

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ГОРЮЧИМ ГАЗОМ

П. И. Чушкин

(Москва)

1. Постановка задачи. Рассмотрим сверхзвуковое установившееся течение горючей газовой смеси при симметричном обтекании плоского тела или тела вращения. В соответствии с работой [1] будем предполагать, что химический процесс горения описывается одной переменной — массовой концентрацией непрореагировавших молекул c . В этом случае система уравнений газовой динамики имеет вид:

$$\operatorname{div} \rho V = 0, \quad \rho \frac{dV}{dt} + \nabla p = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dt} - \frac{\kappa p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + (\kappa - 1) \rho q \frac{dc}{dt} = 0.$$

Здесь V , p , ρ — скорость, давление и плотность; q — энергия, выделяющаяся при горении в единице массы газа; κ — отношение удельных теплоемкостей газа. Для определения концентрации c служит уравнение химической кинетики

$$\frac{dc}{dt} = -L c^m \rho^{m-1} \exp\left(-\frac{A \rho}{\mu p}\right), \quad (2)$$

где μ — средний молекулярный вес смеси; A — энергия активации; m — порядок реакции; L — положительная константа.

При решении задачи удобно ввести безразмерные величины. Примем за характерные величины критическую скорость звука $a_{кр}$ и плотность ρ_{∞} невозмущенного потока, а также характерное время задержки воспламенения t_* . Последняя величина, например, для смеси водорода с воздухом, согласно экспериментам [2], находится через величины p_* и ρ_* по следующей формуле:

$$t_* = 4,5 \cdot 10^{-9} \frac{1}{p_*} \exp\left(\frac{4,18 \cdot 10^3 A \rho_*}{\mu p_*}\right) [\text{сек}], \quad (3)$$

причем здесь размерности: A — кал/моль, μ — г/моль p_*/ρ_* — м²/сек², p_* — атм.

В дальнейшем основные переменные V , p , ρ , время t и декартовы координаты x , y будем рассматривать как безразмерные, оставляя для них прежние обозначения, но имея в виду, что, например, давление отнесено к $\rho_{\infty} a_{кр}^2$, а линейные размеры — к $t_* a_{кр}$. Тогда при переходе к безразмерной форме уравнения (1) не изменяются, а кинетическое уравнение (2) для бимолекулярных реакций ($m=2$) примет вид

$$\frac{dc}{dt} = -l c^2 \frac{p}{p_*} \exp\left[\frac{4,18 \cdot 10^3 A}{\mu a_{кр}^2} \left(\frac{p_*}{p} - \frac{\rho}{p}\right)\right]. \quad (4)$$

Входящая сюда критическая скорость звука $a_{кр}$ (м/сек) вычисляется через число Маха M_{∞} и скорость звука a_{∞} невозмущенного потока, а именно:

$$a_{кр} = a_{\infty} \frac{M_{\infty}}{\Lambda_{\infty}} \left(\Lambda_{\infty}^2 = \frac{(\kappa + 1) M_{\infty}^2}{2 + (\kappa - 1) M_{\infty}^2} \right).$$

Возьмем декартову систему координат x, y с началом в передней точке тела и осью x , направленной вдоль оси тела. По симметрии задачи достаточно рассматривать течение только на верхней полуплоскости. Пусть контур тела задан уравнением $y = y_T(x)$, а искомая ударная волна, возникающая перед телом, представляется уравнением $y = y_B(x)$. Введем вместо y нормированную переменную $\xi = (y - y_T)/(y_B - y_T)$.

Систему уравнений (1) и (4) надо интегрировать в области между контуром тела ($\xi=0$) и ударной волной ($\xi=1$). На теле ставится условие обращения в нуль нормальной составляющей скорости. На ударной волне должны выполняться газодинамические условия на сильном разрыве, которые дают следующие значения функций непосредственно за ударной волной

$$\rho = \frac{(x+1)\Lambda_\infty^2 \tau^2}{(x+1)(1+\tau^2) - (x-1)\Lambda_\infty^2},$$

$$\rho = \frac{2}{x+1} \frac{\Lambda_\infty^2 \tau^2}{1+\tau^2} - \frac{x-1}{2x} \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \Lambda_\infty^2\right),$$

$$V^2 = \frac{\Lambda_\infty^2}{1+\tau^2} \left(1 + \frac{\tau^2}{\rho^2}\right), \quad \zeta = \frac{\tau(\rho-1)}{\rho+\tau^2}, \quad c = 1, \quad (5)$$

где $\tau = dy_B/dx$; $\zeta = v/u$; u, v — составляющие скорости по осям x и y соответственно.

2. Метод характеристик. При сверхзвуковой скорости течения система уравнений (1) и (4) будет принадлежать к гиперболическому типу. Ее характеристиками являются два семейства линий Маха (характеристики первого и второго семейств) и семейство линий тока, для которых имеют место следующие дифференциальные уравнения

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\delta} \left(\lambda + \frac{\beta\zeta+1}{\beta-\zeta}\right) \equiv B_1, \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\delta} \left(\lambda + \frac{\beta\zeta-1}{\beta+\zeta}\right) \equiv B_2,$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\delta} (\lambda + \zeta) \equiv B_3, \quad (6)$$

причем

$$\beta = \left(\frac{V^2 \rho}{x \rho} - 1\right)^{1/2}, \quad \lambda = \xi \left(\frac{dy_T}{dx} - \frac{dy_B}{dx}\right) - \frac{dy_T}{dx}, \quad \delta = y_T - y_B.$$

Соотношения совместности вдоль характеристик первого и второго семейств в плоском ($v=0$) и осесимметричном ($v=1$) случаях будут

$$d\zeta + Kdp + Pdx = 0, \quad d\zeta - Idp - Ndx = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$I = K = \frac{\beta}{\rho u^2}, \quad P = \frac{1+\zeta^2}{\beta-\zeta} \left(\frac{v\zeta}{\delta\xi+y_T} + F\right),$$

$$N = \frac{1+\zeta^2}{\beta+\zeta} \left(\frac{v\zeta}{\delta\xi+y_T} + F\right), \quad F = \frac{x-1}{x} \frac{\rho q}{\rho u} \frac{dc}{dt}.$$

Вдоль линий тока выполняются уравнение Бернулли, уравнение энергии из системы (1) и кинетическое уравнение (4), которые соответственно представим в такой форме

$$dV^2 + Gdp = 0, \quad d\rho - Ddp - Edx = 0, \quad dc - Qdx = 0, \quad (8)$$

где

$$G = \frac{2}{\rho}, \quad D = \frac{\rho}{x \rho}, \quad E = \rho F, \quad Q = \frac{x}{x-1} \frac{F \rho}{\rho q}.$$

Решение рассматриваемой задачи о сверхзвуковом обтекании тел потоком горючего газа будем проводить численным методом характеристик. Мы построим здесь численную схему второго порядка точности, которая является обобщением схемы, развитой в работе [3] для расчета течений газа без химических реакций. В этой схеме решение рассчитывается на слоях, последовательно расположенных по потоку и представляющих собой плоскости $x = \text{const}$. На каждом слое узловые точки характеристической сетки берутся при заранее фиксированных значениях $\xi = \xi_n = i/n$ ($i=0, 1, \dots, n$). Из узловой точки на рассчитываемом слое проводятся характеристики и линия тока вверх по течению в направлении к предыдущему известному слою, где в соответствующих точках пересечения значения функций определяются квадратичной интерполяцией по ξ . Такая численная схема удобна в практическом отношении и дает лучшую точность, поскольку узловые точки здесь можно распределять в соответствии с ожидаемым характером решения, располагая их гуще вблизи ударной волны, где имеют место большие градиенты функций.

Для расчета сверхзвукового течения методом характеристик необходимо иметь данные Коши для всех функций на некотором начальном слое $x = x_n$, взятом в гиперболической области. Такие начальные данные получаются из рассмотрения обтекания носовой части тела.

В методе характеристик определение функций в узловых точках внутри поля течения и на границах (на ударной волне и на теле) проводится по своим вычислительным алгоритмам. Опишем теперь эти алгоритмы.

При расчете внутренней узловой точки 0 с координатами x_0, ξ_0 из нее выпускаются характеристики первого и второго семейств, а также линия тока. Они пересекут предыдущий слой $x = x_0 - \Delta x$, отстоящий на шаг Δx от рассчитываемого слоя, соответственно в точках 1, 2, 3 с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Записывая в конечных разностях дифференциальные уравнения (6), будем иметь

$$\xi_i = \xi_0 - B_i \Delta x \quad (i = 1, 2, 3).$$

В первом приближении коэффициенты B_i вычисляются по известным величинам, взятым из точки с координатами $x_0 - \Delta x, \xi_0$. В точках же 1, 2 и 3 необходимые функции находятся интерполяцией.

Представим в конечно-разностной форме соотношения совместности (7) вдоль характеристик и дифференциальные уравнения (8), выполняющиеся вдоль линии тока. Полученная система разностных уравнений позволяет найти в точке 0 параметры течения:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{K+I} [\zeta_1 - \zeta_2 + Kp_1 + Ip_2 - (P+N)\Delta x], \\ \zeta_0 &= \zeta_2 + I(p_0 - p_2) + N\Delta x, \quad V_0^2 = V_3^2 - G(p_0 - p_3), \\ \rho_0 &= \rho_3 + D(p_0 - p_3) + E\Delta x, \quad c_0 = c_3 + Q\Delta x. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем цифровыми индексами отмечаются величины в соответствующих точках. Система (9) решается методом итераций, при этом коэффициенты K, P осредняются по точкам 0 и 1; I, N — по точкам 0 и 2; D, E, G, Q — по точкам 0 и 3. Во второй и следующей итерациях проводится также соответствующее осреднение коэффициентов B_i . Нужная точность достигается в трех итерациях.

Вычислительный алгоритм для новой точки 0 на теле ($\xi_0=0$) во многом аналогичен алгоритму для внутренней точки. Но теперь берется только одна характеристика второго семейства, а линией тока является

контур тела (поэтому здесь известна величина $\zeta = dy_\tau/dx$). В данном случае давление рассчитывается по уравнению

$$p_0 = p_2 + \frac{1}{I} (\zeta_3 - \zeta_2 - N \Delta x).$$

а V_0 , ρ_0 и c_0 по-прежнему находятся по трем последним равенствам из системы (9).

Определение точки 0 на ударной волне ($\xi_0=1$) проводится подбором величины τ . Исходное значение τ_0 задается близким к значению τ_4 в соседней точке 4 на ударной волне. Тогда по условиям (5) получатся все функции за ударной волной, а координата y_0 вычисляется интегрированием

$$y_0 = y_4 + \frac{\tau_0 + \tau_4}{2} \Delta x.$$

Затем из точки 0 выпускается характеристика первого семейства до пересечения с предыдущим слоем в точке 1, и вдоль нее в конечно-разностной форме представляется соответствующее соотношение совместности (7). По удовлетворению этого соотношения контролируется правильность выбора величины τ_0 и проводится ее корректировка методом Ньютона.

После окончания подбора τ_0 вычислим функцию тока на ударной волне

$$\psi_b = \psi_0 = \psi_4 + \frac{\Lambda_\infty}{1+\nu} (y_0^{\nu+1} - y_4^{\nu+1})$$

и, рассчитав весь слой $x = \text{const}$, найдем функцию тока на поверхности тела

$$\psi_\tau = \psi_b - \delta \int_0^1 \rho u y^\nu d\xi.$$

Сравнение вычисленной функции тока ψ_τ с ее известным значением на теле позволяет оценивать точность решения. Отметим еще, что шаг Δx выбирается из условий точности и устойчивости расчета.

3. Пример расчета. С помощью данного численного метода в качестве примера рассчитывалось горение смеси водорода (30%) с воздухом в сверхзвуковом потоке около клина и конуса. В расчете были приняты такие значения физических параметров: $A = 20\,000$ кал/моль, $\mu = 21$ г/моль, $q = 1,1$, $\kappa = 1,4$ для непрореагировавшего газа и $\kappa = 1,2$ для продуктов сгорания, а для промежуточных значений концентрации c величина κ находилась линейной интерполяцией. Константа скорости химической реакции l в уравнении (4), записанном для безразмерного времени, полагалась равной 1. Проводились также расчеты с другими величинами q и l , влияние которых на результаты является значительным.

В расчетах предполагалось, что на самом острие тела за малый промежуток времени Δt (по сравнению с характерным временем задержки t^*) химические реакции не успевают существенно повлиять на последующую область течения. Тогда начальные данные для течения с горением можно брать из известных газодинамических решений для обтекания клина (см., например, [4]) или конуса [5] потоком совершенного газа с замороженными реакциями. Выбор величины Δt зависит от условий течения и требуемой точности; в рассчитанных случаях практическая точность обеспечивалась при $\Delta t/t_* = 0,001 \div 0,01$.

Численные расчеты проводились для простой модели горения, в которой экзотермическая реакция начинается непосредственно за головной ударной волной и период индукции отсутствует. В этом случае время задержки t_* , вычисленное по формуле (3) для давления p_* и плотности ρ_* за ударной волной у поверхности тела, играет, по существу, только роль характерного масштаба. Нетрудно также рассчитать более сложную модель (см. [6]), в которой тепловыделение начинается после конечного периода индукции, а переменное время задержки определяется уравнением типа (2).

Приведем теперь некоторые результаты, полученные в простой модели для конуса с полууглом раствора $\omega = 30^\circ$. Невозмущенный поток имел $M_\infty = 5$, $T_\infty = 1000^\circ \text{K}$, $p_\infty = 1 \text{ атм}$ и $t_* = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$.

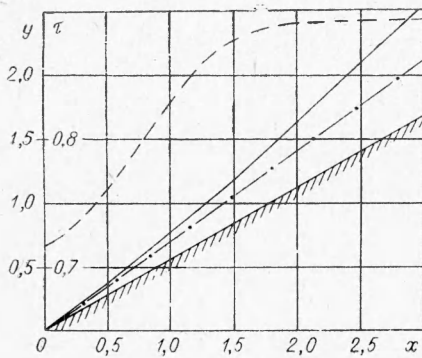


Рис. 1.

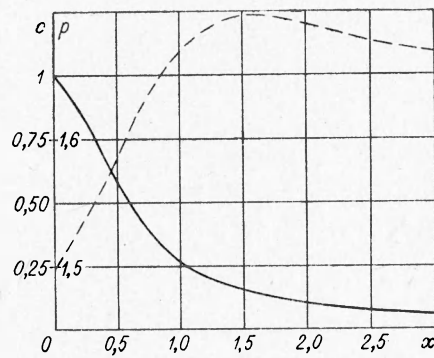


Рис. 2.

На рис. 1 построены контур тела, ударная волна (сплошная линия) и производная $\tau = dy_b/dx$ (штрих). Как видно, ударная волна сначала несколько изменяет свой наклон, а потом снова становится конической, но она направлена круче, чем ударная волна для течения с замороженными реакциями (штрих-пунктир).

Распределение концентрации непрореагировавших молекул c (сплошная линия) и давления (штрих) вдоль поверхности конуса представлено на рис. 2. Процесс горения в первое время идет довольно быстро, а затем концентрация c убывает очень медленно. При этом

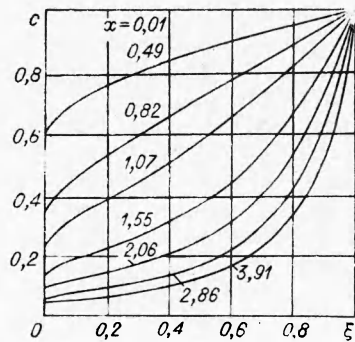


Рис. 3.

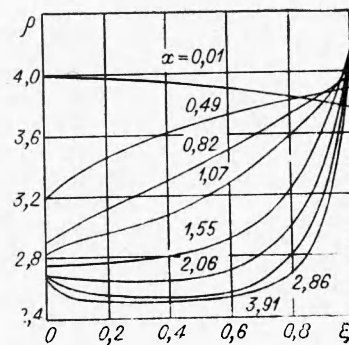


Рис. 4.

