

УДК 532.591; 539.3.371

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОНВЕКТИВНОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ

В. М. Кулик

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kulik@itp.nsc.ru

Определены продольная и поперечная компоненты деформации поверхности плоского слоя вязкоупругого материала, приклеенного к твердому основанию, под действием бегущей волны давления. Податливость покрытия описывается двумя компонентами, соответствующими двум компонентам смещения поверхности. Безразмерные компоненты податливости зависят только от вязкоупругих свойств материала, отношения длины волны к толщине слоя λ/H и отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых колебаний V/C_t^0 . Представлены данные о динамической податливости в диапазонах $0,3 < \lambda/H < 30$ и $0,1 < V/C_t^0 < 10$. Показано, что податливость определяется ее абсолютной величиной и фазовым отставанием деформации от давления. Проанализировано влияние вязких потерь в материале и его сжимаемости на динамическую податливость. Дано объяснение обнаруженному аномальному поведению податливости, когда скорость волны превышает некоторое предельное значение.

Ключевые слова: вынужденные колебания, модуль упругости, коэффициент потерь, коэффициент Пуассона, динамическая податливость.

В данной работе выполнен расчет комплексной податливости слоя вязкоупругого материала толщиной H с коэффициентом Пуассона σ , плотностью ρ и комплексным модулем упругости $E^* = E(1 - i\mu)$ (μ — коэффициент потерь), приклеенного к твердому основанию. Рассмотрен установившийся режим деформации этого покрытия под действием плоской монохроматической волны давления, распространяющейся вдоль оси x со скоростью V .

Смещение частиц среды определяется зависимостью

$$\xi = i\zeta + j\eta = f(y) e^{i\omega(x/V - t)},$$

где ζ , η — компоненты смещения, направленные соответственно вдоль покрытия и перпендикулярно ему.

Общее уравнение движения имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = C_t^2 \Delta \xi + (C_l^2 - C_t^2) \text{grad div } \xi, \quad (1)$$

где $C_l = [E^*(1 - \sigma)/(\rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma))]^{1/2}$ — скорость волны сжатия-растяжения в безграничном пространстве; $C_t = [E^*/(2\rho(1 + \sigma))]^{1/2}$ — скорость сдвиговой волны в безграничном пространстве.

Граничными условиями являются условие отсутствия смещения на твердой стенке

$$\zeta = \eta = 0 \quad \text{при} \quad y = H \quad (2)$$

и условие равенства напряжений на внешней границе

$$C_l^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + (C_l^2 - 2C_t^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{P}{\rho} e^{i\omega(x/V - t)}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (3)$$

Для решения уравнения (1) используем метод разделения смещения на градиентную и роторную части. Введем две скалярные функции Φ и Ψ , такие что

$$\zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Подставляя их в (1), получим уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - C_t^2\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - C_t^2\Delta\Psi = 0,$$

решение которых имеет вид

$$\Phi = \left[A_1 \frac{\text{sh}(\omega\alpha y/V)}{\omega\alpha/V} + B_1 \text{ch}(\omega\alpha y/V) \right] e^{i\omega(x/V-t)},$$

$$\Psi = \left[A_2 \frac{\text{sh}(\omega\beta y/V)}{\omega\beta/V} + B_2 \text{ch}(\omega\beta y/V) \right] e^{i\omega(x/V-t)}.$$

Здесь $\alpha = [1 - (V/C_t)^2]^{1/2}$; $\beta = [1 - (V/C_t)^2]^{1/2}$.

Используя граничные условия (2), (3), получаем систему четырех уравнений для определения A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$A_1 = -\frac{\alpha(1+\beta^2)F}{1+\beta^2-2S} \frac{\lambda P}{4\pi\rho C_t^2}, \quad A_2 = \frac{iS}{1+\beta^2-2S} \frac{\lambda P}{2\pi\rho C_t^2},$$

$$B_1 = -\frac{1}{1+\beta^2-2S} \frac{\lambda^2 P}{4\pi^2\rho C_t^2}, \quad B_2 = \frac{i\alpha F}{1+\beta^2-2S} \frac{\lambda^2 P}{4\pi^2\rho C_t^2}.$$

Здесь

$$S = (\text{ch}(2\pi\alpha H/\lambda) - \alpha\beta DF) / \text{ch}(2\pi\beta H/\lambda),$$

$$F = \frac{\text{sh}(2\pi\alpha H/\lambda) - (\alpha\beta)^{-1} \text{ch}(2\pi\alpha H/\lambda) \text{th}(2\pi\beta H/\lambda)}{\text{ch}(2\pi\beta H/\lambda) - ((1+\beta^2)/2) \text{ch}(2\pi\alpha H/\lambda) - D \text{th}(2\pi\beta H/\lambda)},$$

$$D = \text{sh}(2\pi\beta H/\lambda) - ((1+\beta^2)/(2\alpha\beta)) \text{sh}(2\pi\alpha H/\lambda),$$

$\lambda = 2\pi V/\omega$ — длина волны.

Используя соотношения (4), для компонент смещения поверхности покрытия получим выражения

$$\eta|_{y=0} = \left(A_1 - i \frac{2\pi}{\lambda} B_2 \right) e^{i\omega(x/V-t)}, \quad \zeta|_{y=0} = \left(i \frac{2\pi}{\lambda} B_1 + A_2 \right) e^{i\omega(x/V-t)}.$$

Податливость есть отношение деформации к приложенному давлению. Податливость покрытия имеет две компоненты: перпендикулярную поверхности $C_n = |C_n| e^{i\theta_n}$ и параллельную ей $C_p = |C_p| e^{i\theta_p}$. Здесь $|C_n|$ и $|C_p|$ — модули соответствующих компонент динамической податливости; θ_n, θ_p — фазовые отставания соответствующих компонент смещения поверхности от действующего давления.

Для расчетов и анализа удобно использовать безразмерные комплексы

$$C_n^* = \frac{C_n}{H/E} = \frac{\lambda}{H} \left(\frac{V}{C_t^0} \right)^2 \frac{2(1+\sigma)\alpha F}{4\pi(1-i\mu)^2 [2 - (V/C_t^0)^2 / (1-i\mu) - 2S]},$$

$$C_p^* = \frac{C_p}{H/E} = \frac{\lambda}{H} \frac{2(1+\sigma)(S-1)i}{2\pi [2 - (V/C_t^0)^2 / (1-i\mu) - 2S]},$$

зависящие только от отношения длины волны к толщине покрытия λ/H и отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых возмущений V/C_t^0 в безграничной среде, заполненной материалом с модулем упругости E , не имеющим вязких потерь ($\mu = 0$). Величины C_n^* , C_p^* есть отношения соответствующих компонент динамической податливости покрытия к статической податливости стержня, длина которого значительно больше поперечного размера.

В работах [2, 3] комплексная податливость рассчитана для одномерной модели “локально деформируемого” покрытия. Показано, что зависимость динамической податливости (которая в данном случае содержит одну компоненту) от частоты имеет ряд минимумов и максимумов. Значение первого максимума податливости, находящегося на частоте первого резонанса

$$f_0 = \sqrt{E/\rho}(1 + \mu^2)^{1/4}/(4H),$$

интенсивно уменьшается с ростом коэффициента потерь. Частотная зависимость фазового сдвига между деформацией и давлением изменяется волнообразно с периодом $1/(2f_0)$. С увеличением вязких потерь происходит выравнивание кривых.

На рис. 1 показана зависимость вертикальной компоненты безразмерной податливости от длины волны. При $V/C_t^0 < 1$ (рис. 1, а) все кривые имеют одинаковую куполообразную форму. Безразмерная податливость увеличивается с ростом скорости волны и уменьшается с ростом коэффициента потерь. Расслоение кривых максимально в области резонанса податливости ($\lambda/H = 1 \div 3$). В длинноволновой части спектра ($\lambda/H > 10$) кривые, соответствующие различным значениям V/C_t^0 , сливаются. Тем не менее имеется небольшое различие между кривыми, соответствующими различным значениям μ .

Характер зависимости модуля динамической податливости от длины волны меняется, когда скорость волны становится больше скорости распространения сдвиговых колебаний. При $V/C_t^0 \geq 1,5$ значение λ/H , при котором наблюдается пик безразмерной податливости,

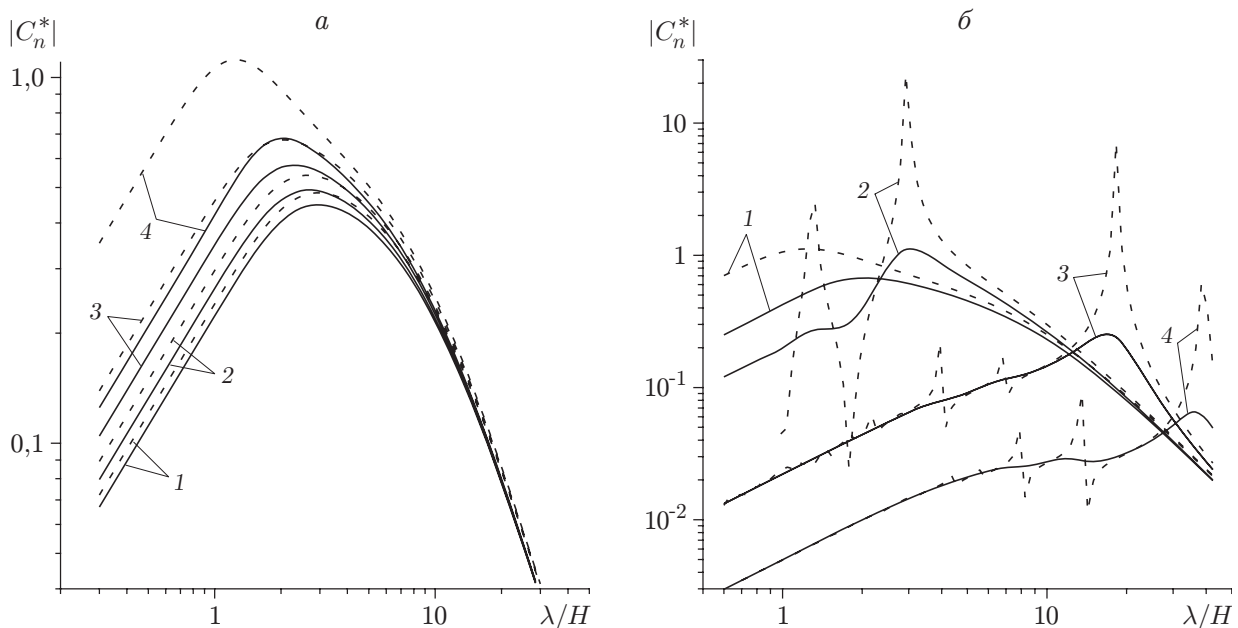


Рис. 1. Зависимость безразмерной податливости от длины волны:

а — $V/C_t^0 < 1$ (1 — $V/C_t^0 = 0,1$; 2 — $V/C_t^0 = 0,5$; 3 — $V/C_t^0 = 0,75$; 4 — $V/C_t^0 = 0,9$);
 б — $V/C_t^0 > 1$ (1 — $V/C_t^0 = 1,2$; 2 — $V/C_t^0 = 1,52$; 3 — $V/C_t^0 = 5$; 4 — $V/C_t^0 = 10$);
 сплошные линии — $\mu = 0,0125$; штриховые — $\mu = 0,4$

увеличивается с ростом скорости волны (кривые 2–4 на рис. 1,б). Максимальное значение податливости достигается при $V/C_t^0 \simeq 1,52$. Пики на кривых податливости резко уменьшаются с ростом вязких потерь. При длинах волн, в несколько раз превышающих длину волны на резонансной частоте, податливость определяется универсальной кривой, вид которой не зависит ни от скорости волны, ни от вязких потерь.

В работе [4] выполнен расчет скорости свободных волн деформаций в слое вязкоупругого материала. Максимальная амплитуда вертикальной компоненты бегущей волны деформации (резонансный пик η/ζ первой моды свободных колебаний) наблюдается при $V/C_t^0 \simeq 1,52$ (линия 1 на рис. 3,б в [4]). При этом $\lambda \simeq 3H$, что хорошо согласуется с результатами данной работы.

В [4] приведены также профили вертикального и горизонтального смещений, характеризующие структуру волны деформации. Показано, что вертикальное смещение на резонансной частоте первой моды свободных колебаний (кривая 1 на рис. 4,а в [4]) плавно увеличивается по толщине покрытия и достигает максимума на внешней границе.

На рис. 1,б при $V/C_t^0 > 1,5$ и длинах волн меньше длины волны на резонансной частоте наблюдаются дополнительные максимумы и минимумы, расположенные слева от наибольшего значения на кривых 2–4. Эти пики возникают на резонансных (или антирезонансных) частотах, при которых по толщине слоя укладывается нечетное (или соответственно четное) число максимумов смещения от положения равновесия. Амплитуда этих пиков уменьшается с ростом кратности резонанса (номера моды) и коэффициента потерь материала покрытия.

Кривые податливости для горизонтального смещения аналогичны. На рис. 2 приведена зависимость отношения модулей вертикальной и горизонтальной податливости $|C_n|/|C_p|$, равного отношению соответствующих амплитуд компонент смещения $|\eta/\zeta|$, от длины волны. При уменьшении скорости волны кривые, соответствующие этой зависимости, сдвигаются в направлении бóльших значений $|\eta/\zeta|$ и меньших длин волн. Для коротких низкоскоростных волн отношение $|C_n|/|C_p|$ может достигать больших значений (например, $|C_n|/|C_p| \simeq 2000$ при $V/C_t^0 = 0,1$ и $\lambda/H \simeq 1,2$). При $\lambda/H > 6$ и $V/C_t^0 > 1,5$ продольные смещения становятся больше поперечных. Увеличение скорости волны и рост потерь в материале приводят к выравниванию значений продольной и поперечной дефор-

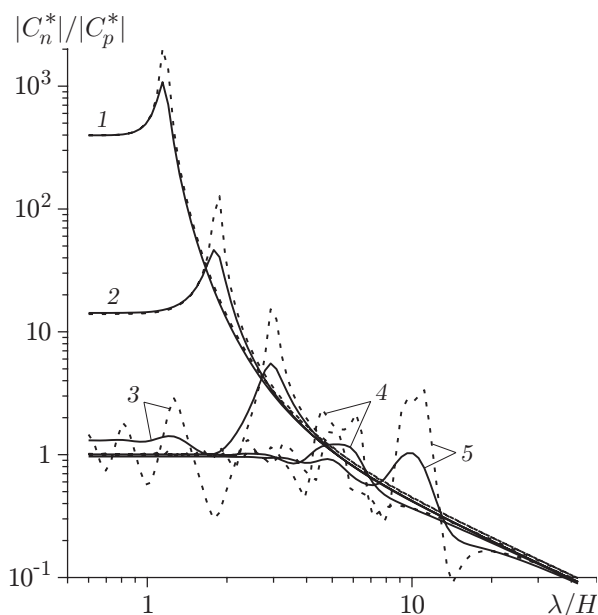


Рис. 2. Зависимость отношения компонент податливости от длины волны: сплошные линии — $\mu = 0,0125$; штриховые — $\mu = 0,4$; 1 — $V/C_t^0 = 0,1$; 2 — $V/C_t^0 = 0,5$; 3 — $V/C_t^0 = 1,52$; 4 — $V/C_t^0 = 5$; 5 — $V/C_t^0 = 10$

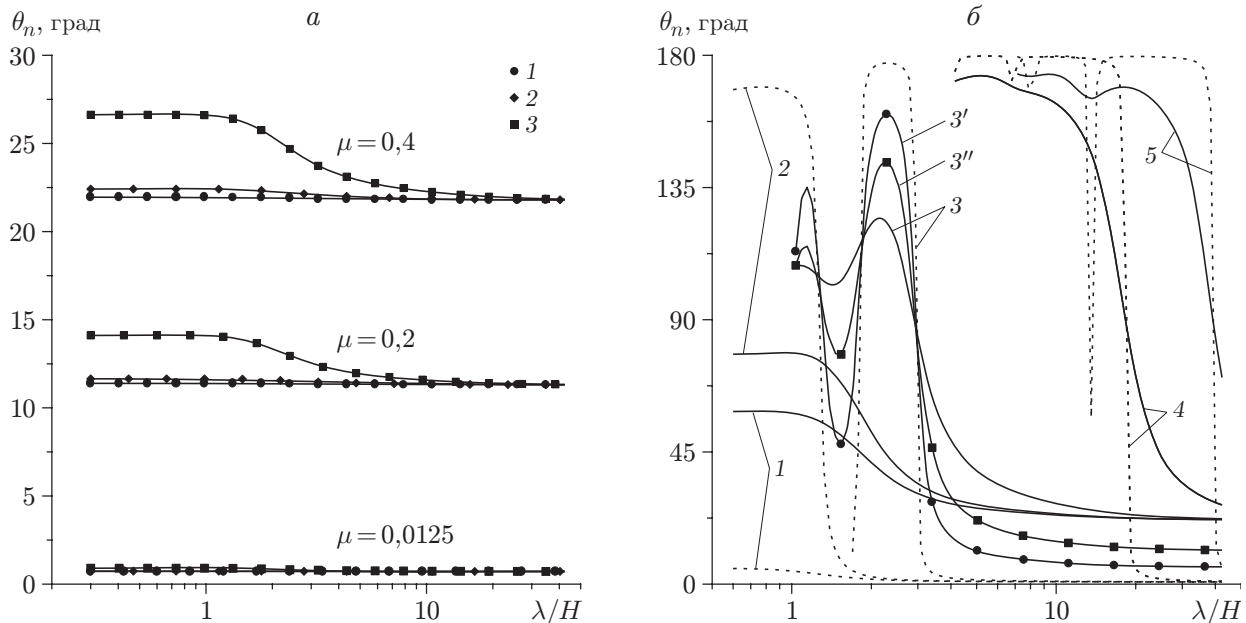


Рис. 3. Фазовое отставание вертикального смещения от давления:

a — $V/C_t^0 \leq 0,5$ (1 — $V/C_t^0 = 0,1$; 2 — $V/C_t^0 = 0,2$; 3 — $V/C_t^0 = 0,5$); b — $V/C_t^0 > 0,5$
 (1 — $V/C_t^0 = 0,9$; 2 — $V/C_t^0 = 1$; 3 — $V/C_t^0 = 1,52$; 4 — $V/C_t^0 = 5$; 5 — $V/C_t^0 = 10$;
 сплошные линии — $\mu = 0,0125$; штриховые — $\mu = 0,4$; 3' — $\mu = 0,1$; 3'' — $\mu = 0,2$)

маций. Влияние коэффициента потерь наиболее значительно в области резонансного пика отношения податливостей.

На рис. 3 показано фазовое отставание вертикального смещения от давления. При $V/C_t^0 \leq 0,5$ (рис. 3, a) фазовый угол в основном определяется коэффициентом потерь и слабо зависит от длины волны и скорости ее распространения. При $V/C_t^0 > 1,5$ (рис. 3, b) фаза изменяется на 180° при переходе через каждый резонанс. С увеличением коэффициента потерь кривые становятся более плавными, при этом в длинноволновой части фаза увеличивается, а в коротковолновой уменьшается.

Сдвиг фаз между вертикальными и продольными колебаниями также имеет различный характер в областях, расположенных ниже и выше основного резонанса покрытия. Так, при $V/C_t^0 \leq 1,5$ (рис. 4, a) с ростом частоты (уменьшением λ) сдвиг фаз изменяется в пределах 180° . При большей скорости волны (рис. 4, b) изменение сдвига фаз на 180° происходит многократно для материалов с малыми потерями. При увеличении коэффициента потерь эти колебания сглаживаются.

На рис. 5 приведены зависимости $\max |C_n^*|$ и λ/H от V/C_t^0 при различных значениях коэффициента потерь. При малой скорости волны (низкой частоте колебаний, так как $f = V/\lambda$) максимальное значение податливости не зависит от частоты (длины волны) и коэффициента потерь. Для резиноподобных материалов с $\sigma = 0,5$ максимальное значение квазиравновесной податливости $|C_n^0| \simeq 0,45H/E$, что почти в два раза меньше податливости стержня при статическом деформировании ($f = 0$) при условии, что длина стержня значительно больше его поперечного размера.

Коэффициент динамичности $K_d = |C_n^*|/|C_n^0|$ является функцией длины волны (частоты) и уменьшается с ростом потерь. Так, при $\mu = 0,05$ максимальное значение $K_d = 19$, а при $\mu = 0,4$ $K_d = 2,5$.

Длина волны, при которой достигается максимальная податливость, слабо зависит от коэффициента потерь (рис. 5, b). Различие возникает в области $0,5 < V/C_t^0 < 1,2$, где

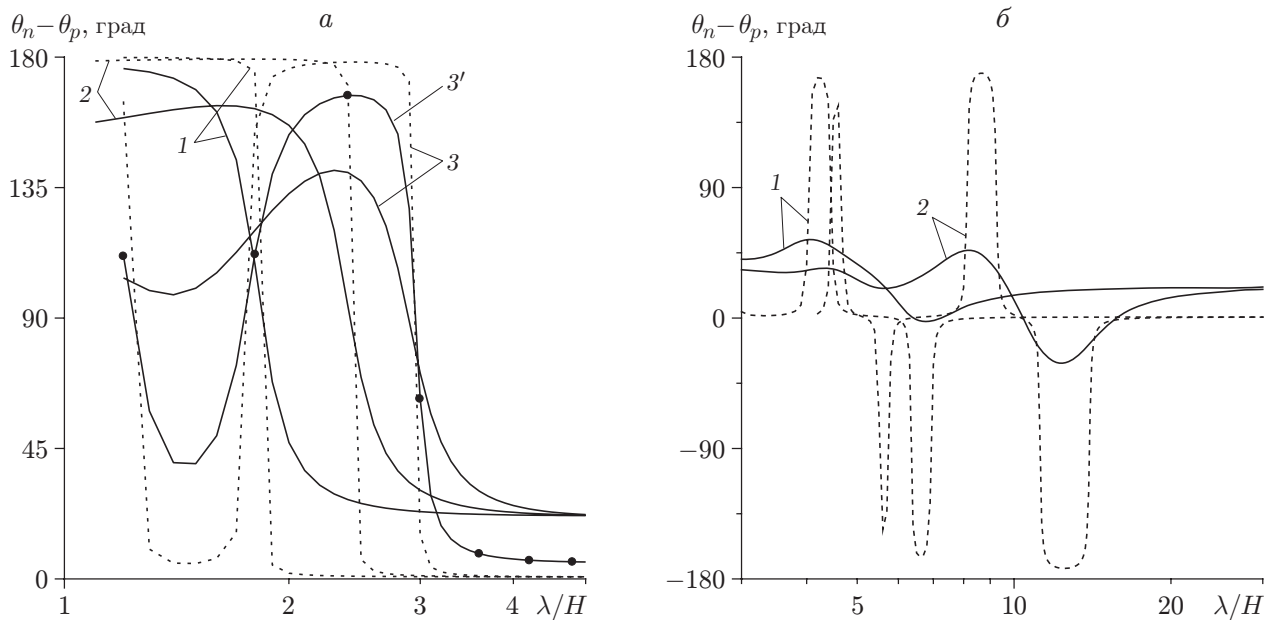


Рис. 4. Фазовый сдвиг между вертикальными и горизонтальными смещениями:
 а — $V/C_t^0 \leq 1,5$ (1 — $V/C_t^0 = 0,5$; 2 — $V/C_t^0 = 1$; 3 — $V/C_t^0 = 1,5$; сплошные линии — $\mu = 0,0125$; штриховые — $\mu = 0,4$; 3' — $\mu = 0,2$); б — $V/C_t^0 > 1,5$ (1 — $V/C_t^0 = 5$; 2 — $V/C_t^0 = 10$; сплошные линии — $\mu = 0,025$; штриховые — $\mu = 0,4$)

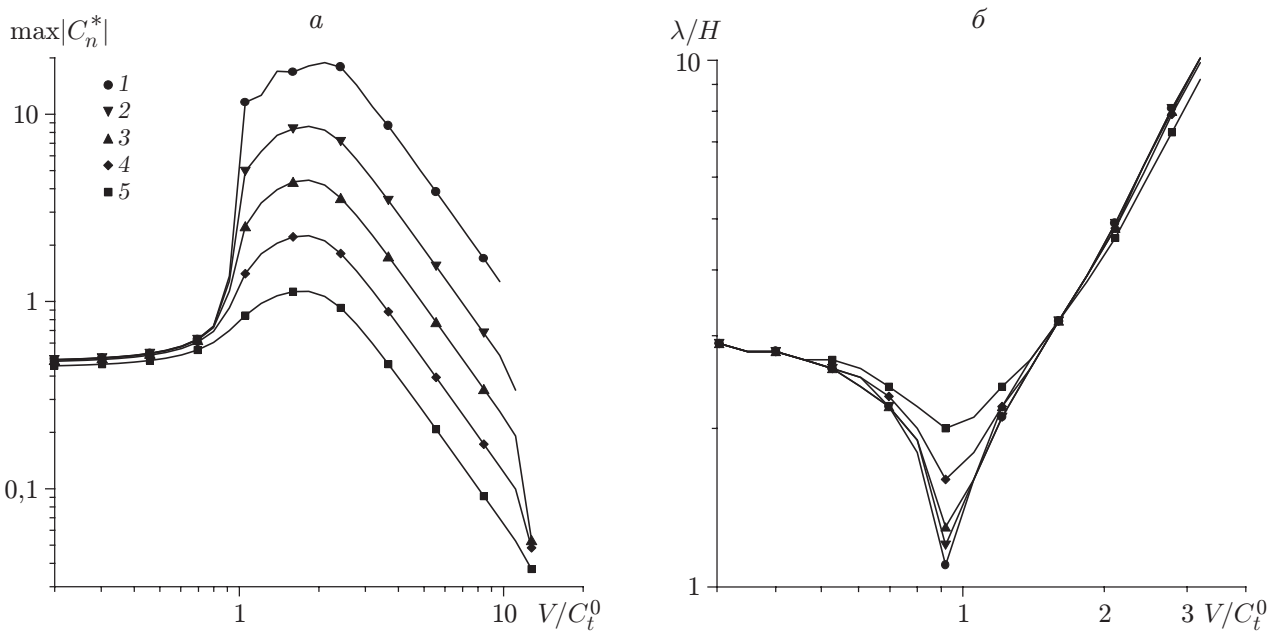


Рис. 5. Зависимости $\max |C_n^*|$ (а) и λ/H (б) от V/C_t^0 при различных значениях коэффициента потерь ($\sigma = 0,5$):
 1 — $\mu = 0,02$; 2 — $\mu = 0,05$; 3 — $\mu = 0,1$; 4 — $\mu = 0,2$; 5 — $\mu = 0,4$

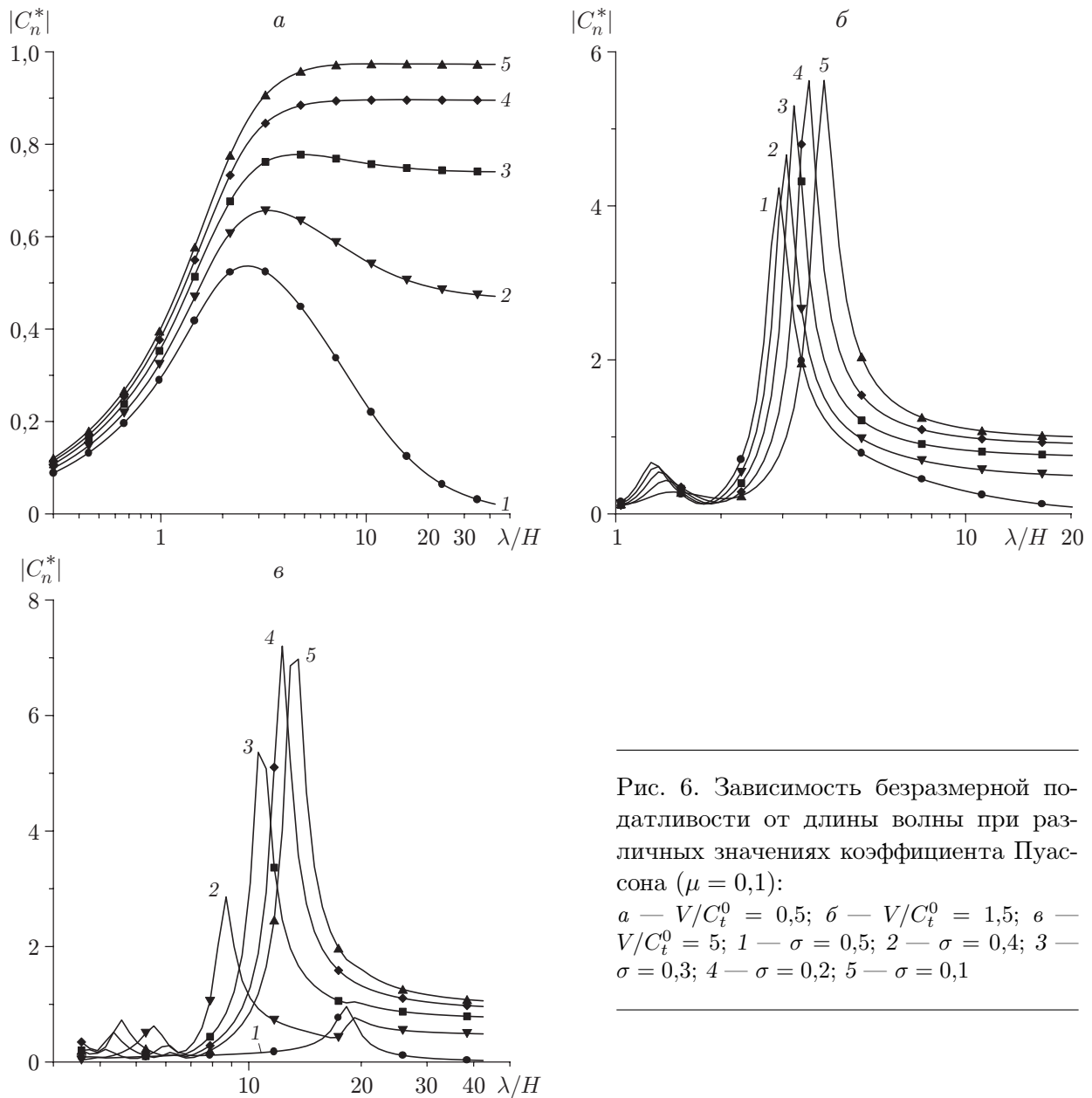


Рис. 6. Зависимость безразмерной податливости от длины волны при различных значениях коэффициента Пуассона ($\mu = 0,1$):

a — $V/C_t^0 = 0,5$; *б* — $V/C_t^0 = 1,5$; *в* — $V/C_t^0 = 5$; 1 — $\sigma = 0,5$; 2 — $\sigma = 0,4$; 3 — $\sigma = 0,3$; 4 — $\sigma = 0,2$; 5 — $\sigma = 0,1$

с уменьшением коэффициента потерь длина волны становится почти в три раза меньше ($\lambda \simeq H$) по сравнению с ее значением в квазиравновесной области. При $V/C_t^0 > 1$ длина волны, при которой податливость максимальна, увеличивается пропорционально скорости.

На рис. 6 представлены данные о максимальной податливости покрытия в вертикальном направлении при $\mu = 0,1$ и различных значениях коэффициента Пуассона. С увеличением сжимаемости среды (с уменьшением коэффициента Пуассона) безразмерная податливость возрастает, что особенно заметно при $\lambda/H > 3$ (рис. 6, *a*). Условие резонанса $\lambda/H \simeq 3$ для $V/C_t^0 < 1$ справедливо только при небольших сжимаемостях. Так, кривая 2 имеет слабовыраженный резонансный характер, а кривые 4, 5 при $\lambda/H > 5$ выходят на горизонтальную асимптоту.

Характер кривых податливости меняется, когда скорость волны становится больше предельного значения, определяемого соотношением

$$\frac{V}{C_t^0} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}}. \quad (5)$$

При $V/C_t^0 = 1,5$ скорость волны еще недостаточна для выполнения условия (5) в указанном диапазоне значений σ . На рис. 6, б с уменьшением σ пик податливости сдвигается в направлении бóльших значений длин волн.

На рис. 6, в для кривых 2–5 скорость превышает предельное значение, определяемое условием (5). Как и на рис. 6, б, с уменьшением σ максимумы этих кривых увеличиваются и сдвигаются в направлении бóльших значений длин волн. В отличие от рис. 6, б максимумы кривых расположены левее максимума кривой 1. Это объясняется тем, что при $\sigma \neq 0,5$ кривая зависимости скорости волны от частоты претерпевает разрыв и сдвигается в направлении бóльших частот (меньших длин волн), когда скорость волны становится больше, чем при выполнении условия (5) (см. рис. 1 в [4]).

В работах [5, 6] предложен метод измерения вертикальной компоненты комплексной податливости вязкоупругих покрытий и приведены результаты измерений. В дальнейшем результаты экспериментального измерения податливости необходимо сравнить с результатами расчета по формулам, приведенным в настоящей работе, с учетом измеренных вязкоупругих свойств материала.

Из результатов, полученных в данной работе, следует, что податливость вязкоупругого покрытия зависит не только от частоты, но и от длины волны давления. Показано, что значение продольной деформации при определенных условиях может быть достаточно большим и даже превышать значение вертикальной деформации. Сказанное выше должно учитываться при объяснении механизма снижения трения наличием податливых покрытий в турбулентном течении, определяемом корреляцией продольных и вертикальных возмущений, вносимых покрытием в пристенную область течения. Поэтому весьма существенны также фазовые соотношения между этими возмущениями. Податливые покрытия, изготовленные из материала с коэффициентом Пуассона $\sigma \neq 0,5$ (например, из поролон), представляются наиболее эффективными, поскольку имеют бóльшую податливость при низких скоростях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
2. Семенов Б. Н. Анализ деформационных характеристик вязкоупругих облицовок // Гидродинамика и акустика пристенных и свободных течений / Под ред. Б. П. Миронова. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1981. С. 57–76.
3. Semenov B. N. Analysis of four types of viscoelastic coatings for turbulent drag reduction // Emerging techniques in drag reduction. L. etc.: S. n., 1996. P. 187–206.
4. Кулик В. М. Плоская волна деформации в изотропном слое вязкоупругого материала // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 3. С. 104–111.
5. Кулик В. М., Родякин С. В. Измерение комплексной податливости покрытий из эластичных материалов // Инж.-физ. журн. 2002. Т. 75, № 2. С. 108–111.
6. Kulik V. M., Rodaykin S. V., Lee I., Chun H. H. Deformation of a viscoelastic coating under the action of convective pressure fluctuations // Exp. Fluids. 2005. V. 38, N 5. P. 648–655.

Поступила в редакцию 1/II 2006 г.,
в окончательном варианте — 24/IV 2006 г.