УДК 519.8 + 519.7

К вопросу об оптимальной аппроксимации геофизических полей*

И.В. Бойков, В.А. Рязанцев

Пензенский государственный университет, ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026
E-mails: i.v.boykov@gmail.com (Бойков И.В.), ryazantsevv@mail.ru (Рязанцев В.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 14, 2021.

Бойков И.В., Рязанцев В.А. К вопросу об оптимальной аппроксимации геофизических полей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 1. — С. 17–34.

В работе рассматриваются оптимальные методы аппроксимации геофизических полей, в частности гравитационных и тепловых полей. Приведен обзор результатов, полученных по этой проблеме. Построен алгоритм аппроксимации многомерных тепловых полей, описываемых уравнением теплопроводности с постоянными коэффициентами. Для этого введены классы функций, в которые входят решения уравнений теплопроводности, и на неравномерной сетке узлов построены непрерывные сплайны, осуществляющие равномерную во всей области определения решения аппроксимацию функций из этих классов. Даны оценки сверху поперечников Колмогорова введенных классов функций. Для более широкого из введенных классов функций оценен снизу поперечник Колмогорова.

DOI: 10.15372/SJNM20210102

Ключевые слова: *тепловые поля, классы функций, параболические уравнения.*

Boikov I.V., Ryazantsev V.A. On the optimal approximation of geophysical fields // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 1. — P. 17–34.

In this paper, optimal methods of approximation of some geophysical fields involving gravitational and heat fields are considered. A review of results on this problem is presented. We have developed the algorithm of approximation of multidimensional heat fields which are described by heat equation with constant coefficients. In order to do that, we introduce classes of functions that include solutions of heat equations, and continuous splines uniformly approximating the functions from these classes in the whole domain of definition. We give the upper bounds for the Kolmogorov diameters of the introduced classes of functions. For a wider class of the introduced classes of functions, the Kolmogorov diameters is estimated from below.

Keywords: *heat fields, classes of functions, parabolic equations.*

1. Введение

Проблема построения эффективных методов аппроксимации различных классов функций является одной из основных в теории приближения. К.И. Бабенко подчеркивал [1, 2], что от решения этой проблемы во многом зависит создание эффективных численных алгоритмов решения задач математической физики. В связи с этим им была поставлена задача построения оптимальных алгоритмов аппроксимации классов функций и, в частности задача вычисления поперечников Бабенко и Колмогорова класса функций $Q_r(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \ldots$, $M = \text{const}$, $r = 1, 2, \ldots$, (определение приведено

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00594).

ниже) и построения оптимальных алгоритмов аппроксимации этого класса. Выбор этого класса обусловлен тем, что ему принадлежат решения эллиптических уравнений.

Напомним определения поперечников Колмогорова и Бабенко.

Пусть B — банахово пространство, $X \subset B$ — компакт.

Определение 1.1. Пусть L^n — множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение $d_n(X,B) = \inf_{L^n} \sup_{x\in X} \inf_{u\in L^n} \|x-u\|$, где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Пусть χ — множество всех n-мерных линейных подпространств пространства B, Map(X, χ) — совокупность всех непрерывных отображений вида $\Pi : X \to \bar{X}$, где $\bar{X} \in \chi$.

Определение 1.2. Пусть $\chi \in R^n$. Выражение

$$\delta_n(X)= \inf_{(\Pi:X\to R^n)} \sup_{x\in X} \operatorname{diam} \Pi^{-1}\Pi(\mathrm{x}),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi : X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

Поперечники Бабенко и Колмогорова классов функций $Q_r(\Omega,M)$, $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ и $B_{r,\gamma}(\Omega,M)$ (последние два класса являются обобщением класса $Q_r(\Omega,M)$ и введены в работе [4]) были вычислены И.В. Бойковым [3–5]. Там же были построены сплайны, являющиеся оптимальными по порядку алгоритмами аппроксимации перечисленных выше классов функций.

Напомним определения классов функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega,M)$.

Замечание 1.1. В данной работе используется следующее обозначение: $D^k f = \partial^{|k|} f/\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_l^{k_l}$, где $k = (k_1,\ldots,k_l)$, $|k| = k_1 + \cdots + k_l$, $0 \le k_i \le |k|$, $i = 1,2,\ldots,l$, $f = f(t,x_1,\ldots,x_l)$.

Определение 1.3. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\ldots$. Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия:

$$\max_{x\in\Omega} |D^v\varphi(x)| \le M \text{ при } 0 \le |v| \le r,$$
$$|D^v\varphi(x)| \le M/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta} \text{ при } r < |v| \le s,$$

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$ при γ нецелом, $s = r + \gamma$, $\zeta = 0$ при γ целом. Здесь $x = (x_1,\ldots,x_l)$, $v = (v_1,\ldots,v_l)$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$, $d(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $d(x,\Gamma) = \min_{1\le i\le l} \min(|-1-x_i|,|1-x_i|)$.

Определение 1.4. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\ldots$, $r = 1,2,\ldots$, $0 < \gamma \le 1$. Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия:

$$\max_{x\in\Omega} |D^v\varphi(x_1,\ldots,x_l)| \le M^{|v|}|v|^{|v|} \text{ при } 0 \le |v| \le r,$$
$$|D^v\varphi(x_1,\ldots,x_l)| \le M^{|v|}|v|^{|v|}/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma} \text{ при } r < |v| \le \infty.$$

Решения многих задач математической физики принадлежат классам функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и близким к ним. В частности, этим классам принадлежат решения эллиптических уравнений [1], слабосингулярных [6], сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений [7]. Многие физические поля описываются этими классами функций. Например, в задачах гравиразведки различные потенциальные поля описываются классами функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ [8].

Обобщением классов функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ являются классы функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B^u_{r,\gamma}(\Omega, M), u = 0, 1, \dots,$ определение которых дано в работе [9]. Там же были получены оценки снизу и сверху поперечников Колмогорова и Бабенко для класса функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Классы функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $B^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ входят в весовые пространства Соболева. Задача об оценке поперечников единичных шаров весовых пространств Соболева активно изучается, начиная с середины прошлого столетия. Оценка сверху поперечников Колмогорова на кубе в весовом пространстве $L_{q,\rho}$ была впервые получена М.Ш. Бирманом и М.З. Соломяком [10]. А.Э. Колли [11] нашел порядковые оценки величин $d_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$, где Ω — ограниченная область с гладкой границей, $p = q$, а веса g и v равны степени расстояния до границы Ω. Х. Трибель [12] получил верхние оценки поперечников $d_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega))$ при $p \le q$. А.А. Васильевой [13] получены оценки поперечников Колмогорова в пространстве функций $W^r_{q,g}(\Omega)$, $\Omega = [-1, 1]^d$, с гладкой весовой функцией g. В работах [14, 15] получены оценки поперечников Колмогорова на классах функций с сингулярностями в отдельных точках и на части границы. Построены оптимальные по точности (по порядку) методы аппроксимации функций из этих классов. Работы А.А. Васильевой [16, 17] посвящены оценкам поперечников Колмогорова в областях с пиком.

В связи с многочисленными применениями параболических уравнений в физике и технике представляет интерес выделение классов функций, которыми описываются решения этих уравнений, и разработка оптимальных методов их аппроксимации.

В данной работе вводятся классы функций $P_r(G, M)$ и $P_{r,s}(G, M)$, к которым принадлежат решения параболических уравнений со многими пространственными переменными. Вычислены поперечники Колмогорова $d_n(P_{r,s}(G, M), C)$ (оценки сверху и снизу), $d_n(P_r(G, M), C)$ (оценки сверху) и построены сплайны, осуществляющие эффективную аппроксимацию функций, принадлежащих указанным классам.

2. Класс функций

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$Ku \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \tag{2.1}$$

Известно [18], что если $u_0(x)$ — непрерывная ограниченная функция, то интегралом Пуассона

$$u(t, x) = \frac{1}{2^l(\pi t)^{l/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi)\, d\xi_1 \, \dots \, d\xi_l \tag{2.2}$$

определяется функция, удовлетворяющая при $t > 0$ уравнению (2.1) и стремящаяся к $u_0(x_0)$, когда $(t, x) \to (0, x_0)$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_l)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$, $|x - \xi| = ((x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_l - \xi_l)^2)^{1/2}$.

Пусть $u_0(x)$ — финитная функция, имеющая ограниченные частные производные до r-го порядка: $|D^k u_0(x)| \le M$, $|k| = 0, 1, \ldots, r$.

Замечание 2.1. Дальнейшие рассуждения также справедливы, если функция $u_0(x)$, $x \in (-\infty, \infty)^l$, удовлетворяет следующим условиям:

$$|D^k u_0(x)| \le M, \quad \lim_{x\to\pm\infty} D^k u_0(x) = 0, \quad |k| = 0, 1, \ldots, r.$$

Оценим производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Очевидно, при $t > 0$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} = \frac{1}{2^l (\pi t)^{l/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial \xi_i} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi, \qquad \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right| \le CM.$$

Здесь и ниже через C обозначены константы, не зависящие от t и x.

Продолжая этот процесс, имеем

$$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x_i^k} = \frac{1}{2^l (\pi t)^{l/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k u_0(\xi)}{\partial \xi_i^k} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Следовательно, $|D^k u(t,x)| \le CM$, $|k| = 0, 1, \ldots, r$. Продолжая процесс вычисления производных, имеем при $t > 0$

$$\left|\frac{\partial^{r+1} u(t,x)}{\partial x_i^{r+1}}\right| \le \frac{1}{2^l \pi^{l/2} t^{l/2}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_i - \xi_i}{2t} \frac{\partial^r u_0(\xi)}{\partial \xi_i^r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi \right| \le \frac{CM}{t^{1/2}};$$

$$\left|\frac{\partial^{r+2} u(t,x)}{\partial x_i^{r+2}}\right| = \frac{1}{2^l \pi^{l/2} t^{l/2}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2t} \frac{\partial^r u_0(\xi)}{\partial \xi_i^r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi + \right.$$
$$\left. \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x_i - \xi_i\right)^2}{(2t)^2} \frac{\partial^r u_0(\xi)}{\partial \xi_i^r}\, e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi \right| \le \frac{CM}{t}.$$

При вычислении последовательных производных нужно отдельно рассматривать случаи четных и нечетных k. Так как оба случая рассматриваются одинаково, то остановимся на случае четных значений k.

Пусть $k = 2m$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{r+2m} u(t,x)}{\partial x_i^{r+2m}} &= \frac{1}{2^l \pi^{l/2} t^{l/2}} \frac{m!}{(2t)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^r u_0(\xi)}{\partial \xi_i^2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{2^l \pi^{l/2} t^{l/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|x_i - \xi_i|}{2t}\right)^{2m} \frac{\partial^2 u_0(\xi)}{\partial \xi_i^2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2t}}\, d\xi \\ &= I_1 + \cdots + I_{2^{2m}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отметим, что в выражении (2.3) некоторые слагаемые могут быть равны нулю. Так как точное число отличных от нуля слагаемых достаточно сложно вычислить и оно не влияет на последующие рассуждения, то здесь ограничимся рассмотрением выражения (2.3) с 2^{2m} слагаемыми.

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Очевидно,

$$|I_1| \le \frac{CM}{2^l \pi^{l/2}\, t^{l/2}} \frac{m!}{(2t)^m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4t}}\, dz \le \frac{CMm!}{t^m}, \tag{2.4}$$

$$|I_{2^{2m}}| \le \frac{CM}{2^l \pi^{l/2} t^{l/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z_i^{2m}}{(2t)^{2m}} e^{-\frac{z^2}{4t}}\, dz \le \frac{CM(2m-1)!!}{t^m}. \tag{2.5}$$

Выражение (2.3) содержит 2^{2m} слагаемых вида

$$I_j = \frac{1}{2^l (\pi t)^{l/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_j\big(x_i - \xi_i, t\big) \frac{\partial^r u_0(\xi)}{\partial \xi_i^r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi,$$

в которых ядра $h_j\big(x_i - \xi_i, t\big)$ имеют одинаковую структуру, но различные параметры.

Оценим слагаемое I_j следующего вида:

$$\begin{aligned} |I_j| &= \frac{1}{2^l\, \pi^{l/2}\, t^{l/2}} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\big(x_i - \xi_i\big)^{2m-2j}}{(2t)^{2m-j}} \frac{(2m-j)!}{(2m-2j)!} \frac{\partial^r u_0(\xi)}{\partial \xi_i^r} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi \right| \\ &\le \frac{CM}{t^m} \frac{(2m-j)!}{(2m-2j)!} (2m-2j-1)!! \\ &\le \frac{CM}{t^m} (2m-1)!!. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из неравенств (2.3)–(2.6) следует, что при четном $k = 2m$

$$\left|\partial^{r+k} u(t,x)/\partial x_i^{r+k}\right| \le CM 2^k t^{-k/2} (k-1)!!. \tag{2.7}$$

При нечетном $k = 2m+1$, имеем

$$\left|\partial^{r+k} u(t,x)/\partial x_i^{r+k}\right| \le CM 2^k t^{-k/2} (k+1)!!. \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) следует оценка

$$\left|\partial^{r+k} u(t,x)/\partial x_i^{r+k}\right| \le CM 2^k (k+1)!!/t^{k/2}.$$

Производные $\delta^m u(t,x)/\delta x_1^{m_1} \cdots \delta x_l^{m_l}$, $0 \le m_i \le m$, $m = m_1 + \cdots + m_l$, оцениваются так же, как $\delta^m u(t,x)/\delta x_j^m$, $j = 1, \dots, l$, и приводят к таким же оценкам.

Следовательно,

$$\left|D^{r+k} u(t,x)\right| \le CM 2^{|k|} (|k|+1)!! t^{-|k|/2}, \quad |k| = 1, 2, \dots .$$

Исследуем гладкость функции $u(t,x)$ по переменной t. Следуя [19, с. 455], сделаем замену переменных $z_i = (\xi_i - x_i)/\sqrt{4t}$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Тогда формула (2.2) при $t \ge 0$ принимает вид

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi^{l/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z_1^2 - \dots - z_l^2} u_0(x_1 + \sqrt{4t} z_1, \dots, x_l + \sqrt{4t} z_l)\, dz.$$

Из этого выражения следует, что функция $u(t,x)$ по переменной t удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/2$.

Функция $u(t,x)$ при $t > 0$ имеет счетное множество производных по переменной t. Оценим порядок их роста, используя формулу (2.2).

Оценим производную по t:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\frac{l}{2^{l+1}\pi^{l/2}t^{(l+2)/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi \, + \\
\frac{1}{2^l(\pi t)^{l/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\frac{|x-\xi|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi \\
= J_1 + J_2.
\end{aligned}
$$

Очевидно,

$$
|J_1| \le \frac{Ml}{2t}\frac{1}{2^l(\pi t)^{l/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi \le \frac{CM}{t},
$$

$$
|J_2| \le \frac{M}{2^l(\pi t)^{l/2}} \int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\xi^2}{4t^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi \le \frac{CM}{t}.
$$

Следовательно, $|\partial u(t,x)/\partial t| \le \dfrac{CM}{t}$. Продолжая этот процесс, имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = (-1)^l \frac{l(l+2)\dots(l+2k)}{2^{l+k}\pi^{l/2}}\frac{1}{t^{(l+2k)/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4t}}\, d\xi + \dots + \\
\frac{1}{2^l(\pi t)^{l/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\frac{|x-\xi|^{2k}}{4^k t^{2k}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} d\xi \\
= J_1(u_0) + \dots + J_{2^k}(u_0).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Оценим $|J_1(u_0)|$ и $|J_{2^k}(u_0)|$.
Очевидно,

$$
|J_1(u_0)| = Ml(l+2)\dots(l+2k)/2^k t^k;
$$

$$
|J_{2^k}(u_0)| \le \frac{M}{2^l(\pi t)^{l/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\xi_1^2+\dots+\xi_l^2\right)^k}{4^k t^{2k}} e^{-\frac{\xi^2+\dots+\xi_l^2}{4t}}\, d\xi_1 \,\dots\, d\xi_l.
$$

Переходя к сферической системе координат, имеем

$$
|J_{2^k}(u_0)| \le \frac{M\pi^{l/2}}{2^l t^{l/2}}\frac{(2k+l-2)!!}{\pi(l-2)!!} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\rho^{l-1}}{2^k t^k} e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\, d\rho.
$$

Исследуя последнее неравенство при различных сочетаниях l и k ($l = 2m+1$, $k \le m$ и $k > m$; $l = 2m$, $k \le m$ и $k > m$), приходим к неравенству

$$
\left|J_{2^k}(u_0)\right| \le CM(2k+l-2)!!/2^{m+k}t^k. \tag{2.10}
$$

Наряду со слагаемыми вида J_1 и J_2, выражение (2.9) содержит также слагаемые вида

$$J_j = \frac{1}{2^l \pi^{l/2} t^{(2i_1+l)/2}} \frac{l(l+2)\dots(l+2i_1)}{2^{i_1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \frac{|x-\xi|^{2i_2}}{4^{i_2} t^{2i_2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \, d\xi.$$

а также слагаемые, имеющие аналогичную структуру. Здесь $i_1 + i_2 = k$. Оценим выражение $\left|J_j\right|$. Очевидно,

$$\left|J_j\right| \le CM(l+2k-2)!!/(2^k t^k). \tag{2.11}$$

Остальные слагаемые, входящие в (2.9), оцениваются аналогично.

Из неравенств (2.9)–(2.11) следует, что

$$\left|\partial^k u(t,x)/\partial t^k\right| \le CM(l+2k-2)!!/t^k, \quad 0 < t \le 1.$$

Полученные выше неравенства дают основание для введения следующего класса функций.

Замечание 2.2. Рассматривается область $G = \{0 \le t \le 1, x \in \Omega)$, $\Omega = [-1,1]^l$, так как в дальнейшем предполагается исследовать аппроксимацию тепловых полей в пограничной области.

Определение 2.1. Пусть $r = 1, 2, \dots$; $G = \{0 \le t \le 1, x \in \Omega\}$, где $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. Через $P_r(G, M)$ обозначим множество функций $f(t,x)$, $x = (x_1, \dots, x_l)$, определенных и непрерывных в области G и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $f(t,x)$ $(0 \le t \le 1, x \in \Omega)$ по переменной t удовлетворяют условию Гельдера с показателем $1/2$;
2) при любом фиксированном x $(x \in \Omega)$ и при $t > 0$

$$\left|\partial^k u(t,x)/\partial t^k\right| \le CM(l+2k)!!/t^k, \quad 0 < t \le 1, \quad k = 0, 1, \dots;$$

3) при любом фиксированном t $(t > 0)$

$$\left|D^k u(t,x)\right| \le M, \quad |k| = 0, 1, \dots, r;$$
$$\left|D^k u(t,x)\right| \le CM2^{|k|-r}(|k|+1)!!/t^{(|k|-r)/2}, \quad |k| = r+1, \dots.$$

Класс функций $P_r(G, M)$ является подклассом следующего класса.

Определение 2.2. Пусть $r = 1, 2, \dots$, $s = r, r+1, \dots$. Пусть $G = \{0 \le t \le 1, x \in \Omega\}$, где $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. Через $P_{r,s}(G, M)$ обозначим множество функций $f(t,x)$, $x = (x_1, \dots, x_l)$, определенных и непрерывных в области G и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $f(t,x)$ $(0 \le t \le 1, x \in \Omega)$ по переменной t удовлетворяют условию Гельдера с показателем $1/2$;
2) при любом фиксированном x $(x \in \Omega)$ и при $t > 0$

$$\left|\partial^k u(t,x)/\partial t^k\right| \le CM(l+2k)!!/t^k, \quad 0 < t \le 1, \quad k = 0, 1, \dots, s;$$

3) при любом фиксированном t $(t > 0)$

$$\big|D^k u(t,x)\big| \le M, \quad |k| = 0,1,\dots,r;$$
$$\big|D^k u(t,x)\big| \le CM2^{|k|-r}(|k|+1)!!/t^{(|k|-r)/2}, \quad |k| = r+1,\dots,s.$$

Результаты этого пункта можно подытожить следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть финитная функция $u_0(x_1,\dots,x_l)$ имеет непрерывные ограниченные частные производные до r-го порядка. Тогда функция $u(t,x_1,\dots,x_l)$, выражаемая интегралом Пуассона (2.2), принадлежит классу функций $P_r(G,M)$.*

3. Аппроксимация функций класса $P_r(G,M)$

В этом пункте исследуется точность аппроксимации функций $f(x)$ из класса $P_r(G,M)$, где $G=[0,1]\times\Omega$, $t\in[0,1]$, $x=(x_1,\dots,x_l)\in\Omega$, $\Omega=[-1,1]^l$, $l=2,3,\dots$.

Построен кусочно-непрерывный локальный сплайн $f_n(t,x)$, имеющий точность

$$\|f-f_n\|_{C[G]} \le C(\ln\ln m)(\ln m)^{2r/(l^*-1)}m^{-r/(l^*-1)},$$

где m — общее число узлов сплайна f_n, $l^*=l+1$ — число независимых переменных.

Построен непрерывный сплайн $f_n^*(t,x)$, имеющий точность

$$\|f-f_n^*\|_{C[G]} \le C\frac{(\ln n_*)^{l^*r/(l^*-1)}}{n_*^{r/(l^*-1)}}\ln\ln n_*,$$

где n_*— общее число узлов сплайна f_n^*.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Справедливо неравенство*

$$d_{n_*}(P_r(G,M),C) \le C\frac{(\ln n_*)^{l^*r/(l^*-1)}}{n_*^{r/(l^*-1)}}\ln\ln n_*.$$

Исследуем аппроксимацию функций из класса $P_r(G,M)$, где $G=[0,1]\times\Omega$, $t\in[0,1]$, $x=(x_1,\dots,x_l)\in\Omega$, $\Omega=[-1,1]^l$, $l=2,3,\dots$.

Покроем область G более мелкими областями $G_k=[t_k,t_{k+1}]\times\Omega$, где $t_0=0$, $t_k=(2^k/2^n)$, $k=1,2,\dots,n$. Пусть $h_k=t_{k+1}-t_k$, $k=0,1,\dots,n-1$.

Область G_0 покроем более мелкими областями G_0^j, $j=0,1,\dots,n_0-1$, положив $n_0=n(r-1)+1$, $G_0^0=\big[0,t_0^1\big]\times\Omega$, $G_0^k=\big[t_0^k,t_0^{k+1}\big]\times\Omega$, $k=1,2,\dots,n_0-1$; $t_0^0=0$, $t_0^k=2^k/2^{nr}$, $k=1,2,\dots,n_0$.

Пусть $h_0^0=2/2^{nr}$, $h_0^j=(2^{j+1}-2^j)/2^{nr}$, $j=1,2,\dots,n_0-1$.

Каждую область G_0^j, $j=0,1,\dots,n_0-1$, покроем параллелепипедами $G^j_{0,i_1,\dots,i_l}=\big[t_0^j,t_0^{j+1}\big]\times\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$, где $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$ — параллелепипеды, расположенные в области Ω, с ребрами, параллельными координатным осям и с длинами ребер $H_0=2^{-n/2}$. Каждую область G_k покроем параллелепипедами $G_{k,i_1,\dots,i_l}=[t_k,t_{k+1}]\times\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, где $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ — параллелепипеды, расположенные в области Ω, с ребрами, параллельными координатным осям и с длинами ребер не меньшими чем H_k и не большими чем $2H_k$, $H_k=\big(kr/(e2^{n-k-1})\big)^{1/2}$, $k=1,2,\dots,n-1$.

Построим сплайн f_n, приближающий функцию $f\in P_r(G,M)$, $r\ge1$.

Предварительно приведем следующие обозначения.

Обозначим через $L_s(f,[-1,1])$ полином, интерполирующий функцию f на сегменте $[-1,1]$ по s узлам, являющимся корнями полинома Чебышева первого рода.

Ниже понадобится следующая оценка [20]:

$$\|f(x)-L_s(f,[-1,1])\|_{C[-1,1]} \le \|f^{(s)}\|_{C[-1,1]}/(2^{s-1}s!).$$

Обозначим через $L_s(f,[a,b])$ интерполяционный полином, построенный по s узлам, являющимся образами корней полинома Чебышева первого рода, полученными отображением сегмента $[-1,1]$ на сегмент $[a,b]$. Очевидно, для $f\in C[a,b]\|f(x)-L_s(f,[a,b])\|_{C[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^s \frac{1}{2^{s-1}s!}\|f^{(s)}\|_{C[a,b]}$.

Обозначим через $\zeta_1,\dots,\zeta_s$ узлы полинома Чебышева первого рода, определенного на сегменте $[-1,1]$. Через $\zeta_1',\dots,\zeta_s'$ обозначим образы узлов $\zeta_1,\dots,\zeta_s$, полученные при отображении сегмента $[\zeta_1,\zeta_s]$ на сегмент $[a,b]$. Через $P_s(f,[a,b])$ обозначим интерполяционный полином, построенный по узлам $\zeta_1',\dots,\zeta_s'$. Погрешность аппроксимации функции f на сегменте $[a,b]$ при этом оценивается неравенством

$$\|f(x)-P_s(f,[a,b])\|_{C[a,b]} \le (b_1-a_1)^s\,\|f^{(s)}\|_{C[a,b]}/(2^s2^{s-1}s!),$$

где a_1 и b_1 — образы точек -1 и 1 при описанном выше преобразовании.

Учитывая структуру узлов полиномов Чебышева, имеем

$$\|f(x)-P_s(f,[a,b])\|_{C[a,b]} \le (b-a)^s\left(\cos\frac{\pi}{2s}\right)^{-s}\|f^{(s)}\|_{C[a,b]}/(2^s2^{s-1}s!).$$

Замечание 3.1. Так как $\lim_{s\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2s}\right)^{-s}=1$, то

$$\|f(x)-P_s(f,[a,b])\|_{C[a,b]} \le (1+o(1))\,(b-a)^s\,\|f^{(s)}\|_{C[a,b]}/(2^s2^{s-1}s!).$$

Пусть $f\in\Delta=[a_1,b_1;\dots;a_l,b_l]$. Функцию f будем аппроксимировать интерполяционным полиномом

$$P_{s,\dots,s}(f,\Delta)=P_s^{x_1}[P_s^{x_2}\dots[P_s^{x_l}[f,[a_l,b_l]],\dots,[a_{l-1},b_{l-1}]],[a_l,b_l]].$$

Верхний индекс в операторе P_s^x означает переменную, по которой применяется оператор. Запись $P_{s,\dots,s}$ означает, что функция $f(x_1,\dots,x_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_s^{x_l}$ по переменной x_l в сегменте $[a_l,b_l]$, затем функция $P_s^{x_l}(f,[a_l,b_l])$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_s^{x_{l-1}}(P_s^{x_l}(f,[a_l,b_l]),[a_{l-1},b_{l-1}])$ в сегменте $[a_{l-1},b_{l-1}]$ и т. д.

Приступим к построению сплайна $f_n(x)$.

В кубах $G^j_{0,i_1,\dots,i_l}$ функция $f\in H_{1/2,1,\dots,1}(M)$ аппроксимируется полиномами

$$P_{s_0^j,v_0^j,\dots,v_0^j}\big(f,G^j_{0,i_1,\dots,i_l}\big),$$

где $s_0^0=r$; $s_0^j=\lceil nr/2\rceil$, $j=1,2,\dots,n_0-1$; $v_0^j=r$, $j=0,1,2,\dots,n_0-1$.

В кубах $G_{k,i_1,\dots,i_l}$, $k=1,2,\dots,n-1$, функцию f аппроксимируем полиномами

$$P_{s,v_k,\dots,v_k}\big(f,G_{k,i_1,\dots,i_l}\big).$$

Положим $s=\lceil nr/2\rceil$, $v_k=kr$.

Сплайн, составленный из полиномов

$$P_{s_0^j, v_0^j, \dots, v_0^j}\big(f, G_{0,i_1,\dots,i_l}^j\big), \qquad P_{s, v_k \dots, v_k}\big(f, G_{k,i_1,\dots,i_l}\big)$$

обозначим через f_n.

Оценим погрешность аппроксимации функции f сплайном f_n.

Погрешность аппроксимации по переменной t оценивается неравенствами:

$$\big\|f - P_{s_0^0}^t\big(f, G_{0,i_1,\dots,i_l}^0\big)\big\|_{C(G_{0,i_1,\dots,i_n}^0)} \le \frac{C}{2^{rn/2}} \frac{\ln s_0^0}{(s_0^0)^{1/2}} = \frac{C}{2^{nr/2}}; \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \big\|f - P_{s_0^j}^t\big(f, G_{0,i_1,\dots,i_l}^j\big)\big\|_{C[G_{0,i_1,\dots,i_l}^j]} &\le C\left(\frac{h_0^j}{2}\right)^{s_0^j} \left(\frac{2^{nr}}{2^j}\right)^{s_0^j} \frac{2^{s_0^j} s_0^j!}{2^{s_0^j - 1} s_0^j!} \\ &\le \frac{C}{2^{nr/2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_0 - 1; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \big\|f - P_s^t\big(f, G_{k,i_1,\dots,i_l}\big)\big\|_{C[G_{k,i_1,\dots,i_l}]} &\le C\left(\frac{h_k}{2}\right)^{s} \left(\frac{2^{n}}{2^k}\right)^{s} \frac{2^{s} s!}{2^{s-1} s!} \le \frac{C}{2^s} \\ &= \frac{C}{2^{nr/2}}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Приступим к оценке аппроксимации функции $P_s^t(f, [t_k, t_{k+1}])$ по переменной $x = (x_1, \dots, x_l)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \big\|f - P_{s,v_k,\dots,v_k}\big(f, G_{k,i_1,\dots,i_l}\big)\big\|_{C(G_{k,i_1,\dots,i_l})} &\le \big\|f - P_s^t(f, [t_k, t_{k+1}])\big\|_{C(G_{k,i_1,\dots,i_l})} + \\ &\quad \big\|P_s^t\big\|_{C(G_{k,i_1,\dots,i_l})} \big\|f - P_{v_k,\dots,v_k}(f, \Delta_{i_1,\dots,i_l}^k)\big\|_{C[\Delta_{i_1,\dots,i_l}^k]} \\ &= I_1 + \big\|P_s^t\big\|_{C(G_{k,i_1,\dots,i_l})} I_2. \end{aligned}$$

Величина I_1 оценена выше неравенствами (3.1)–(3.3). Известно, что $\big\|P_s^t\big\|_{C(G_{k,i_1,\dots,i_l})} \le C\lambda_s$, где λ_s — константа Лебега.

Оценим величину I_2. Воспользовавшись оценками (3.1)–(3.3), имеем

$$I_2 \le C\left(\frac{H_k}{2}\right)^{v_k} \frac{M 2^{v_k}(v_k - 1)!!}{2^{v_k - 1} v_k!} \left(\frac{2^n}{2^k}\right)^{(v_k - r)/2}. \tag{3.4}$$

Пусть $v_k = 2m + 1$. Продолжая неравенство (3.4), имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\le CM\left(\frac{H_k}{2}\right)^{v_k} \frac{2 \cdot 2^m m!}{v_k!} \left(\frac{2^n}{2^k}\right)^{(v_k - r)/2} \\ &\le CM\left(\frac{H_k}{2}\right)^{v_k} 2^{v_k/2} \left(\frac{v_k}{2e}\right)^{v_k/2} \left(\frac{e}{v_k}\right)^{v_k} \left(\frac{2^n}{2^k}\right)^{(v_k - r)/2} \\ &\le CM \frac{1}{2^{nr/2}} \left(H_k^2 \frac{e}{v_k} 2^{n-k-1}\right)^{v_k/2} \le CM 2^{-nr/2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь полагали $H_k = \left(\frac{kr}{e 2^{n-k-1}}\right)^{1/2}$. При $H_k \ge 2$ полагаем $H_k = 2$.

Аналогичные вычисления, проведенные при $v_k = 2m$, также приводят к неравенству (3.5).

Следовательно,

$$\left\| f - P_{v_k,\ldots,v_k}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) \right\|_{C[\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}]} \le \frac{CM}{2^{nr/2}}.$$

Полагая $v_0 = r$, $H_0 = 2^{-n/2}$, имеем

$$\left\| f - P_{v_0,\ldots,v_0}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}) \right\|_{C[\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}]} \le C/(2^{nr/2} r! 2^r) = C 2^{-nr/2}. \tag{3.6}$$

Из (3.1)–(3.6) следует, что $\|f - f_n\|_{C[G]} \le C 2^{-nr/2} \lambda_s \le C 2^{-nr/2} \ln n$.

Оценим число узлов, используемых при построении сплайна.

При $t \in [t_0^j, t_0^{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, область Ω покрывается $(2/H_0)^l = (1+o(1)) 2^l \lceil 2^{ln/2} \rceil \asymp \lceil 2^{ln/2} \rceil$ кубами. В каждой области $G^j_{0,i_1,\ldots,i_l}$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, используется $r^l(r + \lceil nr/2 \rceil) = (1 + o(1)) n r^{l+1}/2 \asymp n r^{l+1}$ узлов сплайна f_n. Следовательно, в области G_0 используется $O(2^{ln/2} n^2)$ узлов сплайна f_n.

В области G_k используется $m_k \asymp \frac{nr}{2} (kr)^{l/2} 2^{(n-k+1)l/2}$ узлов.

Следовательно, общее число узлов m, используемых в сплайне f_n, равно $m \asymp n^2 2^{nl/2} + \sum_{k=1}^{n-1} n k^{l/2} 2^{(n-k+1)l/2} \asymp n^2 2^{nl/2} + n 2^{nl/2} \asymp n^2 2^{nl/2}$.

Выражая n через m, имеем $n \asymp \log_2 \frac{m^{2/l}}{(\log_2 m)^{4/l}}$. Отсюда следует оценка

$$\|f - f_n\|_{C[G]} \le C 2^{-nr/2} \ln n = C m^{-r/l} (\ln \ln m)(\log_2 m)^{2r/l}.$$

Так как f является функцией от $l^* = l+1$ независимых переменных, то окончательная оценка имеет вид

$$\|f - f_n\|_{C[G]} \le C (\ln \ln m)(\ln m)^{2r(l^*-1)} m^{-r/(l^*-1)}.$$

Сплайн f_n имеет разрывы при $t = t_k$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Построим непрерывный сплайн, взяв за основу построенное выше покрытие области G более мелкими областями $G^j_{0,i_1,\ldots,i_l}$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, $G_{k,i_1,\ldots,i_l}$, $k = 1, \ldots, n-1$. При этом потребуем, чтобы при переходе от временного слоя G_k к временному слою G_{k-1} вершины кубов $G_{k,i_1,\ldots,i_l}$, $k = 1, \ldots, n-1$, лежащие в гиперплоскости $G_k \bigcap G_{k-1}$, входили в число вершин кубов G_{k-1}. Аналогичное построение проводится в области G_0.

Повторяя построение сплайна f_n и полагая $s_0^j = nr$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, $v_k = nr$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получаем непрерывный сплайн, который обозначим как f_n^*. Очевидно, $\left\| f - f_n^* \right\|_{C[G]} \le C \ln n 2^{-nr/2}$.

Оценим число n_* узлов, используемых при построении сплайна f_n^*:

$$n_* \asymp n^{l+1} 2^{nl/2} + \sum_{k=1}^{n-1} n^{l+1} 2^{(n-k-1)l/2} \asymp n^{l+1} 2^{nl/2}.$$

Отсюда следует, что $n \asymp \log_2 \frac{n_*^{2/l}}{(\log_2 n_*)^{2(l+1)/l}}$ и

$$\left\| f - f_n^* \right\|_{C[G]} \le C 2^{-nr/2} \ln n \le C \left(n_*^{-1} \ln^{l+1} n_* \right)^{r/l} \ln \ln n_*.$$

Так как сплайн f_n^* непрерывный, то из предыдущего неравенства следует оценка поперечника Колмогорова:

$$d_{n_*}(P_r(G, M), C) \le C \left(n_*^{-1} \ln^{l^*} n_* \right)^{r/(l^*-1)} \ln \ln n_*, \tag{3.8}$$

где l^*- общее число переменных.

Из неравенства (3.8) следует теорема 3.1.

4. Аппроксимация функций класса $P_{r,s}(G, M)$

В пункте исследуется аппроксимация функций $f(t,x) \in P_{r,s}(G,M)$. Построен кусочно-непрерывный сплайн $f_n(t,x)$, имеющий погрешность

$$\|f - f_n\|_{C[G]} \le C m^{-sr/(sl+r)} (\ln m)^{l+1+2s/(ls+r)},$$

где m — число узлов $f_n(t,x)$.

Построен непрерывный сплайн $\bar{f}_n(t,x)$, имеющий погрешность

$$\|f - \bar{f}_n\|_{C[G]} \le C \bar{m}^{-sr/(sl+r)} (\ln \bar{m})^{1+sr/(ls+r)},$$

где $\bar{m}$ — число узлов сплайна $\bar{f}_n(t,x)$.

Основным результатом раздела является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Справедливы неравенства*

$$C m^{-r/l} \log_2 m^{1+r/l} \le d_m(P_{r,s}(G,M), C) \le C m^{-sr/l(s+r)} (\log_2 m)^{1+sr/(sl+r)},$$

где l число — пространственных переменных. Сплайн $f_n(t,x)$ реализует правую оценку.

Исследуем аппроксимацию функций из класса $P_{r,s}(G,M)$.

Покроем область G более мелкими областями $G_k = [t_k, t_{k+1}] \times \Omega$, где $t_0 = 0$, $t_k = (2^k/2^n)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть $h_0 = 2/2^n$, $h_k = t_{k+1} - t_k = 2^k/2^n$, $k = 1, \dots, n-1$.

Область G_0 покроем более мелкими областями G_0^j, $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$, положив $n_0 = n(r-1)+1$, $G_0^0 = \left[0, t_0^1\right] \times \Omega$, $G_0^k = \left[t_0^k, t_0^{k+1}\right] \times \Omega$, $k = 1, 2, \dots, n_0 - 1$; $t_0^0 = 0$, $t_0^k = 2^k/2^{nr}$, $k = 1, 2, \dots, n_0$.

Пусть $h_0^0 = 2/2^{nr}$, $h_0^j = (2^{j+1} - 2^j)/2^{nr}$, $j = 1, 2, \dots, n_0 - 1$.

Область G_0^j, $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$, покроем параллелепипедами $G_{0,i_1,\dots,i_l}^j = \left[t_0^j, t_0^{j+1}\right] \times \Delta_{i_1,\dots,i_l}^0$, где $\Delta_{i_1,\dots,i_l}^0$ — параллелепипеды размерности l, расположенные в области Ω, с ребрами, параллельными координатным осям. Длина ребер не меньше $H_0 = 2^{-n/2}$ и не больше $2H_0$.

Область G_k покроем параллелепипедами $G_{k,i_1,\dots,i_l} = [t_k, t_{k+1}] \times \Delta_{i_1,\dots,i_l}^k$, где $\Delta_{i_1,\dots,i_l}^k$ — параллелепипеды размерности l, расположенные в области Ω, с ребрами, параллельными координатным осям и с длинами ребер не меньше H_k и не больше $2H_k$, $H_k = \left(2^{k-n}\right)^{(s-r)/(2s)}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Построим сплайн f_n, аппроксимирующий функцию $f \in P_{r,s}(G,M)$ при $r \ge 1$. В кубах $G_{0,i_1,\dots,i_l}^j$ функция $f \in H_{1/2,1,\dots,1}$ аппроксимируется интерполяционными полиномами $P_{s_0^j, v_0,\dots,v_0}(f, G_{0,i_1,\dots,i_l}^j)$, где $s_0^0 = r$, $s_0^j = \lceil 2^{nr/2s} \rceil$, $j = 1, 2, \dots, n_0 - 1$, $v_0 = r$. В кубах $G_{k,i_1,\dots,i_l}$ функция $f \in P_{r,s}(G,M)$ аппроксимируется интерполяционными полиномами $P_{v_0^k, v_k,\dots,v_k}(f, G_{k,i_1,\dots,i_l})$, $v_k = d = \lceil 2^{nr/2s} \rceil$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $v_0^k = d = \lceil 2^{nr/2s} \rceil$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Сплайн, составленный из полиномов

$$P_{s_0^j, v_0,\dots,v_0}(f, G_{0,i_1,\dots,i_l}^j), \quad j = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad P_{v_0^k, v_k,\dots,v_k}(f, G_{k,i_1,\dots,i_l}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

обозначим через f_n.

Оценим точность аппроксимации функции f сплайном f_n.

Оценим точность аппроксимации по переменной t:

$$\|f - P^t_{s^0_0}(f, G^0_{0,i_1,\ldots,i_l})\|_{C(G)} \le C\frac{1}{2^{nr/2}}; \tag{4.1}$$

$$\|f - P^t_{s^j_0}(f, G^j_{0,i_1,\ldots,i_l})\|_{C(G)} \le C\left(\frac{2^j}{2^{nr}}\right)^s \left(\frac{2^{nr}}{2^j}\right)^s \frac{\lambda_{s^j_0}}{(s^j_0)^s}$$
$$\le C\frac{n}{2^{nr/2}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1; \tag{4.2}$$

$$\|f - P_{v^k_0}(f, G_{k,i_1,\ldots,i_l})\|_{C(G)} \le C\left(\frac{2^n}{2^k}\right)^s \left(\frac{2^{k+1} - 2^k}{2^n}\right)^s \frac{\lambda_{v^k_0}}{(v^k_0)^s}$$
$$\le \frac{Cn}{2^{nr/2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.3}$$

Оценим погрешность аппроксимации функции f сплайном f_n по переменной $x = (x_1, \ldots, x_l)$. Очевидно:

$$\|f - P^x_{v_0,\ldots,v_0}(f, \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})\|_{C(G)} \le \frac{C}{2^{nr/2}} \frac{\lambda^l_r}{r!2^{r-1}} = \frac{C}{2^{nr/2}}; \tag{4.4}$$

$$\|f - P^x_{v_k,\ldots,v_k}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})\|_{C(G)} \le C\left(\frac{2^n}{2^k}\right)^{(s-r)/2} (H_k)^s \frac{\lambda^l_{v_k}}{v^s_k} \le \frac{Cn^l}{2^{nr/2}}. \tag{4.5}$$

Из оценок (4.1)–(4.5) следует неравенство

$$\|f - f_n\|_{C(G)} \le Cn^{l+1}2^{-nr/2}. \tag{4.6}$$

Оценим число узлов, используемых при построении сплайна f_n.

Область G_0 покрывается $Cnr2^{nl/2}$ кубами. Область $U^{n-1}_{k=1}G_k$ покрывается $2\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^{n-k}\right)^{(s-r)l/2s} = C2^{n(s-r)l/2s}$ кубами. Таким образом, общее число кубов покрытия области G оценивается величиной $O(n2^{nl/2})$.

Общее число узлов, используемых при построении сплайна, равно $m = O(nr^{l+1} \times 2^{n(ls+r)/2s})$. Тогда $n = (1 + o(1))\log_2 \frac{m^{2s/(ls+r)}}{(\log_2 m)^{2s/(ls+r)}}$ и $\|f - f_n\|_{C[G]} \le Cm^{-sr/(sl+r)} \times (\ln m)^{l+1+2s/(ls+r)}$.

При построении непрерывного сплайна область G покрывается более мелкими областями $G_k = [t_k, t_{k+1}] \times \Omega$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $t_0 = 0$, $t_k = \frac{2^k}{2^n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В свою очередь каждая область G_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, покрывается более мелкими областями.

Опишем покрытие области Ω на различных временных слоях. Область G_0 покрывается областями G^j_0, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, $n_0 = n(r-1) + 1$, причем

$$G^0_0 = \left[0, \frac{2}{2^{nr}}\right] \times \Omega, \qquad G^j_0 = \left[\frac{2^j}{2^{nr}}, \frac{2^{j+1}}{2^{nr}}\right] \times \Omega, \quad j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1.$$

На временных слоях $\left[0, \frac{2}{2^{nr}}\right]$, $\left[\frac{2^j}{2^{nr}}, \frac{2^{j+1}}{2^{nr}}\right]$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$; $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, стороны куба Ω делятся на $\lceil 2^{n/2} \rceil$ равных частей и через точки деления проводятся плоскости, параллельные координатным плоскостям. В результате разбиения получаются кубы:

$$G^j_{0,i_1,\ldots,i_l}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1; \qquad G_{k,i_1,\ldots,i_l} = \left[\frac{2^k}{2^n}, \frac{2^{k+1}}{2^n}\right] \times \Delta^j_{k,i_1,\ldots,i_l}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В результате получаем покрытие областей G^j_0, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, G_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, параллелепипедами:

$$
\begin{aligned}
G^0_{0,i_1,\ldots,i_l} &= \left[0, \frac{2}{2^{nr}}\right] \times \Delta^0_{0,i_1,\ldots,i_l};\\
G^j_{0,i_1,\ldots,i_l} &= \left[\frac{2^j}{2^{nr}}, \frac{2^{j+1}}{2^{nr}}\right] \times \Delta^j_{0,i_1,\ldots,i_l}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1;\\
G_{k,i_1,\ldots,i_l} &= \left[\frac{2^k}{2^n}, \frac{2^{k+1}}{2^n}\right] \times \Delta_{k,i_1,\ldots,i_l}, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1.
\end{aligned}
$$

Приступим к построению сплайна. Обозначим через $P_u(f, [a, b])$ полином, интерполирующий функцию f по $u+1$ узлу $\zeta^*_1, \ldots, \zeta^*_{u+1}$, полученному в результате отображения сегмента $[\zeta_1, \zeta_{u+1}]$ на сегмент $[a, b]$. Здесь $\zeta_1, \ldots, \zeta_{u+1}$ — узлы полинома Чебышева первого рода.

Через $P_{u,\ldots,u}[f, [a_1, b_1; \ldots; a_l, b_l]]$ обозначен интерполяционный полином

$$P^{x_1}_u[P^{x_2}_u[\cdots P^{x_{l-1}}_u[P^{x_l}_u[f, [a_l, b_l]], [a_{l-1}, b_{l-1}]], \ldots, [a_2, b_2]], [a_1, b_1]].$$

В параллелепипедах $G_{n-1,i_1,\ldots,i_l}$ функция f интерполируется полиномом

$$P_{d,r,\ldots,r}(f, G_{n-1,i_1,\ldots,i_l}), \quad d = \lceil 2^{nr/2s} \rceil.$$

В параллелепипедах $G_{n-2,i_1,\ldots,i_l}$ функция f аппроксимируется полиномом

$$P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G_{n-2,i_1,\ldots,i_l}).$$

Здесь через $\bar f$ обозначена функция, равная f во всех точках куба $G_{n-2,i_1,\ldots,i_l}$, за исключением точек, расположенных на гиперплоскости $G_{n-1,i_1,\ldots,i_l} \bigcap G_{n-2,i_1,\ldots,i_l}$, в которых она равна $P_{d,r,\ldots,r}(f, G_{n-1,i_1,\ldots,i_l})$. Аналогичным образом проводится построение в областях $G_{k,i_1,\ldots,i_l}$, $k = n-3, \ldots, 2, 1$.

В областях $G^j_{0,i_1,\ldots,i_l}$, $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$, $G_{k,i_1,\ldots,i_l}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, функция f аппроксимируется интерполяционными полиномами:

$$
\begin{aligned}
&P_{r,r,\ldots,r}(\bar f, G^0_{0,i_1,\ldots,i_l}),\\
&P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G^j_{0,i_1,\ldots,i_l}), \quad j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1,\\
&P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G_{k,i_1,\ldots,i_l}), \quad k = 1, 2, \ldots, n - 2,\\
&P_{d,r,\ldots,r}(f, G_{n-1,i_1,\ldots,i_l}),
\end{aligned}
$$

которые строятся последовательным введением интерполяционных полиномов

$$P_{d,r,\ldots,r}(f, G_{n-1,i_1,\ldots,i_l}), P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G_{n-2,i_1,\ldots,i_l}), \ldots, P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G_{1,i_1,\ldots,i_l}),$$

$$P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G^{n_0-1}_{0,i_1,\ldots,i_l}), P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G^{n_0-2}_{0,i_1,\ldots,i_l}), \ldots, P_{d,r,\ldots,r}(\bar f, G^1_{0,i_1,\ldots,i_l}), P_{r,r,\ldots,r}(\bar f, G^0_{0,i_1,\ldots,i_l}).$$

Непрерывный сплайн $\bar f_n$ состоит из перечисленных выше интерполяционных полиномов.

Оценим погрешность аппроксимации функции f непрерывным сплайном $\bar f_n$. Вначале оценим погрешность аппроксимации по переменной t:

$$\|f - P_r^t(f, G^0_{0,i_1,\dots,i_l})\|_{C[0,2/2^{nr}]} \le \frac{C}{2^{nr/2}};$$

$$\|f - P_d^t(f, G^j_{0,i_1,\dots,i_l})\|_{C[2^j/2^{nr},2^{j+1}/2^{nr}]} \le C\left(\frac{2^{nr}}{2^j}\right)^s\left(\frac{2^j}{2^{nr}}\right)^s\frac{\lambda_d}{2^{nr/2}} \le C\frac{n}{2^{nr/2}};$$

$$\|f - P_d^t(f, G_{k,i_1,\dots,i_l})\|_{C[2^k/2^n,2^{k+1}/2^n]} \le C\left(\frac{2^n}{2^k}\right)^s\left(\frac{2^k}{2^n}\right)^s\frac{\lambda_d}{2^{nr/2}} \le C\frac{n}{2^{nr/2}}.$$

Из последних трех неравенств следует, что погрешность аппроксимации функции f сплайном $\bar{f}_n$ по переменной t не превышает $Cn/2^{nr/2}$.

Оценим погрешность аппроксимации по пространственным переменным:

$$\|f - P^x_{d,r,\dots,r}(f, G_{n-1,i_1,\dots,i_l})\|_{C(\Delta^{n-1}_{i_1,\dots,i_l})} \le \frac{C}{2^{nr/2}};$$

$$\begin{aligned}\|f - P^x_{d,r,\dots,r}(\bar{f}, G_{n-2,i_1,\dots,i_l})\|_{C(\Delta^{n-2}_{i_1,\dots,i_l})} &\le \|f - P^x_{d,r,\dots,r}(f, G_{n-2,i_1,\dots,i_l})\|_{C(\Delta^{n-2}_{i_1,\dots,i_l})} + \\ &\|P^x_{d,r,\dots,r}(f, G_{n-2,i_1,\dots,i_l}) - \\ &P^x_{d,r,\dots,r}(\bar{f}, G_{n-2,i_1,\dots,i_l})\|_{C(\Delta^{n-2}_{i_1,\dots,i_l})} \\ &\le \frac{C}{2^{nr/2}}.\end{aligned}$$

Индекс x в операторе $P^x_{d,r,\dots,r}$ означает интерполяцию по x.

Оценим точность аппроксимации f сплайном $\bar{f}_n$:

$$\|f - \bar{f}_n\|_{C[G]} = \|f - S^t_n(f, [0,1]) + S^t_n(f, [0,1]) - S^t_n S^x_n(f, G)\|_{C[G]} \le \frac{Cn}{2^{nr/2}}.$$

Здесь S^t_n сужение $\bar{f}_n$ на сегмент $[0,1]$ по временной переменной; S^x_n — сужение $\bar{f}_n$ на куб Ω по пространственным переменным.

Оценим число узлов, используемых при построении сплайна $\bar{f}_n$. В каждом из кубов, покрывающих область G, используется dr^l узлов. Следовательно, общее число узлов m равно: $m \asymp n 2^{nl/2} 2^{nr/2s} = n 2^{n(sl+r)/2s}$.

Отсюда $n \asymp \log_2(m^{2s/(sl+r)}/(\log_2 m)^{2s/(sl+r)})$ и, следовательно, $\|f - \bar{f}_n\|_{C(G)} \le Cm^{-sr/(sl+r)}(\log_2 m)^{1+sr/(sl+r)}$.

Так как сплайн $\bar{f}_n$ — непрерывный, то

$$d_m(P_{r,s}(G, M), C) \le Cm^{-sr/(sl+r)}(\log_2 m)^{1+sr/(sl+r)}. \tag{4.7}$$

Приступим к оценке снизу величины поперечника $d_n(P_{r,s}(G, M), C)$. При этом воспользуемся леммой Лоренца [5, с. 47; 21, с. 133].

Для этого построим покрытие области G более мелкими областями

$$G_k = [t_k, t_{k+1}] \times \Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

где $t_0 = 0$, $t_k = (2^k/2^n)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть $h_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Каждую область G_k покроем кубами $G_{k,i_1,\dots,i_l} = [t_k, t_{k+1}] \times \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, где $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ — кубы или параллелепипеды размерности l, расположенные в области Ω, с ребрами, параллельными координатным осям и с длинами ребер не меньше H_k и не больше $2H_k$, $H_k = \dfrac{2^{k(s-r)/2s}}{2^{n/2}}, k = 1, 2, \dots, n-1$.

Построение множества функций, удовлетворяющих условиям леммы Лоренца, будем проводить в области $G^* = \bigcup_{k=1}^{n-1} G_k$.

Каждому кубу $G_{k;i_1,\dots,i_l}$ поставим в соответствие функцию $\varphi_{k;i_1,\dots,i_l}(t, x_1, \dots, x_l)$, которая строится следующим образом. Пусть $G_{k;i_1,\dots,i_l} = [t_k, t_{k+1}; x_1^v, x_1^{v+1}; \dots; x_l^v, x_l^{v+1}]$. Тогда

$$\varphi_{k;i_1,\ldots,i_l}(t,x_1,\ldots,x_l)=\begin{cases} A\dfrac{((t-t_k)(t_{k+1}-t))^s}{h_k^s t_k^s}\dfrac{((x_1-x_1^v)(x_1^{v+1}-x_1)\ldots(x_l-x_l^v)(x_l^{v+1}-x_l))^s}{H_k^{(2l-1)s}t_k^{(s-r)/2}}, \\ \qquad (t,x_1,\ldots,x_l)\in G_{k;i_1,\ldots,i_l}, \\ 0, \qquad (t,x_1,\ldots,x_l)\in G\setminus G_{k;i_1,\ldots,i_l}, \end{cases}$$

Очевидно, что существует константа A такая, что $\varphi_{k;i_1,\ldots,i_l}\in P_{r,s}(G,M)$.

Оценим значения функции $\varphi_{k;i_1,\ldots,i_l}(x_1,\ldots,x_l)$ в точках $(\tilde t_k;\tilde x_1^v,\ldots,\tilde x_l)$, где $\tilde t_k=(t_k+t_{k+1})/2;\tilde x_1^v=(x_1^v+x_1^{v+1})/2,\ldots,\tilde x_l=(x_l^v+x_l^{v+1})/2$.

Очевидно, $|\varphi_{k;i_1,\ldots,i_l}(\tilde t_k;\tilde x_1^v,\ldots,\tilde x_l)|\ge \frac{C}{2^{rn/2}}$, $k=1,\ldots,n-1$.

Построим функцию

$$\Psi_\lambda(t,x_1,\ldots,x_l)=\sum_k\sum_i\lambda_{k;i_1,\ldots,i_l}\varphi_{k;i_1,\ldots,i_l}(t,x_1,\ldots,x_l),\quad \lambda_{k;i_1,\ldots,i_l}=\pm1.$$

Эта функция отвечает условиям леммы Лоренца.

Оценим число n кубов $G_{k;i_1,\ldots,i_l}$. Очевидно,

$$m=C\left(n\sum_{k=1}^{n-1}2^{nl/2}/2^{k(s-r)l/2s}\right)=Cn2^{nl/2}.$$

Отсюда $n=C\log_2(m^{2/l}/(\log_2 m)^{2/l})$, и следовательно,

$$\max_{G\setminus G_0}\Psi_\lambda(t,x_1,\ldots,x_l)=Cm^{-r/l}\log_2 m^{1+r/l}.$$

Из леммы Лоренца следует оценка $d(P_{r,s}(G,M))\ge Cm^{-r/l}\log_2 m^{1+r/l}$.

Отсюда и из неравенств (4.7) следует теорема 4.1.

Отметим, что при $s\to\infty$ оценки сверху и снизу поперечника Колмогорова совпадают (по порядку).

Эффективность предложенных алгоритмов иллюстрируется следующим примером.

Пример. Пусть в области $D=\{(t,x,y):\,-1\le x,y\le 1,\,0\le t\le 1\}$ задана функция $f(t,x,y)$, определяемая интегралом

$$f(t,x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\big(x+2\sqrt{t}\xi,y+2\sqrt{t}\eta\big)e^{-\xi^2-\eta^2}\,d\xi\,d\eta.$$

где $\varphi(\xi,\eta)=\big(1-\xi^2-\eta^2\big)^{3/2}$, если $\xi^2+\eta^2\le 1$, и $\varphi(\xi,\eta)=0$, если $\xi^2+\eta^2>1$.

Очевидно, $f(t,x,y)\in P_r(D,M)$.

Аппроксимация функции $f(t,x,y)$ осуществляется сплайном $f_n(t,x,y)$. При построении сплайна $f_n(t,x,y)$ использовались L слоев по переменной t. При $t=0$ каждая сторона квадрата $[-1,1]^2$ разбивается на 2^N частей и строятся соответствующие параллелепипеды $\Delta_{k,l}^0$. В каждом параллелепипеде $\Delta_{k,l}^0$ функция $f(t,x,y)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s_0,v_0,v_0}f(\Delta_{k,l}^0)$, где $s_0=v_0=L$. Дальнейшее построение сплайна проводится в соответствии с описанным в статье алгоритмом.

Погрешность вычислений равна $1.17134\cdot10^{-5}$ при $L=6,N=15$ и $4.2275e\cdot10^{-6}$ при $L=7,N=15$.

Литература

1. **Бабенко К.И.** О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи математических наук. — 1985. — Т. 40, вып. 1. — С. 3–28.
2. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
3. **Бойков И.В.** Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов // Оптимальные методы вычислений и их применение // Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза: Изв-во Пензенского политехнического института, 1987. — Вып. 8. — С. 4–22.
4. **Бойков И.В.** Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 1. — С. 25–33.
5. **Бойков И.В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2007.
6. **Вайникко Г.М.** О гладкости решений многомерных слабосингулярных интегральных уравнений // Математический сборник. — 1989. — Т. 180, № 12. — С. 1709–1726.
7. **Бойков И.В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. — Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2009.
8. **Бойков И.В., Бойкова А.И.** Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. — Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2013.
9. **Boykov I.V.** Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics // arXiv. math 1303.0416
10. **Бирман М.Ш., Соломяк М.З.** Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α // Математический сборник. — 1967. — Т. 73(115), № 3. — С. 331–355.
11. **El Kolli A.** $n-$ ieme epaisseur dans les espaces de Sobolev // J. Approximation Theory. — 1974. — Vol. 10, № 3. — P. 268–294.
12. **Трибель Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир,1980. Пер. с англ.: H. Triebel. Interpolation theory, function spaces, differential operators. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
13. **Васильева А.А.** Оценки поперечников весовых соболевских классов // Математический сборник. — 2010. — Т. 201, № 7. — С. 15–52.
14. **Vasil'eva A.A.** Kolmogorov and linear widths of the weighted Besov classes with singularity at the origin // J. Approx. Theory. — 2013. — Vol. 167. — P. 1–41.
15. **Бойков И.В., Тында А.Н.** Поперечники соболевских классов функций с особенностями на границе // Изв. высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2013. — № 1. — С. 61–81.
16. **Vasil'eva A.A.** Estimates for the Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a domain with cusp: case of weights that are functions of the distance from the boundary// Eurasian Math. J. — 2017. — Vol. 8, № 4. — P. 102–106.
17. **Васильева А.А.** Поперечники весовых классов Соболева на области с пиком // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 37–70.
18. **Петровский И.Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ГИФМЛ, 1961.
19. **Кошляков Н.С.** Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
20. **Гончаров Л.В.** Теория интерполирования и приближения функций. — М.: ГИТТЛ, 1954.
21. **Lorentz G.G.** Approximation of functions. — New York: Chelsia Publication Company, 1986.

Поступила в редакцию 25 сентября 2018 г.
После исправления 15 января 2020 г.
Принята к печати 21 октября 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Babenko K.I.** O nekotorykh zadachakh teorii priblizhenii i chislennogo analiza // Uspekhi matematicheskikh nauk. — 1985. — T. 40, vyp. 1. — S. 3–28.
2. **Babenko K.I.** Osnovy chislennogo analiza. — M.: Nauka, 1986.
3. **Boikov I.V.** Optimal'nye po tochnosti algoritmy vychisleniya integralov // Optimal'nye metody vychislenii i ikh primenenie // Mezhvuz. sb. nauch. tr. — Penza: Izv-vo Penzenskogo politekhnicheskogo instituta, 1987. — Vyp. 8. — S. 4–22.
4. **Boikov I.V.** Approksimatsiya nekotorykh klassov funktsii lokal'nymi splainami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — T. 38, № 1. — S. 25–33.
5. **Boikov I.V.** Optimal'nye metody priblizheniya funktsii i vychisleniya integralov. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2007.
6. **Vainikko G.M.** O gladkosti reshenii mnogomernykh slabosingulyarnykh integral'nykh uravnenii // Matematicheskii sbornik. — 1989. — T. 180, № 12. — S. 1709–1726.
7. **Boikov I.V.** Priblizhennye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. — Chast' vtoraya. Gipersingulyarnye integraly. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2009.
8. **Boikov I.V., Boikova A.I.** Priblizhennye metody resheniya pryamykh i obratnykh zadach gravirazvedki. — Penza: Izd-vo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013.
9. **Boykov I.V.** Optimal approximation and Kolmogorov widths estimates for certain singular classes related to equations of mathematical physics // arXiv. math 1303.0416
10. **Birman M.SH., Solomyak M.Z.** Kusochno-polinomial'nye priblizheniya funktsii klassov W_p^α // Matematicheskii sbornik. — 1967. — T. 73(115), № 3. — S. 331–355.
11. **El Kolli A.** $n-$ ieme epaisseur dans les espaces de Sobolev // J. Approximation Theory. — 1974. — Vol. 10, № 3. — P. 268–294.
12. **Tribel' Kh.** Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory. — M.: Mir,1980. Per. s angl.: H. Triebel. Interpolation theory, function spaces, differential operators. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
13. **Vasil'eva A.A.** Otsenki poperechnikov vesovykh sobolevskikh klassov // Matematicheskii sbornik. — 2010. — T. 201, № 7. — S. 15–52.
14. **Vasil'eva A.A.** Kolmogorov and linear widths of the weighted Besov classes with singularity at the origin // J. Approx. Theory. — 2013. — Vol. 167. — P. 1–41.
15. **Boikov I.V., Tynda A.N.** Poperechniki sobolevskikh klassov funktsii s osobennostyami na granitse // Izv. vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki. — 2013. — № 1. — S. 61–81.
16. **Vasil'eva A.A.** Estimates for the Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a domain with cusp: case of weights that are functions of the distance from the boundary// Eurasian Math. J. — 2017. — Vol. 8, № 4. — P. 102–106.
17. **Vasil'eva A.A.** Poperechniki vesovykh klassov Soboleva na oblasti s pikom // Matematicheskii sbornik. — 2015. — T. 206, № 10. — S. 37–70.
18. **Petrovskii I.G.** Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi. — M.: GIFML, 1961.
19. **Koshlyakov N.S.** Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki. — M.: Vysshaya shkola, 1970.
20. **Goncharov L.V.** Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsii. — M.: GITTL, 1954.
21. **Lorentz G.G.** Approximation of functions. — New York: Chelsia Publication Company, 1986.