

УДК 519.622:544.344

## О НАГНЕТАНИИ ГИДРАТООБРАЗУЮЩЕГО ГАЗА В ПЛАСТ СНЕГА, НАСЫЩЕННЫЙ ТЕМ ЖЕ ГАЗОМ

В. Ш. Шагапов<sup>\*,\*\*</sup>, А. С. Чиглинцева<sup>\*\*</sup>, А. А. Русинов<sup>\*\*\*</sup>,  
М. К. Хасанов<sup>\*\*\*\*</sup>, И. Г. Хусаинов<sup>\*\*\*\*</sup>

\* Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского центра  
“Казанский научный центр РАН”, 420111 Казань, Россия

\*\* Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского  
центра РАН, 450054 Уфа, Россия

\*\*\* Бирский филиал Башкирского государственного университета, 452453 Бирск, Россия

\*\*\*\* Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
453103 Стерлитамак, Россия  
E-mails: Shagapov@rambler.ru, changelina@rambler.ru, irtysh2009@mail.ru,  
hasanovmk@mail.ru, kig10@mail.ru

Решена задача о нагнетании гидратообразующего газа (метана) в снежный массив, поры которого в исходном состоянии насыщены тем же газом. Построены автомодельные решения, описывающие поля температур и давлений, а также распределения насыщенностей снега, гидрата и газа в массиве. Показано, что в зависимости от исходного термобарического состояния системы снег — метан, а также интенсивности нагнетания газа в области фильтрации можно выделить три характерные зоны: ближнюю, в которой снег полностью перешел в состав гидрата и, следовательно, гидратный пласт насыщен газом; промежуточную, в которой газ, снег и гидрат находятся в состоянии фазового равновесия; дальнюю, заполненную газом и снегом. Показано, что с увеличением начального содержания снега в массиве и с уменьшением давления нагнетаемого газа уменьшается протяженность нагретой зоны. Также показано, что протяженность области образования гидрата увеличивается при увеличении проницаемости. При этом отмечается, что нагрев промежуточной области происходит более интенсивно.

Ключевые слова: нагнетание газа, фильтрация, снежный массив, автомодельное решение, образование гидрата, объемная область, линеаризация Лейбенсона.

DOI: 10.15372/PMTF20180305

**Введение.** Газогидраты, образованные молекулами воды и газа, используются не только для получения углеводородных источников энергии, но и для хранения и консервации различных газов. С целью уменьшения общей доли радиоактивных и парниковых газов и их безопасного хранения, а также утилизации попутного и нефтяного газов непосредственно на промыслах, например в естественных условиях в подземных залежах, можно создавать хранилища, в которых будет законсервирован газ больших объемов, чем в резервуарах с “чистым” газом [1–3], поскольку при одинаковых условиях в единице объема содержание газа в гидратном состоянии значительно больше, чем в свободном состоянии.

Например, если в газогидрате объемом  $1 \text{ м}^3$  содержится 100 кг метана, то при нормальных условиях данная масса газа будет занимать объем, равный  $150 \text{ м}^3$ . Также известен эффект самоконсервации газогидратов, который позволяет хранить газ при отрицательной температуре и небольших (порядка нескольких атмосфер) значениях давления [4].

Согласно экспериментальным данным [5] образование газогидратов возможно при значениях давления и температуры, при которых гидрат является устойчивым. В работе [6] описана механика глубоководных фазовых переходов при наблюдении за пузырьками метана в ходе натуральных экспериментов экспедиции РАН “Миры на Байкале 2008–2010”. Пузырьки всплывали со дна озера на глубинах 405, 860 и 1400 м и на глубине 1400 м покрывались гидратной оболочкой. В работе [7] предложена модель процесса миграции пузырьков метана в воде при термобарических условиях образования гидрата. Показано, что при фиксированном массовом расходе газа, поднимающегося со дна водоема, для всех параметров всплывающей газогидратной дисперсной системы устанавливается квазистационарный режим, представляющий собой волну типа “ступенька”. В зависимости от соотношения начальной плотности пузырька газа и средней плотности газа в составе гидрата (это соотношение определяется глубиной, с которой всплывают пузырьки) конечный радиус частиц гидрата может быть больше или меньше начальных радиусов пузырьков газа.

В природных условиях газогидраты могут образовываться как в донных отложениях морей и океанов, так и в подземных залежах в поровом пространстве пород при положительных и отрицательных температурах [8]. Данное явление исследовано в работах [9–13], в которых построены математические модели процесса образования газогидрата в пористом пласте, изначально насыщенном газом и льдом (или водой). В работе [9] установлено, что накопление газогидрата в поровом пространстве происходит не только во влажных пористых средах, но и в породах, частично насыщенных льдом. В [10] исследуется процесс инъекции холодного газа в насыщенную газом и льдом пористую среду, сопровождающийся образованием газогидрата. Для плоскосимметричной задачи с протяженной областью фазовых переходов построены автомодельные решения, описывающие распределение основных параметров в пласте. Показана возможность существования четырех типов решений, согласно которым при инъекции холодного газа возможно образование гидрата на фронтальной поверхности из газа и льда, в одной протяженной области из газа и льда, в двух протяженных областях (из газа и льда и из газа и воды), либо плавление льда на фронтальной поверхности и дальнейшее образование гидрата на другой фронтальной поверхности из газа и воды. В работе [11] решена задача об образовании газогидрата при нагнетании газа в пористый пласт, насыщенный газом и водой. Установлены критические условия нагнетания газа, когда образование гидрата происходит во фронтальном или объемном режиме. В работе [12], посвященной исследованию инъекции углекислого газа в пласт, содержащий метан и воду, предложена математическая модель процесса образования гидрата углекислого газа на фронте фазового перехода, разделяющем области метана и диоксида углерода. Показано, что образование гидрата углекислого газа может происходить при значениях давления и температуры, не принадлежащих кривой разложения. В работе [13], посвященной моделированию процесса образования газогидрата в частично насыщенной водой области пористого пласта конечной протяженности при продувке его холодным газом, показано, что в случае, когда температура нагнетаемого газа больше равновесной температуры гидратообразования, возникает висячий скачок, на котором происходит образование гидрата. Период существования промежуточной области (гидратной волны), в которой одновременно находятся газ, гидрат и вода, пренебрежимо мал по сравнению с периодом образования гидрата в пласте конечной длины. В работе [14] предложена математическая модель процесса замещения метана диоксидом углерода в га-

зогидрате при нагнетании жидкого диоксида углерода в пористую среду, насыщенную в исходном состоянии метаном и его гидратом. Построены автомодельные решения осесимметричной задачи, описывающие распределения основных параметров в пласте. Показано, что существуют решения, согласно которым процесс может происходить как без кипения диоксида углерода, так и при его кипении.

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [10], рассматривается модельная задача о нагнетании гидратообразующего газа (метана) в снежный массив, насыщенный тем же газом. При моделировании процесса образования гидрата в промежуточной области учитывалось влияние кондуктивной и конвективной составляющих в уравнении притока тепла. При этом для описания полей давления и гидратонасыщенности использовалась система нелинеаризованных дифференциальных уравнений, в то время как в работе [10] с использованием линеаризации Лейбензона получено приближенное аналитическое решение для определения данных полей. Результаты, полученные при решении подобного рода задач, описывают некоторый начальный этап процесса образования газогидрата в массивах конечной длины и используются для тестирования выбранных численных алгоритмов.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Пусть в полубесконечной области ( $x \geq 0$ ) находится снег, насыщенный газом (метаном) при давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ , соответствующих термодинамическим условиям их существования в свободном состоянии. Исходные снего- и газонасыщенность соответственно равны  $S_{i0}$  и  $S_{g0}$ . При этом полагается, что для исходного состояния системы снег — метан значение начальной температуры  $T_0$  находится ниже точки плавления льда ( $T_0 < T^{(0)}$ ,  $T^{(0)} = 0$  °C) и давление  $p_0$  меньше равновесного давления фазовых переходов  $p_s(T_0)$  в системе снег — метан — гидрат:

$$T = T_0, \quad p = p_0, \quad p_0 < p_s(T_0), \quad S_i = S_{i0}, \quad S_g = S_{g0}, \quad S_h = 0 \quad (t = 0, \quad 0 < x < \infty). \quad (1.1)$$

Рассмотрим модельную задачу об инъекции холодного газа ( $T_{ge} \leq 0$  °C) через границу  $x = 0$  при давлении  $p_e$ , причем температура закачиваемого газа меньше равновесной температуры фазовых переходов  $T_s(p_e)$  для системы снег — метан — гидрат:

$$T = T_e, \quad p = p_e \quad (T_e < T_s(p_e), \quad p_e > p_0, \quad t > 0, \quad x = 0).$$

Снег и гидрат в конденсированных фазах будем считать неподвижными, т. е. их скорости равны нулю.

В зависимости от исходного термобарического состояния системы снег — метан, а также интенсивности нагнетания газа, определяемой значением давления  $p_e$ , в области фильтрации ( $x > 0$ ) могут возникать три характерные зоны: ближняя, где находятся только газ и гидрат; промежуточная, в которой газ, снег и гидрат находятся в состоянии равновесия; дальняя, которая заполнена газом и снегом. В промежуточной зоне происходит образование гидрата. Соответственно вводятся две фронтальные границы: между дальней и промежуточной зонами, где начинается переход снега в состав гидрата, и между ближней и промежуточной зонами, на которой заканчивается процесс образования гидрата.

Согласно современным представлениям образование частиц гидрата сопровождается неравновесными процессами, обусловленными диффузией гидратообразующего газа к поверхности контакта снег — гидрат через пленки снега и гидрата. В настоящей работе полагается, что характерные времена релаксации диффузионной неравновесности малы по сравнению с характерными временами в рассматриваемой задаче (порядка нескольких суток). При больших временах, значительно превышающих характерное время диффузионной кинетики процесса, образование гидрата не зависит от скорости диффузионного массопереноса газа через слой гидрата. В данном случае процесс лимитируется скоростью отвода тепла, выделяющегося при образовании гидрата, т. е. скоростью теплопереноса в массиве, что учитывается при математическом моделировании рассматриваемого процесса.

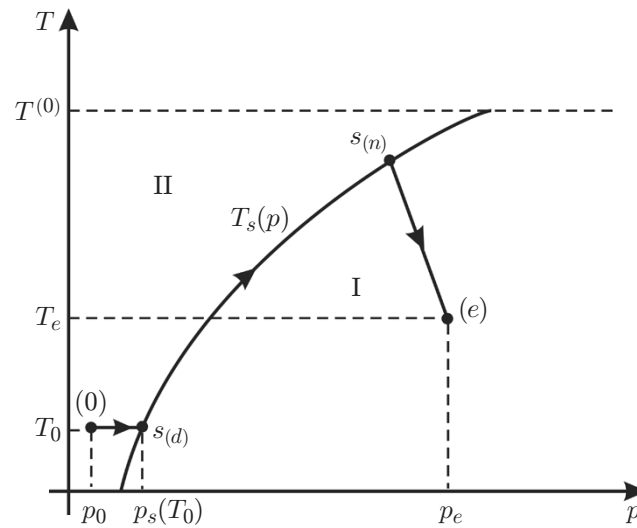


Рис. 1. Схема нагнетания газа в массив:  
I — область гидрат — газ, II — область снег — газ

На рис. 1 на фазовой плоскости давление — температура ( $p, T$ ) представлена схема нагнетания газа в массив, насыщенный снегом и газом. Точка  $(e)$  соответствует граничному условию при  $x = 0$ . Точки  $s(n), s(d)$  на линии фазового равновесия системы газ — снег — гидрат соответствуют значениям температуры и давления на ближней и дальней границах промежуточной области. Участок кривой фазового равновесия между точками  $s(n)$  и  $s(d)$  соответствует промежуточной области, участки между точками  $(e)$  и  $s(n), s(d)$  и  $(0)$  — ближней и дальней областям. Стрелками на рис. 1 показаны этапы образования зон в области фильтрации газа. В исходном состоянии, отмеченном на рис. 1 точкой  $(0)$ , массив насыщен газом и снегом. Затем вследствие инъекции газа при достижении некоторого значения давления в массиве  $p_s(T_0)$ , соответствующего условию образования гидрата при данной температуре  $T_0$ , происходит переход снега и газа в гидратное состояние. При этом образуется промежуточная зона и возникает фронтальная граница (значению параметров на ней соответствует точка  $s(d)$ ), на которой начинается процесс образования гидрата. Поскольку нагнетание газа происходит при значениях температуры и давления, находящихся в области ниже кривой фазового равновесия системы газ — снег — гидрат (точка  $(e)$ ), т. е. в области стабильности гидрата, образуется зона, насыщенная только газом и гидратом. Данную зону будем называть ближней, ее начало отмечено точкой  $s(n)$ . Соответственно возникает вторая фронтальная граница — между ближней и промежуточной зонами, на которой завершается процесс образования гидрата.

Снег и гидрат будем считать несжимаемыми, газ — калорически совершенным:

$$\rho_i = \text{const}, \quad \rho_h = \text{const}, \quad p = \rho_g R_g T. \quad (1.2)$$

Система основных уравнений, описывающая процессы фильтрации и теплопереноса, сопровождающиеся образованием газогидрата в массиве, и представляющая собой законы сохранения масс газа, снега, уравнение потока тепла и закон Дарси, в одномерном случае имеет вид [10, 15–17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial (S_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial (S_g \rho_g v_g)}{\partial x} &= -\rho_h G \frac{\partial S_h}{\partial t}, & \rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} &= -\rho_h (1 - G) \frac{\partial S_h}{\partial t}, \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g S_g c_g v_g \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho_h l_h \frac{\partial S_h}{\partial t}, & S_g v_g &= -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\rho c$  — удельная теплоемкость в единице объема;  $\lambda$  — теплопроводность системы снег — газ — гидрат:

$$\rho c = \rho_g S_g c_g + \rho_h S_h c_h + \rho_i S_i c_i, \quad \lambda = \lambda_g S_g + \lambda_h S_h + \lambda_i S_i,$$

$G$  — массовая концентрация газа в гидрате;  $\rho_j, S_j$  ( $j = h, i, g$ ) — истинные плотности и насыщенности  $j$ -й фазы; индексы  $h, i, g$  соответствуют гидрату, снегу и газу;  $v_g, k_g, c_g, \mu_g$  — скорость, проницаемость, удельная теплоемкость при постоянном объеме и динамическая вязкость газовой фазы соответственно;  $p$  — давление;  $T$  — температура;  $l_h$  — удельная теплота образования гидрата, отнесенная к единице его массы.

Фазовые насыщенности должны удовлетворять условию

$$S_g + S_i + S_h = 1. \quad (1.4)$$

Поскольку в настоящей работе принимается равновесная схема образования гидрата, в зоне, где одновременно находятся снег, газ и гидрат, должно выполняться условие фазового равновесия, т. е. температура и текущее значение давления связаны следующим образом [18, 19]:

$$T_s(p) = T_{(s0)} + T_* \ln(p/p_{(s0)}). \quad (1.5)$$

Здесь  $T_{(s0)}, T_*, p_{(s0)}$  — эмпирические параметры, зависящие от вида газогидрата и рассматриваемых диапазонов температур и давлений ( $T_{(s0)}$  — равновесная температура при  $p = p_{(s0)}$ ) [5].

Как отмечено выше, при нагнетании газа в снежный массив, сопровождающемся гидратообразованием, могут возникнуть три характерные зоны. На границах раздела этих зон, где насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла изменяются скачкообразно, выполняются соотношения, следующие из условий баланса массы и тепла [10, 17]:

$$\begin{aligned} [(S_h \rho_h (1 - G) + S_i \rho_i) \dot{x}_{(s)}] &= 0, & [\rho_g S_g (v_g - \dot{x}_{(s)}) - \rho_h S_h G \dot{x}_{(s)}] &= 0, \\ \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] &= [\rho_h l_h S_h \dot{x}_{(s)}]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $[\cdot]$  — скачок параметра на границе между зонами  $x = x_{(s)}$  ( $s = n, d$ );  $\dot{x}_{(s)}$  — скорость движения этой границы; индекс  $s = n$  соответствует границе между ближней и промежуточной областями,  $s = d$  — границе между промежуточной и дальней областями. Температуру и давление на этих границах будем полагать непрерывными.

**2. Решения в ближней и дальней областях.** Из первого уравнения системы (1.3) с учетом закона Дарси (четвертое уравнение системы (1.3)) и (1.2), пренебрегая фазовыми переходами и учитывая, что насыщенности газа и гидрата постоянны ( $S_g = \text{const}, S_h = \text{const}$ ), получаем уравнение пьезопроводности для ближней зоны ( $0 < x < x_{(n)}$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_g}{\mu_g S_{ge}} \frac{p}{T} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (2.1)$$

Второе уравнение системы (1.3) можно проинтегрировать с учетом начального условия для  $S_i$  ( $S_i = S_{i0}$ ) из (1.1). В результате получаем

$$S_h = \frac{\rho_i}{\rho_h (1 - G)} (S_{i0} - S_i), \quad S_g = 1 - S_{i0} + \left( 1 - \frac{\rho_i}{\rho_h (1 - G)} \right) (S_{i0} - S_i). \quad (2.2)$$

Отсюда в соответствии с принятым допущением  $S_i = 0$  для ближней области имеем

$$S_{h(e)} = \frac{\rho_i S_{i0}}{\rho_h (1 - G)}, \quad S_{g(e)} = 1 - S_{h(e)}. \quad (2.3)$$

Из третьего уравнения системы (1.3) с учетом закона Дарси и в пренебрежении фазовыми переходами получаем уравнение температуропроводности для ближней зоны

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_g c_g \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < x_{(n)}. \quad (2.4)$$

В дальней зоне ( $x_{(d)} < x < \infty$ ) происходит фильтрация калорически совершенного газа без образования гидрата, поэтому изменение температуры незначительно и процесс в этой зоне можно полагать изотермическим ( $T = T_0$ ). Тогда с учетом закона Дарси и уравнения состояния (1.2) при условиях  $\partial T / \partial x = 0$ ,  $\partial S_h / \partial t = 0$  и в предположении, что  $S_g = S_{g0}$ , из уравнения неразрывности для газа (первое уравнение системы (1.3)) получаем нелинейное уравнение фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_g}{\mu_g S_{g0}} \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (2.5)$$

**3. Уравнение пьезопроводности в промежуточной области.** Второе уравнение системы (1.3) с учетом (1.4) можно привести к виду

$$\frac{\partial S_g}{\partial t} = \left( \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} - 1 \right) \frac{\partial S_h}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в первое уравнение системы (1.3), используя закон Дарси и уравнение состояния газа (1.2), получаем уравнение, описывающее изменение гидратонасыщенности:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_g}{\mu_g} \frac{p}{R_g T_s(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{S_g}{R_g} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{T_s(p)} \right) \right), \quad (3.2)$$

где

$$\rho = \frac{p}{R_g T_s(p)} \left( \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} - 1 \right) + \rho_h G.$$

Используя (3.2) и условие фазового равновесия (1.5), из третьего уравнения системы (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_*}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_g k_g T_*}{R_g T_s(p) \mu_g} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \frac{\rho \lambda T_*}{p^2} \left( p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right) = \\ = \frac{\rho_h l_h}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{R_g T_s(p)} \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{S_g}{R_g} \frac{(T_s(p) - T_*)}{T_s^2(p)} \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соответствующее распределение температуры  $T$  связано с давлением  $p$  в промежуточной области условием фазового равновесия (1.5).

Интегрируя (3.1) и учитывая, что в момент времени  $t = 0$  гидрато- и газонасыщенность соответственно равны  $S_h = 0$ ,  $S_g = S_{g0}$ , получаем выражение для газонасыщенности в промежуточной зоне:

$$S_g = S_{g0} - \left( 1 - \frac{\rho_h(1-G)}{\rho_i} \right) S_h.$$

**4. Граничные условия между зонами.** Из условий сохранения на границах между зонами (1.6) с учетом закона Дарси и уравнения состояния (1.4) для ближней границы ( $x = x_{(n)}$ ) получаем

$$-\frac{k_g}{\mu_g} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{(n)}^- + \frac{k_g}{\mu_g} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{(n)}^+ = \left( (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) + \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \right) \dot{x}_{(n)}. \quad (4.1)$$

Условие баланса тепла (третье выражение в (1.6)) записывается в виде

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(n)}^- - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(n)}^+ = \rho_h l_h (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \dot{x}_{(n)}. \quad (4.2)$$

При этом насыщенности фаз связаны соотношениями

$$S_{h(n)}^- = S_{h(e)}, \quad S_{g(n)}^- = S_{g(e)}, \quad S_{g(n)}^+ = 1 - S_{i0} - (1 - \rho_h(1 - G)/\rho_i) S_{h(n)}^+,$$

где верхние индексы “-”, “+” соответствуют значениям параметров, претерпевающих разрыв, перед границей и за ней.

В предположении, что на дальней границе ( $x = x_{(d)}$ ) гидратонасыщенность не имеет разрыва ( $S_{h(d)}^- = S_{h(d)}^+ = 0$ ), из (1.6) при  $x = x_{(d)}$  получаем

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(d)}^- + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(d)}^+ = 0. \quad (4.3)$$

Как указывалось выше, в промежуточной области  $x_{(n)} < x < x_{(d)}$  температура и давление связаны условием фазового равновесия (1.5), поэтому производные температуры и давления на границах  $x = x_{(n)}$  и  $x = x_{(d)}$  соответственно должны быть связаны соотношениями

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(n)}^+ = \frac{T_*}{p_{(n)}} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(n)}^+, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(d)}^- = \frac{T_*}{p_{(d)}} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(d)}^-. \quad (4.4)$$

**5. Автомодельные решения.** Рассматриваемая задача имеет автомодельное решение. Введем автомодельную переменную [20]

$$\xi = x / (2\sqrt{\chi_0^{(p)} t}),$$

где  $\chi_0^{(p)} = k_g p_0 / (S_{g0} \mu_g)$  — коэффициент пьезопроводности.

Пренебрегая переменностью температуры в ближней зоне (так как в этой зоне для температуры по шкале Кельвина выполняется условие  $\Delta T/T \ll 1$ ) и применяя линеаризацию Лейбензона [10, 19] в уравнениях неразрывности (2.1), (2.5), в автомодельных переменных систему уравнений (2.1), (2.4), (2.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} -\xi \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} &= \frac{S_{g0}}{2(1 - S_{he})} \frac{d^2 p_{(1)}^2}{d\xi^2}, \\ -\xi \frac{dT_{(1)}}{d\xi} &= \frac{\text{Pe}_{(1)} \varphi_{(1)}}{4p_0} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} \frac{dT_{(1)}}{d\xi} + \frac{\varphi_{(1)}}{2} \frac{d^2 T_{(1)}}{d\xi^2}, \\ -\xi \frac{dp_{(3)}^2}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 p_{(3)}^2}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi_{(1)} = \chi^{(T)}/\chi_0^{(p)}$ ;  $\text{Pe}_{(1)} = \rho_{g0} c_g k_g p_0 / (\lambda_{(1)} \mu_g)$  — число Пекле;  $\chi^{(T)} = \lambda_{(1)} / (\rho c)$  — температуропроводность; нижние индексы 1, 2, 3 соответствуют ближней, промежуточной и дальней зонам.

Для распределений давления и температуры в ближней зоне имеем решение

$$p_{(1)}^2 = p_{(n)}^2 + (p_e^2 - p_{(n)}^2) \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\eta_{(1)}}\right) d\xi / \int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\eta_{(1)}}\right) d\xi, \quad (5.1)$$

$$T_{(1)} = T_{(n)} + (T_e - T_{(n)}) \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\varphi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi / \int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\varphi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi,$$

где  $\eta_{(1)} = S_{g0}/(1 - S_{h(e)})$ .

Для дальней зоны получаем

$$p_{(3)}^2 = p_0^2 + (p_{(d)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi / \int_{\xi_{(d)}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (5.2)$$

Для промежуточной зоны уравнения (3.2), (3.3) в автомодельных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} = \left[ -\xi A \frac{dp_{(2)}}{d\xi} - \left( B - \frac{\rho \lambda_{(2)} T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}^2} \right) \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 \right] / \left( C + \frac{\rho \lambda_{(2)} T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}} \right),$$

$$\frac{dS_{h(2)}}{d\xi} = -\frac{1}{\rho R_g T_s(p_{(2)})} \left[ \frac{k_g}{2\xi \mu_g \chi_0^{(p)}} \left( p_{(2)} \frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} + \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + S_g \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right) \right],$$

$$A = \frac{S_g (T_s(p_{(2)}) - T_*) \rho h l_h}{R_g T_s^2(p_{(2)})} + \frac{\rho(\rho c) T_*}{p_{(2)}},$$

$$B = \frac{k_g (T_s(p_{(2)}) - T_*) \rho h l_h}{2R_g \mu_g T_s^2(p_{(2)}) \chi_0^{(p)}} + \frac{\rho c k_g T_*}{2R_g \mu_g T_s(p_{(2)}) \chi_0^{(p)}}, \quad C = \frac{\rho h l_h p_{(2)} k_g}{2R_g \mu_g T_s(p_{(2)}) \chi_0^{(p)}}.$$

Условия (4.1), (4.2) для ближней границы ( $\xi = \xi_{(n)}$ ) в автомодельных координатах принимают вид

$$-\left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^- + \left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g \rho g_{(n)}} (\rho g_{(n)} (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) + \rho h G (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+)) \xi_{(n)}; \quad (5.3)$$

$$\left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^- - \tilde{\lambda} \left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = \frac{2\rho h l_h \chi_0^{(p)}}{\lambda_{(n)}^-} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \xi_{(n)}, \quad (5.4)$$

где  $\tilde{\lambda} = \lambda_{(n)}^+ / \lambda_{(n)}^-$ .

Первое соотношение из (4.4) в автомодельных координатах записывается следующим образом:

$$\left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^+ = \frac{T_*}{p_{(n)}} \left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^+. \quad (5.5)$$



Используя аналитические решения (5.1) и соотношение (5.5), условия (5.3), (5.4) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
q_{(n)} + \frac{p_e^2 - p_{(n)}^2}{2p_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) / \int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi = \\
= \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g} \xi_{(n)} \left( (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) + \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \right); \\
(T_{(n)} - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{\varphi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(n)}^2}{2p_0^2}\right) / \int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\varphi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(1)}^2}{2p_0^2}\right) d\xi - \tilde{\lambda} \frac{T_*}{p_{(n)}} q_{(n)} = \\
= \frac{2\rho_h l h \chi_0^{(p)}}{\lambda_{(n)}^-} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \xi_{(n)}, \quad (5.6)
\end{aligned}$$

где  $q_{(n)} = (dp_{(2)}/d\xi)_{\xi_{(n)}}$ .

Выражая из условия фазового равновесия (1.5) параметр  $T_{(n)}$  через  $p_{(n)}$  и подставляя его в условие (5.6), на границе  $\xi = \xi_{(n)}$  получаем следующие выражения, связывающие неизвестный параметр  $q_{(n)}$ , значение координаты границы  $\xi_{(n)}$  и значение давления  $p_{(n)}$ :

$$\begin{aligned}
\psi_1(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = q_{(n)} + \frac{p_e^2 - p_{(n)}^2}{2p_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4\eta_{(1)}}\right) / \int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta_{(1)}}\right) d\xi - \\
- \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g} \xi_{(n)} \left( (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) + \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \right); \quad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = (T_s(p_{(n)}) - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{\varphi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(n)}^2}{2p_0^2}\right) / \\
/ \int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\varphi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)} p_{(1)}^2}{2p_0^2}\right) d\xi - \tilde{\lambda} \frac{T_*}{p_{(n)}} q_{(n)} - \frac{2\rho_h l h \chi_0^{(p)} \xi_{(n)}}{\lambda_{(n)}^-} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+). \quad (5.8)
\end{aligned}$$

На границе  $\xi = \xi_{(d)}$  условие (4.3) записывается в виде

$$\left(\frac{dp}{d\xi}\right)_{(d)}^- = \left(\frac{dp}{d\xi}\right)_{(d)}^+.$$

**6. Решение в промежуточной области.** Для промежуточной области  $\xi_{(n)} \leq \xi \leq \xi_{(d)}$  уравнения, представляющие собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{(2)}}{d\xi} = q, \\
\frac{dq}{d\xi} = \left[ -\xi A \frac{dp_{(2)}}{d\xi} - \left( B - \frac{\rho \lambda_{(2)} T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}^2} \right) \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 \right] / \left( C + \frac{\rho \lambda_{(2)} T_*}{2\chi_0^{(p)} p_{(2)}} \right), \quad (6.1)
\end{aligned}$$

$$\frac{dS_{h(2)}}{d\xi} = \frac{-1}{\rho R_g T_s(p_{(2)})} \left[ \frac{k_g}{2\xi \mu_g \chi_0^{(p)}} \left( p_{(2)} \frac{dq}{d\xi} + \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q^2 \right) + S_g \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q \right].$$

Здесь неизвестными величинами являются значения функции  $q_{(n)} = (dp_{(2)}/d\xi)_{\xi_{(n)}}$ , координаты границ  $\xi_{(n)}$ ,  $\xi_{(d)}$ , а также значения давления на этих границах  $p_{(n)}$ ,  $p_{(d)}$ . Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.1) начинается от правой границы  $\xi = \xi_{(d)}$ , значение которой выбирается произвольным образом, в направлении левой границы  $\xi = \xi_{(n)}$  (с отрицательным шагом).

Начальные данные Коши (при  $\xi = \xi_{(d)}$ ) задаются следующим образом:

$$p_{(d)} = p_s(T_0), \quad q_{(d)} = \left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(d)}^-, \quad S_h = 0. \quad (6.2)$$

Учитывая равенство (6.2) и используя для третьей зоны решение (5.2), значение  $q_{(d)}$  определяем по формуле

$$q_{(d)} = -(p_s^2(T_0) - p_0^2) \exp(-\xi_{(d)}^2) / \left( 2p_s(T_0) \int_{\xi_{(d)}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \right).$$

Численное решение задачи находится с помощью метода стрельбы [10, 11]. В процессе счета вместо  $\xi_{(n)}$ ,  $p_{(n)}$ ,  $q_{(n)}$  в (5.7), (5.8) подставляются текущие значения  $\xi$ ,  $p$ ,  $q$ , полученные путем интегрирования системы (6.1). Каждый вариант расчета прекращался при достижении значения функции  $\psi_1$ , равного нулю ( $\psi_1(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = 0$ ). “Пристрелка” для переменной  $\xi_{(d)}$  продолжалась до выполнения с некоторой заданной точностью условия  $\psi_2(\xi_{(n)}, p_{(n)}, q_{(n)}) = 0$ .

**7. Результаты расчетов.** Для параметров, определяющих свойства системы, приняты следующие значения:  $T_{(s0)} = 263$  К,  $p_{(s0)} = 1,86$  МПа,  $T_* = 26$  К,  $\rho_i^0 = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_h^0 = 910$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_g = 1650$  Дж/(кг·К),  $c_i = 2090$  Дж/(кг·К),  $c_h = 2200$  Дж/(кг·К),  $\lambda_g = 0,03$  Вт/(м·К),  $\lambda_i = 2$  Вт/(м·К),  $\lambda_h = 0,5$  Вт/(м·К),  $l_h = 1,45 \cdot 10^5$  Дж/кг,  $G = 0,12$ ,  $\mu_g = 10^{-5}$  Па·с,  $k_g = 10^{-14}$  м<sup>2</sup>,  $R_g = 520$  Дж/(кг·К).

Исходные значения температуры, давления снежного массива, насыщенного газом, и нагнетаемого газа принимались соответственно равными  $T_0 = 225$  К,  $p_0 = 0,1$  МПа,  $T_e = 225$  К,  $p_e = 2,2$  МПа, начальная снегонасыщенность —  $S_{i0} = 0,5$ . Выбор такого значения давления нагнетаемого газа обусловлен следующим: если давление больше равновесного значения давления для температуры плавления льда ( $p_e > p_s(T^{(0)})$ ,  $T^{(0)} = 0$  °С), то температура на границе, разделяющей ближнюю и промежуточную зоны, может быть выше температуры плавления льда. Следовательно, в этом случае данная модель с двумя подвижными межфазными границами не позволяет построить физически непротиворечивые решения. Для устранения указанного противоречия необходимо рассматривать дополнительную зону, в которой одновременно существуют в состоянии равновесия газ, вода и гидрат.

Распределения температуры, давления и насыщенности гидрата и снега в массиве при различных значениях давления нагнетаемого газа  $p_e$  показаны на рис. 2. Видно, что в промежуточной зоне, где происходит образование гидрата, гидратонасыщенность непостоянна и монотонно меняется вдоль координаты  $\xi$ , на ближней границе ( $\xi = \xi_{(n)}$ ) снего полностью переходит в состав гидрата. При этом гидратонасыщенность изменяется скачкообразно и согласно формуле (2.3) принимает максимальное значение  $S_{h(e)} \approx 0,56$  в ближней зоне, которая представляет собой достаточно тонкий слой. Показано, что с увеличением давления нагнетаемого газа  $p_e$  с 2,2 до 2,4 МПа максимальная температура, реализуемая

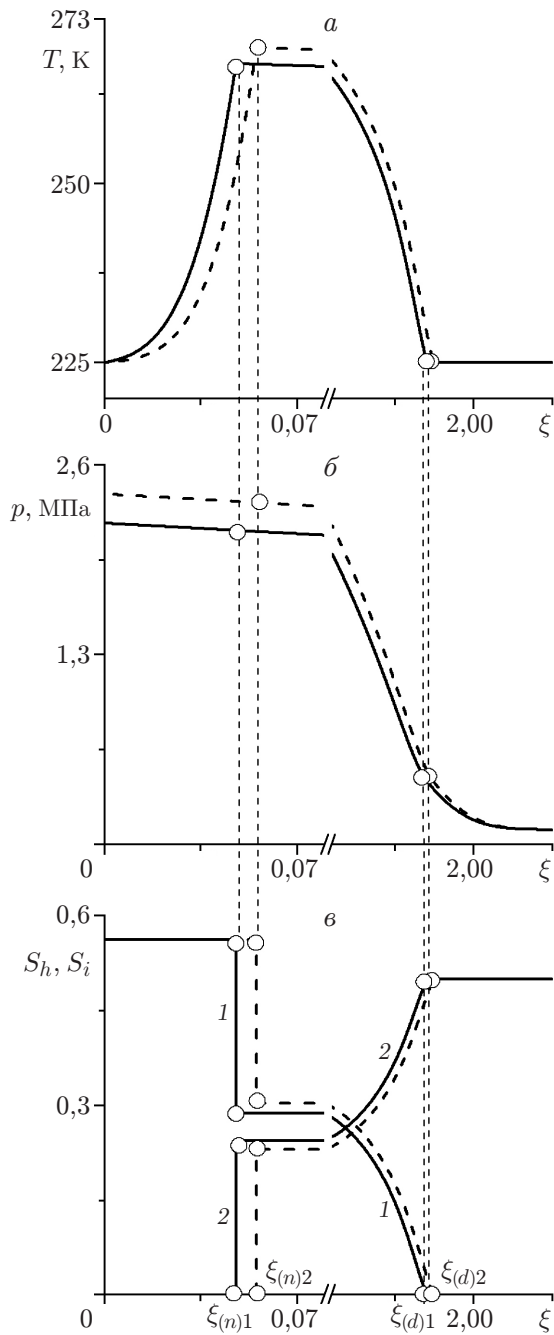


Рис. 2

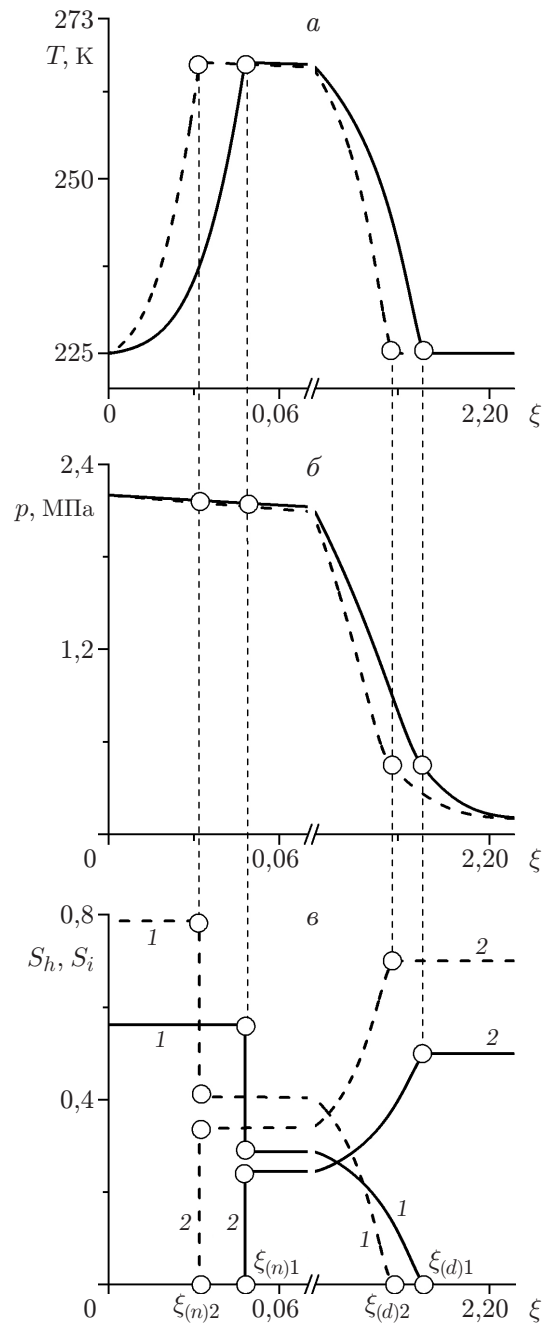


Рис. 3

Рис. 2. Распределения температуры (а), давления (б) и насыщенностей (в) в массиве при различных значениях давления нагнетания газа: штриховая линия —  $p_e = 2,4$  МПа, сплошная —  $p_e = 2,2$  МПа; 1 — гидрат, 2 — снег

Рис. 3. Распределения температуры (а), давления (б) и насыщенностей (в) в массиве при различных начальных значениях снегонасыщенности: сплошная линия —  $S_{i0} = 0,5$ , штриховая —  $S_{i0} = 0,7$ ; 1 — гидрат, 2 — снег

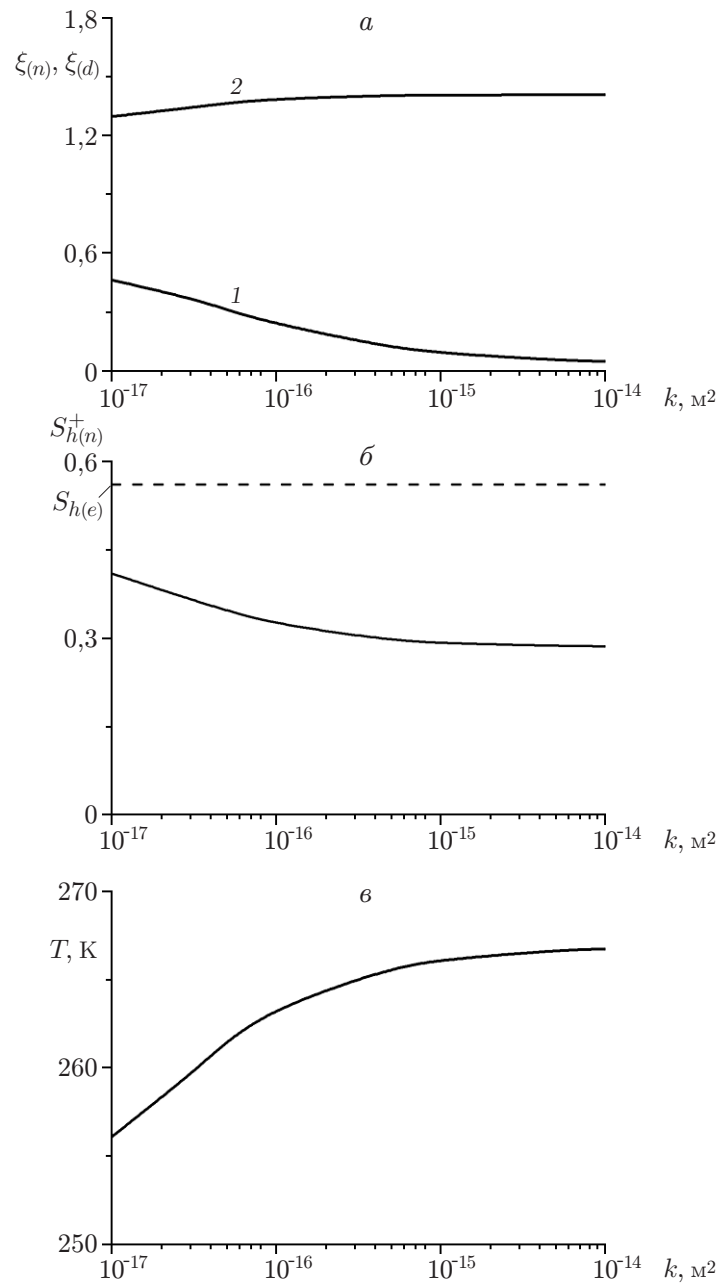


Рис. 4. Зависимости автомодельных координат границ (*a*), гидратонасыщенности на ближней границе (*б*) и максимальной температуры в массиве (*в*) от проницаемости массива:

1 — ближняя граница  $\xi = \xi(n)$ , 2 — дальняя граница  $\xi = \xi(d)$ ; штриховая линия — максимальное значение гидратонасыщенности  $S_{h(e)}$

в массиве, увеличивается. Это обусловлено повышением давления в массиве и как следствие ростом равновесной температуры гидратообразования, что приводит к увеличению протяженности объемной зоны образования гидрата и области, насыщенной газом и гидратом, поскольку при увеличении давления нагнетаемого холодного газа увеличивается интенсивность его подвода.

Распределения температуры, давления и насыщенностей гидрата и снега в массиве при различных значениях начальной снегонасыщенности  $S_{i0}$  приведены на рис. 3. Видно, что с увеличением исходной снегонасыщенности уменьшается протяженность нагретой зоны за счет гидратообразования. Это обусловлено тем, что с увеличением начальной снегонасыщенности в массиве при заданной интенсивности нагнетания газа увеличивается потребление газа, необходимое для образования гидрата, что в свою очередь приводит к более быстрому уменьшению давления в массиве.

На рис. 4 показано влияние проницаемости массива на значения автомоделльных координат ближней  $\xi = \xi_{(n)}$  (кривая 1) и дальней  $\xi = \xi_{(d)}$  (кривая 2) границ гидратонасыщенности на ближней границе  $S_{h(n)}^+$  и максимальной температуры. Видно, что по мере уменьшения проницаемости массива протяженность объемной зоны уменьшается, при этом гидратонасыщенность на границе, разделяющей ближнюю и промежуточную зоны, увеличивается. Уменьшение максимальной температуры в массиве при уменьшении проницаемости обусловлено уменьшением давления в пласте и соответствующей равновесной температуры гидратообразования.

**Заключение.** В работе предложена теоретическая модель сопровождаемого гидратообразованием процесса нагнетания газа в снежный пласт, насыщенный газом. Построены автомоделльные решения, описывающие распределения основных параметров в массиве. Показано, что при образовании гидрата возможны три характерные зоны: ближняя, насыщенная газом и гидратом, промежуточная, в которой газ, снег и гидрат находятся в состоянии фазового равновесия, и дальняя, заполненная газом и снегом. Установлено, что с увеличением давления нагнетания газа и проницаемости массива объемная зона образования гидрата увеличивается. Кроме того, показано, что с увеличением объемной доли снега в массиве уменьшается протяженность нагретой зоны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарев Э. А., Рожин И. И., Попов В. В., Аргунова К. К. Оценка возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты // Криосфера Земли. 2015. Т. 19, № 4. С. 64–74.
2. Rajnauth J., Barrufet M., Falcone G. Potential industry applications using gas hydrate technology // West Indian J. Engng. 2013. V. 35, N 2. P. 15–21.
3. Mori Y. H. On the scale-up of gas-hydrate-forming reactors: The case of gas-dispersion-type reactors // Energies. 2015. N 8. P. 1317–1335.
4. Мельников В. П., Поденко Л. С., Нестеров А. Н. и др. Эффект самоконсервации гидратов метана, полученных в “сухой воде” // Докл. АН. 2016. Т. 466, № 5. С. 554–558.
5. Истомин В. А. Газовые гидраты в природных условиях / В. А. Истомин, В. С. Якушев. М.: Недра, 1992.
6. Егоров А. В., Нигматулин Р. И., Рожков А. Н. Переход глубоководных метановых пузырей в твердые гидратные формы. М., 2013. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 1038).
7. Шагапов В. Ш., Чиглинцева А. С., Русинов А. А. О миграции пузырьков в условиях образования гидрата // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 2. С. 43–52.

8. **Чувилин Е. М., Козлова Е. В.** Исследования формирования мерзлых гидратосодержащих пород // Криосфера Земли. 2005. Т. 9, № 1. С. 73–80.
9. **Shagapov V. Sh., Khasanov M. K., Musakaev N. G., Ngoc Hai Duong.** Theoretical research of the gas hydrate deposits development using the injection of carbon dioxide // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 107. P. 347–357.
10. **Хасанов М. К.** Исследование режимов образования газогидратов в пористой среде, частично насыщенном льдом // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 2. С. 255–266.
11. **Нурисламов О. Р., Шагапов В. Ш.** Нагнетание газа во влажную пористую среду с образованием газогидрата // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 5. С. 809–823.
12. **Цыпкин Г. Г.** Образование гидрата углекислого газа при его инъекции в истощенное месторождение углеводородов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 6. С. 101–108.
13. **Шагапов В. Ш., Хасанов М. К., Гималтдинов И. К., Столповский М. В.** Численное моделирование образования газогидрата в пористом пласте конечной протяженности при продувке его газом // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 4. С. 116–126.
14. **Шагапов В. Ш., Хасанов М. К., Мусакаев Н. Г.** Инъекция жидкого диоксида углерода в частично насыщенный гидратом метана пласт // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 6. С. 139–149.
15. **Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Сыртланов В. Р.** Автомодельная задача о разложении газогидратов в пористой среде при депрессии и нагреве // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 111–118.
16. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред: В 2 ч. М.: Наука, 1987.
17. **Шагапов В. Ш.** Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа / В. Ш. Шагапов, Н. Г. Мусакаев. М.: Наука, 2016.
18. **Шагапов В. Ш., Чиглинцева А. С., Сыртланов В. Р.** О возможности вымывания газа из газогидратного массива посредством циркуляции теплой воды // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 100–111.
19. **Шагапов В. Ш., Юмагулова Ю. А., Мусакаев Н. Г.** Теоретическое исследование предельных режимов гидратообразования при контакте газа и воды // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 2. С. 3–15.
20. **Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Запихаева М. Н.** Моделирование процесса образования льда при инъекции воды в пористую среду, насыщенную льдом и газом // Вестн. Башкир. ун-та. 2013. Т. 18, № 1. С. 22–26.

*Поступила в редакцию 27/VI 2017 г.,  
в окончательном варианте — 4/IX 2017 г.*

---