Все эти факты, по существу, служат обоснованием разумности выбора предлагаемой системы из вовсе нетривиальных теоретических соображений. Нам хотелось бы привлечь внимание специалистов, изучающих многофазные среды, к обсуждению описываемой модели. Эту модель, конечно, нельзя считать окончательной, однако мы надеемся, что ее анализ может оказаться полезным.

1. Газовая динамика в почти равновесной химической среде. Состояние элемента среды, рассматриваемой в этом пункте, описывается давлением P , температурой T , а также внутренней энергией E , энтропией S и объемом V , приходящимися на единицу массы. Плотность ρ связана с удельным объемом равенством $\rho = 1/V$. Химический состав описывается числами N_j — количеством грамм-молекул j -го вещества в единице массы (в одном грамме). При этом

$$\rho = \sum_j \rho N_j, \quad \sum_j N_j = 1.$$

Через u_i обозначаются компоненты скорости перемещения центра тяжести элемента.

Так называемый термодинамический потенциал среды

$$\Phi = E - TS + PV$$

задается уравнением состояния

$$\Phi = \Phi(T, P, N_1, N_2, \dots).$$

Термодинамическое тождество

$$d\Phi = -S dT + V dP + \mu_k dN_k$$

связывает Φ с параметрами S , V и так называемыми химическими потенциалами Гиббса μ_j . Из этого тождества следует

$$\begin{aligned} dP &= \rho d(\Phi - \mu_k N_k - u_i u_i / 2) + \rho u_i du_i + \rho S dT + \rho N_j d\mu_j = \\ &= \left(\sum_j \rho N_j \right) d(\Phi - \mu_k N_k - u_i u_i / 2) + \rho u_i du_i + \rho S dT + \rho N_j d\mu_j = \\ &= \rho N_j d(\mu_j + \Phi - \mu_k N_k - u_i u_i / 2) + \rho u_i du_i + \rho S dT. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$q_j = \mu_j + (\Phi - \mu_k N_k) - u_i u_i / 2, \quad L = P,$$

получаем термодинамическое соотношение

$$dL = \rho N_j dq_j + \rho u_i du_i + \rho S dT$$

для производящего потенциала L , с помощью которого будет описываться система уравнений, управляющая движением среды и процессами в ней. Этот производящий потенциал задается уравнением состояния

$$L = L(q_1, q_2, \dots, u_1, u_2, u_3, T) = \Lambda(q_1 + u_i u_i / 2, q_2 + u_i u_i / 2, \dots, T).$$

При этом

$$\rho N_j = L_{q_j}, \quad \rho u_i = L_{u_i}, \quad \rho S = L_T, \quad \rho = \sum_j L_{q_j},$$

а полная энергия \mathcal{E} (внутренняя и кинетическая) единицы объема определяется формулой

$$\rho(E + u_i u_i / 2) = \mathcal{E} = q_j L_{q_j} + u_i L_{u_i} + T L_T - L.$$

Иными словами, \mathcal{E} — это преобразование Лежандра потенциала L по его аргументам q_j, u_i, T .

Если движение среды не сопровождается химическими реакциями, то оно описывается уравнениями газовой динамики

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k + P)}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho N_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho N_j)}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho S)}{\partial x_k} = 0,$$

в записи которых уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho)}{\partial x_k} = 0$$

заменено на законы сохранения масс

$$\frac{\partial \rho N_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho N_j)}{\partial x_k} = 0$$

для каждого компонента. Сумма равенств, выражающих эти законы, совпадает с уравнением неразрывности. С использованием введенных нами обозначений уравнения газовой динамики переписываются так:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial L_{q_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_j}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} = 0.$$

Линейная комбинация выписанных равенств с коэффициентами u_i, q_j, T соответственно на основании тождеств

$$\begin{aligned} u_i dL_{u_i} + q_j dL_{q_j} + T dL_T &= d\mathcal{E}, \\ u_i d(u_k L)_{u_i} + q_j d(u_k L)_{q_j} + T d(u_k L)_T &= d[u_k(\mathcal{E} + L)] \end{aligned}$$

приводит к закону сохранения энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial [u_k(\mathcal{E} + L)]}{\partial x_k} = 0.$$

Для описания реакций, протекающих в среде с почти равновесным химическим состоянием, можно использовать уравнения закона действующих масс (см., например, [10, 11])

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \equiv \frac{dN_j}{dt} = - \sum_s \nu_j^{(s)} \left(\frac{\nu_l^{(s)} \mu_l}{\tau_s} \right).$$

Стехиометрический коэффициент $\nu_j^{(s)}$ пропорционален числу грамм-молей j -го вещества, израсходованного (если $\nu_j^{(s)} > 0$) или произведенного (если $\nu_j^{(s)} < 0$) в реакции с номером s ; μ_k — химический потенциал k -го реагента. Через τ_s обозначено некоторое характерное для s -й реакции время. (Скорость реакции пропорциональна $1/\tau_s$.) Из закона сохранения массы следует, что стехиометрические коэффициенты при каждом фиксированном s должны быть связаны соотношением

$$\sum_k \nu_k^{(s)} = 0.$$

Поэтому

$$\nu_l^{(s)} \mu_l = \nu_l^{(s)} [\mu_l + (\Phi - \mu_j N_j - u_i u_i / 2)] = \nu_l^{(s)} q_l,$$

и уравнения для реакций переписываются следующим образом:

$$\frac{dN_j}{dt} = - \sum_s \nu_j^{(s)} \left(\frac{\nu_l^{(s)} q_l}{\tau_s} \right),$$

$$\frac{\partial \rho N_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \rho N_j)}{\partial x_k} = - \rho \sum_s \nu_j^{(s)} \left(\frac{\nu_l^{(s)} q_l}{\tau_s} \right).$$

Второе из этих равенств получается из первого с помощью уравнения неразрывности и в используемых переменных имеет вид

$$\frac{\partial L_{q_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_j}}{\partial x_k} = - \left(\sum_l L_{q_l} \right) \sum_s \nu_j^{(s)} \left(\frac{\nu_l^{(s)} q_l}{\tau_s} \right).$$

Оказывается необходимым ввести ненулевую правую часть и в уравнение для энтропии, записывая его так:

$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_T)}{\partial x_k} = \left(\frac{1}{T} \sum_l L_{q_l} \right) \sum_s \frac{(\nu_l^{(s)} q_l)^2}{\tau_s} \geq 0.$$

В результате система уравнений газовой динамики с учетом происходящих химических реакций выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{q_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_j}}{\partial x_k} = - \left(\sum_l L_{q_l} \right) \nu_j^{(s)} \left(\frac{\nu_l^{(s)} q_l}{\tau_s} \right),$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} = \left(\frac{1}{T} \sum_l L_{q_l} \right) \sum_s \frac{(\nu_l^{(s)} q_l)^2}{\tau_s},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial [u_k(\mathcal{E} + L)]}{\partial x_k} = 0.$$

Мы включили в систему и последнее равенство — закон сохранения энергии. Так же как и при отсутствии реакций, это равенство получается из предыдущих путем умножения на соответствующие множители u_i , q_i , T . Чтобы при этом получить в энергетическом уравнении нулевую правую часть, нам пришлось специальным образом определить правую часть в энтропийном уравнении. Тем самым было обеспечено также выполнение закона возрастания энтропии.

Дальнейшие видоизменения уравнений проводятся путем включения в них членов, описывающих вязкость, теплопроводность, диффузию и термодиффузию. Коэффициент теплопроводности обозначим через K , а матричные коэффициенты диффузии и векторные коэффициенты термодиффузии — через D_{jm} и B_j соответственно. Тензор σ_{ik} вязких напряжений, как обычно, выражается через производные скорости и неотрицательные коэффициенты вязкости α , β :

$$\sigma_{ik} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \beta \delta_{ik} \frac{\partial u_m}{\partial x_m}.$$

При этом мощность работы вязких сил в единице объема неотрицательна:

$$\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \alpha \sum_{ik} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right]^2 + \beta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right)^2 \geq 0.$$

Мы выписываем окончательные уравнения, включая в них и закон сохранения энергии, без дополнительных пояснений, надеясь, что это не вызовет затруднений у внимательных читателей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}, \\ \frac{\partial L_{q_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_j}}{\partial x_k} &= - \left(\sum_l L_{q_l} \right) \nu_j^{(s)} \left(\frac{\nu_l^{(s)} q_l}{\tau_s} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[D_{jm} \frac{\partial q_m}{\partial x_k} + B_j \frac{\partial T}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{K}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \\ &+ \frac{1}{T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sigma_{ik} \left(\sum_l L_{q_l} \right) \left(\frac{\nu_l^{(s)} q_l}{\tau_s} \right)^2 + \frac{\partial q_j}{\partial x_k} \left(D_{jm} \frac{\partial q_m}{\partial x_k} + B_j \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + K \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_k (\mathcal{E} + L) - u_i \sigma_{ik} - q_j \left(D_{jm} \frac{\partial q_m}{\partial x_k} + B_j \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - K \frac{\partial T}{\partial x_k} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Квадратичная форма от производных

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_k} D_{jm} \frac{\partial q_m}{\partial x_k} + \frac{\partial q_j}{\partial x_k} B_j \frac{\partial T}{\partial x_k} + K \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \geq 0$$

должна предполагаться неотрицательно-определенной, чтобы обеспечивать неубывание энтропии в адиабатически изолированных объемах.

2. Учет взаимодействия между составляющими среду веществами (фазами). Рассмотрение новых термодинамически согласованных моделей мы предварим формальным описанием несколько видоизмененной формы математической модели сверхтекучей жидкости (см. [9]). Эту форму предложил Е. И. Роменский для моделирования “пузырьковой” среды. Аналогичные уравнения использовались в [12–15] при моделировании геофизических процессов. Исходные уравнения не являются дивергентными:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} + L_{v_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - L_{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{v_i}}{\partial x_k} - L_{v_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + L_{v_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial q}{\partial x_i} &= 0, \\
\frac{\partial L_q}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_q}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В то же время если производящий потенциал

$$L = L(q, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, T)$$

является выпуклой функцией своих аргументов и если

$$L = \Lambda(q + u_i u_i / 2, v_i v_i, T),$$

то эти уравнения галилеево-инвариантны и могут быть переписаны в квазилинейном виде как симметрические, гиперболические по Фридрихсу. Поэтому если начальные данные для рассматриваемой системы достаточно гладкие, то у системы существует и единственно достаточно гладкое решение на некотором конечном интервале времени. На каждом решении траектории $dx_k/dt = u_k$ являются характеристиками и вдоль них выполнены соотношения

$$\frac{d\Omega}{dt} \equiv \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} = \Omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \Omega_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \tag{2.2}$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\partial L_{v_2}}{\partial x_3} - \frac{\partial L_{v_3}}{\partial x_2}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial L_{v_3}}{\partial x_1} - \frac{\partial L_{v_1}}{\partial x_3}, \quad \Omega_3 = \frac{\partial L_{v_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial L_{v_2}}{\partial x_1}.$$

Соотношения (2.2) — это обыкновенные линейные однородные дифференциальные уравнения, теорема единственности для которых утверждает, что если в начальный момент $\Omega_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$), то эти равенства сохраняются и в дальнейшем. Иными словами, уравнения (2.1) совместны с дополнительными уравнениями

$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial L_{v_j}}{\partial x_k} = 0. \tag{2.3}$$

На решениях, подчиненных (2.3), уравнения (2.1) эквивалентны законам сохранения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(u_k L)_{u_i} + v_k L_{v_i} - \delta_{ik} v_r L_{v_r}] &= 0, \\
\frac{\partial L_{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(u_k L)_{v_k} + q] &= 0, \quad \frac{\partial L_q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(u_k L)_q + v_k] &= 0, \\
\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_T &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k (\mathcal{E} + L - v_i L_{v_i}) + v_k (u_i L_{v_i} + q)] &= 0,
\end{aligned}$$

число которых на единицу превышает число неизвестных функций, равное числу исходных уравнений (2.1).

Так же как и в п. 1, через \mathcal{E} обозначено преобразование Лежандра производящего потенциала по всем его аргументам:

$$\mathcal{E} = qL_q + u_i L_{u_i} + v_i L_{v_i} + TL_T - L.$$

Все эти свойства системы (2.1) достаточно подробно описаны в работах [5, 9] и в приложении, завершающем монографию [3].

Наша цель — предложить некоторую многофазную модель, обобщающую систему (2.1). Вместо неизвестной функции q , так же как и в п. 1, предлагается использовать переменные $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots$, каждой из которых придается соответствующая векторная переменная с компонентами $v_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3$). С помощью производящего потенциала

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, u_1, u_2, u_3, T, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, \dots, v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, v_3^{(j)}, \dots, T) = \\ = \Lambda(q_1 + u_i u_i / 2, q_2 + u_i u_i / 2, \dots, q_j + u_i u_i / 2, v_i^{(1)} v_i^{(1)}, \dots, v_i^{(j)} v_i^{(j)}, \dots, v_i^{(j)} v_i^{(k)}, \dots, T) \quad (2.4)$$

строится система, составленная из многократно повторенных второй и третьей строк в (2.1), но со своими $q_j, v_i^{(j)}$ в каждой строке. Первая строка в (2.1) дополняется новыми слагаемыми $L_{v_i^{(j)}} \partial v_k^{(j)} / \partial x_k - L_{v_k^{(j)}} \partial v_i^{(j)} / \partial x_i$, а последняя остается без изменений:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} + \sum_j \left(L_{v_i^{(j)}} \frac{\partial v_k^{(j)}}{\partial x_k} - L_{v_k^{(j)}} \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \frac{\partial L_{v_i^{(j)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{v_i^{(j)}}}{\partial x_k} - \left(L_{v_i^{(j)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - L_{v_k^{(j)}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial L_{q_j}}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L)_{q_j} + v_k^{(j)}]}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} = 0.$$

Эта система будет теперь подвергнута еще одной модернизации. По аналогии с п. 1 моделируем реакции, отказавшись от нулевых правых частей в последних двух строках:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} + \sum_j \left(L_{v_i^{(j)}} \frac{\partial v_k^{(j)}}{\partial x_k} - L_{v_k^{(j)}} \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \frac{\partial L_{v_i^{(j)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{v_i^{(j)}}}{\partial x_k} - \left(L_{v_i^{(j)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - L_{v_k^{(j)}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial L_{q_j}}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L)_{q_j} + v_k^{(j)}]}{\partial x_k} = - \left(\sum_l L_{q_l} \right) \sum_s \nu_j^{(s)} \left(\frac{\nu_l^{(s)} q_l^{(s)}}{\tau_s} \right), \quad (2.5) \\ \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_T}{\partial x_k} = \left(\frac{1}{T} \sum_l L_{q_l} \right) \sum_s \frac{(\nu_l^{(s)} q_l^{(s)})^2}{\tau_s}.$$

Доказательство того, что в квазилинейной записи система (2.5) оказывается симметрической гиперболической и галилеево-инвариантной в предположении, что потенциал L имеет представление (2.4) и является выпуклой функцией своих аргументов, проводится практически теми же рассуждениями, что и для системы (2.1). Поэтому мы на этом не останавливаемся подробнее. Так же как и в п. 1, предполагается, что:

— стехиометрические коэффициенты $\nu_j^{(s)}$ каждой из реакций подчинены условию

$$\sum_j \nu_j^{(s)} = 0; \quad (2.6)$$

- потенциалы $L_{q_j} = \rho N_j$, т. е. равны массе j -го вещества в единице объема ($\sum_j N_j = 1$);
- плотность $\rho = \sum_j L_{q_j}$.

Тогда из (2.5), (2.6) следует, что закон сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_k \rho + \sum_j v_k^{(j)} \right) = 0.$$

Аналогично тому как обосновывается совместность (2.1) с (2.3), показывается, что (2.5) совместна с дополнительными уравнениями

$$\frac{\partial L_{v_2^{(j)}}}{\partial x_3} - \frac{\partial L_{v_3^{(j)}}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L_{v_3^{(j)}}}{\partial x_1} - \frac{\partial L_{v_1^{(j)}}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial L_{v_1^{(j)}}}{\partial x_2} - \frac{\partial L_{v_2^{(j)}}}{\partial x_1} = 0. \quad (2.7)$$

Из одновременного выполнения (2.5) и (2.7) вытекает справедливость законов сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(u_k L)_{u_i} + \sum_j (v_k^{(j)} L_{v_i^{(j)}} - \delta_{ik} v_r^{(j)} L_{v_r^{(j)}}) \right] &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ u_k (\mathcal{E} + L) + \sum_j [(u_i v_k^{(j)} - u_k v_i^{(j)}) L_{v_i^{(j)}} + q_j v_k^{(j)}] \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

моделирующих сохранение количества движения и энергии. Здесь

$$\mathcal{E} = q_j L_{q_j} + u_i L_{u_i} + v_i^{(j)} L_{v_i^{(j)}} + T L_T - L.$$

Кроме того, с помощью (2.7) вторая строка в (2.5) также преобразуется в закон сохранения:

$$\frac{\partial L_{v_i^{(j)}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(u_k L)_{v_k^{(j)}} + q_i^{(j)}] = 0. \quad (2.9)$$

Остановимся еще на включении в уравнения системы (2.5) диссипативных вязких членов.

В уравнениях первой строки в (2.5) и в законе сохранения количества движения нуль в правой части без каких-либо осложнений заменяется на $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k$, где

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \beta \delta_{ik} \frac{\partial u_r}{\partial x_r}$$

($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ — коэффициенты вязкости), т. е. закон сохранения количества движения становится таким:

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(u_k L)_{u_i} + \sum_j (v_k^{(j)} L_{v_i^{(j)}} - \delta_{ik} v_r^{(j)} L_{v_r^{(j)}}) - \sigma_{ik} \right] = 0.$$

Однако вносить изменения во вторую строку в (2.5) или в закон сохранения (2.9) нужно с осторожностью. Дело в том, что именно из анализа второй строки выводится совместность системы (2.5) и дополнительных уравнений (2.7). Именно эти дополнительные уравнения позволяют установить эквивалентность недивергентных равенств в (2.5) законам сохранения (2.8), (2.9). Нулевую правую часть во второй строке в (2.5) можно заменить только

на такой вектор с компонентами $f^{(j)}$, для которого $\varepsilon_{ikl} \partial f_l^{(j)} / \partial x_k = 0$. При этом доказательство совместности (2.5) с (2.7) не нарушится. В частности, допустимо положить

$$f_l^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x_l} \hat{\sigma}^{(j)}, \quad \hat{\sigma}^{(j)} = \gamma^{(j)} \frac{\partial v_k^{(j)}}{\partial x_k},$$

заменив (2.9) на

$$\frac{\partial L_{v_i^{(j)}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(u_k L)_{v_k^{(j)}} + q_j] = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\sigma}^{(j)}.$$

Включение диссипативных членов влечет также некоторое видоизменение энтропийного уравнения (последняя строка в (2.5)) и закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_T &= \frac{1}{T} \left[\left(\sum_l L_{q_l} \right) \sum_s \frac{(\nu_j^{(s)} q_j)^2}{\tau_s} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sigma_{ik} + \sum_j \hat{\sigma}^{(j)} \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial x_i} \right], \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ u_k (\mathcal{E} + L) - u_i \sigma_{ik} + \sum_j [(u_i v_k^{(j)} - u_k v_i^{(j)}) L_{v_i^{(j)}} + v_k^{(j)} (q_j - \hat{\sigma}^{(j)})] \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Учет диффузии, термодиффузии и теплопроводности производится аналогично тому, как описано в п. 1, и не требует дополнительных пояснений.

В некоторых случаях может оказаться полезным описывать тепловое состояние среды при помощи нескольких параметров, а не одной температуры, как, например, это делается в теории плазмы, где рассматриваются температуры ионов и электронов.

Если будет удобнее ввести две температуры T , θ и считать, что θ добавлено в число аргументов потенциала L , то, определив две энтропии L_T , L_θ , при составлении уравнений для них источники тепла, включаемые в правые части, нужно распределить по этим уравнениям, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L_T) &= \frac{1}{T} \left[\left(\sum_l L_{q_l} \right) \sum_s \frac{(\nu_j^{(s)} q_j)^2}{\tau_s} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sigma_{ik} \right] + \varkappa \frac{\theta - T}{T}, \\ \frac{\partial L_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L_\theta) &= \frac{1}{\theta} \left[\sum_j \frac{\partial v_i^{(j)}}{\partial x_i} \hat{\sigma}^{(j)} \right] + \varkappa \frac{T - \theta}{\theta}. \end{aligned}$$

Здесь в правые части мы включили еще дополнительные слагаемые $\varkappa(\theta - T)/T$ и $\varkappa(T - \theta)/\theta$, не нарушающие баланса энергии и способствующие выравниванию температур T и θ . Так как при $\varkappa \geq 0$

$$\frac{1}{T} \varkappa(\theta - T) + \frac{1}{\theta} \varkappa(T - \theta) = \varkappa \frac{(T - \theta)^2}{T\theta} \geq 0,$$

то суммарная энтропия $L_T + L_\theta$ будет возрастать:

$$\frac{\partial (L_T + L_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k (L_T + L_\theta)] \geq 0.$$

В некоторых случаях может оказаться необходимым связать перенос “дополнительной” энтропии L_θ не с компонентами u_i скорости, а с параметрами $v_i^{(j)}$ одного из введенных “внутренних” массовых потоков, считая, что $q_{j_0} = \theta$. Такая конструкция, например, позволяет описать возникновение в сверхтекучем гелии “второго звука” (см. [6, 12–15]). Соответствующие уравнения в этом случае выбираются такими:

$$\frac{\partial L_\theta}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L)_\theta + v_k^{(j_0)}]}{\partial x_k} = \frac{1}{\theta} \left[\gamma^{(j_0)} \left(\frac{\partial v_i^{(j_0)}}{\partial x_i} \right)^2 + \varkappa(T - \theta) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{v_i^{(j_0)}} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k L)_{v_i^{(j_0)}} - L_{v_i^{(j_0)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + L_{v_k^{(j_0)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma^{(j_0)} \frac{\partial v_k^{(j_0)}}{\partial x_k} \right).$$

При этом слагаемое $L_\theta \equiv L_{q_{j_0}}$, конечно, не следует включать в сумму, определяющую плотность ρ . На этом мы закончим описание одной из возможных термодинамически согласованных галилеево-инвариантных моделей механики многофазных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
2. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Науч. кн., 1998. (Универ. сер.; Т. 4).
3. Godunov S. K., Romensky E. I. Elements of continuum mechanics and conservation laws. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2003.
4. Годунов С. К., Гордиенко В. М. Простейшие галилеево-инвариантные и термодинамически согласованные законы сохранения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 3–16.
5. Годунов С. К., Гордиенко В. М. Усложненные структуры галилеево-инвариантных законов сохранения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 3–21.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
7. Teshukov V. M., Gavriilyuk S. L. Kinetic model for the motion of compressible bubbles in a perfect fluid // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 469–491.
8. Gavriilyuk S. L., Teshukov V. M. Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // Continuum Mech. Thermodyn. 2001. V. 13. P. 365–382.
9. Romensky E. I. Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics // Godunov methods: Theory and application / Ed. by E. F. Toro. N. Y. etc.: Kluwer Acad. / Plenum Publ., 2001. P. 745–761.
10. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977.
11. Рыдалевская М. А. Статистические и кинетические модели в физико-химической газодинамике. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003.
12. Доровский В. Н. Уравнения континуальной теории фильтрации. Новосибирск, 1987. (Препр. / Ин-т геол. и геофизики СО АН СССР; № 9).
13. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
14. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 3. С. 56–62.
15. Блохин А. М., Доровский В. Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: Объед. ин-т геологии, геофизики и минералогии СО РАН, 1994.

Поступила в редакцию 4/II 2004 г.