РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ ПО СХЕМЕ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

М. И. Хайкин (Казань)

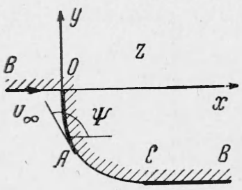
Ниже показано, как в простейшем случае можно применить методику Лере [1] для доказательства разрешимости задачи о кавитационном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью симметричной гладкой дуги по схеме Жуковского — Рошко [2] в неограниченном потоке и в полосе. Проблема единственности решения здесь не рассматривается.

1. Схема течения ясна из чертежей (фиг. 1,2; изображена нижняя половина течения, OA — препятствие, AC — свободная струя). Выведем интегральные уравнения задач. В качестве вспомогательной плоскости выберем плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, в которой нижней половине течения соответствует четверть единичного круга, лежащая в первом квадранте, причем дуге OA соответствует дуга

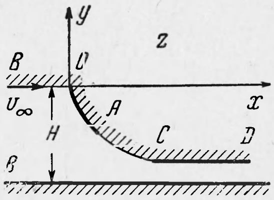
$$\zeta = e^{is} \quad (0 \leqslant s \leqslant {}^1/_2\pi)$$

а свободной линии — отрезок

$$\zeta = \xi \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Комплексный потенциал w выражается через ζ так:

в случае неограниченного потока

$$w = a\,\frac{(1+\zeta^2)^2}{4\zeta^2 + b^2(1-\zeta^2)^2} \tag{1}$$

Здесь $a > 0$ и b $(0 < b < 1)$ — неизвестные параметры $(b = 2\beta \,/\, (1 + \beta^2)$, где $i\beta$ — образ в плоскости ζ бесконечно удаленной точки B

в случае течения в полосе

$$w = \frac{HV_\infty}{\pi}\ln\frac{(1-d^2)(4\zeta^2 + b^2(1-\zeta^2)^2)}{(1-b^2)(4\zeta^2 + d^2(1-\zeta^2)^2)} \qquad \left(b = \frac{2\beta}{1+\beta^2},\quad d = \frac{2\delta}{1+\delta^2}\right) \tag{2}$$

Здесь H — половина ширины полосы, V_∞ — скорость набегающего потока, b и d $(0 < d < b < 1)$ — неизвестные параметры, $i\beta$ и $i\delta$ — образы в плоскости ζ бесконечно удаленных точек B и D.

Через l обозначим дуговую абсциссу точек препятствия OA (в точке O имеем $l = 0$, в точке отрыва струи $l = -l_0$); угол между касательной к препятствию и осью x обозначим Ψ. Функция $\Psi\{l\}$ $(l_0 \leqslant l \leqslant 0)$ известна.

Если предположить известным соответствие $l = l(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant {}^1/_2\pi)$, возникающее при конформном отображении четверти круга на нижнюю половину течения, то для функции

$$\omega(\zeta) = i\ln dw\,/\,dz, \qquad \mathrm{Re}\,\omega(0) = (0) \tag{3}$$

хорошо известным способом (например [2]) получается представление (V_0 — скорость на свободной линии)

$$\omega(\zeta) = i\ln V_0 + i\ln\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta} + \Omega(\zeta) \qquad (\Omega(\zeta) = \theta + iT) \tag{4}$$

Функция $\Omega(\zeta)$ непрерывна в замкнутой четверти круга и удовлетворяет граничным условиям

$$T(\xi) = 0 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

$$\theta(i\eta) = 0 \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1), \qquad \theta(e^{is}) = \Psi(l(s)\} - {}^1/_2\pi \quad (0 \leqslant s \leqslant {}^1/_2\pi) \tag{5}$$

Отсюда

$$\Omega(\zeta) = \frac{4\zeta(1-\zeta^2)}{\pi}\int\limits_0^{{}^1/_2\pi}\frac{[\Psi\{l(s)\} - {}^1/_2\pi]\cos s}{(1+\zeta^2)^2 - 4\zeta^2\cos^2 s}\,ds \tag{6}$$

Зная $\omega(\zeta)$, при помощи (3) и (1) или (2) легко найти $dz\,/\,d\zeta$. Граничные значения модуля этой функции при $\zeta = e^{is}$ $(0 \leqslant s \leqslant {}^1/_2\pi)$ есть $dl\,/\,ds$.

Таким образом, получается уравнение относительно функции $l(s)$

$$\frac{dl}{ds} = fe^{-T} \sin s \qquad (0 \leqslant s \leqslant {}^1/_2\pi), \qquad l({}^1/_2\pi) = 0 \tag{7}$$

Здесь T — значение мнимой части функции (6) при $\zeta = e^{is}$ $(0 \leqslant s \leqslant {}^1/_2\pi)$

$$T = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{{}^1/_2\pi} \left[\Psi\{l(\sigma)\} - \frac{\pi}{2} \right] \frac{\sin s \cos \sigma}{\cos^2 \sigma - \cos^2 s} d\sigma \tag{8}$$

В случае течения в неограниченном потоке

$$f = f(s; a, b) = \frac{2a(1 - b^2)}{V_0} \frac{1 + \sin s}{(1 - b^2 \sin^2 s)^2} \tag{9}$$

В случае течения в полосе

$$f = f(s, b, d) = \frac{2HV_\infty}{\pi V_0}(b^2 - d^2) \frac{1 + \sin s}{(1 - b^2 \sin^2 s)(1 - d^2 \sin^2 s)} \tag{10}$$

Для определения неизвестных параметров (a, b или b, d) служат дополнительные условия:

известна скорость набегающего потока

$$\omega(i\beta) = i \ln V_\infty \tag{11}$$

задана длина обтекаемой дуги

$$l(0) = -l_0 \tag{12}$$

2. Будем предполагать, что обтекаемая дуга такова, что

(а) $\quad \Psi\{0\} = {}^1/_2\pi, \qquad |\Psi\{l\} - {}^1/_2\pi| \leqslant {}^1/_2 p\pi \qquad (p < 1)$

(б) $\quad$ функция $\Psi\{l\}$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Продолжим каким-нибудь способом $\Psi\{l\}$ на всю ось $-\infty < l < +\infty$ так, чтобы выполнялись условия (а) и (б).

В статье [3] доказана следующая теорема существования решения для уравнений типа (7).

Теорема 1. Пусть в уравнении (7) функция T определяется формулой (8), функция $\Psi\{l\}$ $(-\infty < l < +\infty)$ удовлетворяет условиям (а) и (б), а функция $f = f(s; \lambda, \mu)$ $(0 \leqslant s \leqslant {}^1/_2\pi,\ \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2,\ \mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2)$ — непрерывная. Параметры [1] λ, μ ищутся вместе с $l(s)$, для чего задаются два дополнительных условия, связывающих $\Psi\{l(s)\}$, λ и μ. Пусть эти условия таковы, что для произвольной функции $l(s)$, удовлетворяющей условию Гёльдера, они определяют λ и μ на отрезках $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\mu_1, \mu_2]$ единственным образом, причем так найденные значения параметров непрерывно зависят от $l(s)$: при малом изменении $\max|l(s)|$ и постоянной Гёльдера $l(s)$ значения параметров мало меняются. Тогда уравнение (7) имеет решение.

Доказательство этой теоремы, в основном воспроизводящее рассуждения Лере [1], состоит, вкратце, в следующем. Уравнение рассматривается в пространстве E_ν функций, обращающихся в нуль при $s = {}^1/_2\pi$ и удовлетворяющих условию Гёльдера [2]

$$\sup_{0 \leqslant s_1, s_2 \leqslant {}^1/_2\pi} \frac{|l(s_1) - l(s_2)|}{|\cos s_1 - \cos s_2|^\nu} = C_l < \infty$$

с обычным образом введенной нормой $\|l(s)\| = \max|l(s)| + C_l$. Показатель ν выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$0 < \nu < 1 - p \tag{13}$$

Уравнение (7) рассматривается как задача о неподвижной точке оператора A, действующего по формуле

$$L(s) = Al(s) = -\int\limits_s^{{}^1/_2\pi} f(s, \lambda, \mu) e^{-T} \sin s ds \tag{14}$$

где T подсчитывается при помощи (8), а λ и μ находятся по $l(s)$ из дополнительных условий.

---

[1] Число их может быть, разумеется, любым. Количество дополнительных условий совпадает с числом параметров.

[2] Уравнения вида (7) изучались и в других пространствах [4,5], но для наших целей удобнее всего пространство E_ν, рассматривавшееся Лере.

Вводится также оператор $X\ [l\ (s),\ t]$, получающийся из A заменой везде функции $\Psi\ \{l\}$ на функцию

$$t\Psi\ \{l\} + {}^1/_2\,(1-t)\,\pi \tag{15}$$

При $t = 1$ этот оператор превращается в A, а при $t = 0$ — в оператор, переводящий все пространство E_ν в одну функцию.

В силу принципа неподвижной точки Лере — Шаудера [6], уравнение (7) имеет решение, если оператор X вполне непрерывен на топологическом произведении E_ν на отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$, и решения уравнения $l\ (s) = X\ \{l\ (s);\ t\}$ ограничены в совокупности по норме E_ν.

Полная непрерывность X легко проверяется. Ограниченность множества решений показывается следующим образом.

Очевидно, в силу нормировки $l\ ({}^1/_2\pi) = 0$ достаточно доказать неравенство

$$|\, l\ (s_1) - l\ (s_2)\, | \leqslant C\, |\cos s_1 - \cos s_2\,|^\nu \qquad (0 \leqslant s_1,\ s_2 \leqslant {}^1/_2\,\pi)$$

где C — одно и то же для всех решений. По неравенству Гёльдера

$$|\, l\ (s_1) - l\ (s_2\, | \leqslant \left| \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{dl}{d\cos s} \right|^{1/(1-\nu)} ds \right|^{1-\nu} |\cos s_1 - \cos s_2\,|^\nu$$

Используя (7), получаем, что достаточно показать ограниченность интегралов

$$\int_0^{{}^1/_2\,\pi} \exp \frac{-T}{1-\nu}\, ds \tag{16}$$

где T подсчитывается по формуле (8), в которой $\Psi\ \{l\}$ заменена на функцию (15).

Функция $\Omega\ (\zeta)$ продолжима по принципу симметрии на весь единичный круг. По теореме о среднем

$$\int_0^{2\pi} \exp \frac{-T}{1-\nu} \cos \frac{\theta}{1-\nu}\, ds = 2\pi$$

Отсюда, в силу (5),

$$\int_0^{\pi} \exp \frac{-T}{1-\nu} \cos \frac{\Psi\ \{l\ (s)\} - {}^1/_2\,\pi}{1-\nu}\, ds = \pi$$

Учитывая условие (a), наложенное на $\Psi\ \{l\}$, и выбор числа ν (13), получаем, что

$$\left| \frac{\Psi - {}^1/_2\,\pi}{1-\nu} \right| \leqslant \frac{p}{1-\nu}\,\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Отсюда легко получается оценка для интеграла (16), зависящая только от p и ν. Остается лишь заметить, что если $\Psi\ \{l\}$ удовлетворяет условию (a), то этому условию удовлетворяет и функция (15) при любом t.

3. Теорема 1 позволяет уже элементарными рассуждениями получать теоремы существования для различных задач теории струй и более общих задач, где скорость на неизвестных частях границы области течения переменна [3].

Проверим выполнение условий теоремы в случае задачи обтекания по схеме с параллельными стенками в неограниченном потоке.

Дополнительные условия (11) и (12) в этом случае можно записать следующим образом:

условие (11), учитывая (4) и (6), в виде

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{{}^1/_2\,\pi} [\pi - \Psi\ \{l\ (s)\}]\, \frac{b\cos s}{1 - b^2 \sin^2 s}\, ds = \ln \frac{V_0}{V_\infty} \tag{17}$$

условие (12), в силу (7) и (9), в виде

$$\frac{2a\,(1-b^2)}{V_0} \int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{(1+\sin s)\sin s}{(1 - b^2\sin^2 s)^2}\, e^{-T}\, ds = l_0 \tag{18}$$

Для произвольной функции $l\ (s)$, удовлетворяющей условию Гёльдера, эти два равенства единственным образом определяют значения параметров a и b. В самом деле, из условия (a), наложенного на функцию $\Psi\ \{l\}$, нетрудно получить, что при изменении b от 0 до 1 левая часть равенства (17) монотонно растет от нуля до бесконечности. Поэтому при любых фиксированных V_0, V_∞ $(V_0 \geqslant V_\infty)$ и $l\ (s)$ равенство (17) как уравнение относительно b имеет единственное решение. После того как b найдено, a находится из (18).

Без труда проверяется непрерывная зависимость a и b от $l(s)$.

Покажем теперь, что существуют не зависящие от $l(s)$ оценки $b \leqslant b_0 < 1$, $a \leqslant a_0$ для значений a и b, находимых из (17) и (18). Из условия (а) следует, что левая часть равенства (17) при любом b не меньше чем $^1/_2 (1-p) \ln (1+b)/(1-b)$, так что в качестве b_0 можно взять корень уравнения

$$\frac{1-p}{2} \ln \frac{1+b_0}{1-b_0} = \ln \frac{V_0}{V_\infty}$$

Вторая оценка может быть получена следующим образом. Нетрудно проверить, что

$$\int_0^{^1/_2\pi} T \sin sds = \int_0^{^1/_2\pi} \left[\Psi\{l(s)\} - \frac{\pi}{2}\right] \cos sds$$

так что

$$\left| \int_0^{^1/_2\pi} T \sin sds \right| \leqslant p \frac{\pi}{2}$$

Имеет место неравенство (являющееся следствием того факта, что график функции $y = e^x$ обращен выпуклостью вниз)

$$\int_0^{^1/_2\pi} e^{-T} \sin sds > \exp\left(- \int_0^{^1/_2\pi} T \sin sds\right)$$

Из (18) теперь получается требуемая оценка; при этом

$$a_0 = \frac{l_0 V_0 \exp(^1/_2 p\pi)}{2(1-b_0^2)}$$

Остается заметить, что при $0 \leqslant s \leqslant {^1/_2}\pi$, $0 \leqslant b \leqslant b_0$, $0 \leqslant a \leqslant a_0$ функция (9) непрерывна. Получен следующий результат.

Теорема 2. Задача обтекания по схеме Жуковского — Рошко симметричного препятствия, удовлетворяющего условиям (а), (б), разрешима при любом положительном числе кавитации.

В случае обтекания в полосе дополнительные условия (11) и (12) в развернутой форме имеют вид (17) и

$$\frac{2HV_\infty}{\pi V_0}(b^2 - d^2) \int_0^{^1/_2\pi} \frac{(1+\sin s)\sin s}{(1-b^2\sin^2 s)(1-d^2\sin^2 s)} e^{-T} ds = l_0 \tag{19}$$

Если $l(s)$ задано, то b единственным образом находится из (17) (при этом $b \leqslant b_0$, где b_0 имеет то же значение, что и ранее). Левая часть (19) при d, меняющемся от 0 до b, монотонно убывает от некоторого значения (зависящего от $l(s)$) до нуля. Поэтому равенство (19), рассматриваемое как уравнение относительно d, имеет не больше одного решения. Но оно может оказаться неразрешимым. В последнем случае условимся считать значение d равным нулю. Нетрудно проверить, что так определенный параметр d непрерывным образом зависит от $l(s)$. Функция (10) при $0 \leqslant s \leqslant {^1/_2}\pi$, $0 \leqslant d \leqslant b \leqslant b_0$ непрерывна.

Заметим, что в случае $d = 0$ уравнение (7) превращается в уравнение обтекания по классической схеме Кирхгофа. Поэтому применение теоремы 1 дает следующую теорему.

Теорема 3. Рассматривается симметричное течение в полосе, причем обтекаемая дуга удовлетворяет условиям (а), (б). Тогда для любого положительного числа кавитации разрешима, по крайней мере, одна из задач: (1) обтекание по схеме Жуковского — Рошко с отрывом в концах дуги; (2) обтекание по схеме Кирхгофа с отрывом в концах или во внутренних точках дуги.

Вопрос о выполнении условий Бриллуэна (например [2]) здесь не рассматривается.

Допустим, что препятствие обладает следующим естественным свойством: при обтекании по схеме Кирхгофа с отрывом струй во внутренних точках более позднему отрыву соответствует большее число кавитации. Тогда теорема 3 приобретает такую форму.

Теорема 3'. Рассматривается симметричное течение в полосе, причем обтекаемая дуга удовлетворяет условиям (а), (б). Пусть Q_0 — число кавитации, соответствующее обтеканию по схеме Кирхгофа (с отрывом струй в концах дуги). Тогда задача обтекания этой дуги по схеме Жуковского — Рошко (с отрывом струй в концах дуги) имеет решение при любых числах кавитации, бо́льших Q_0.

Заметим, что совершенно такой же результат верен для обтекания по схеме Рябушинского [3].

Легко обобщить полученные теоремы на случай обтекания симметричного клина с криволинейными щеками (см. [7]).

Поступила 21 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

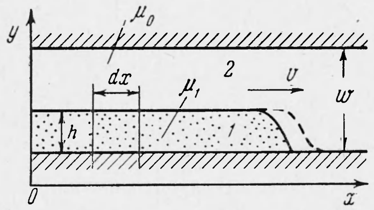
1. L e r a y J. Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues. Comm. Math. Helv., 1935—36. vol. 8. No. 2—3.
2. Г у р е в и ч М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
3. Х а й к и н М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1961, вып. 64.
4. S e r r i n J. Existence theorems for some free boundary problems. J. Rat. Mec. and Anal., 1952, vol. 1, No. 1.
5. B i r k h o f f G., Z a n a n t o n e l l o E. H. Jets, Wakes and Cavities. New York, 1957.
6. Л е р е й Ж., Ш а у д е р Ю. Топология и функциональные уравнения. Успехи матем. наук, 1946, т. 1, № 3—4.
7. Х а й к и н М. И. О разрешимости обратной смешанной краевой задачи. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1962, вып. 68.

О ДВИЖЕНИИ СУСПЕНЗИЙ В УЗКИХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЩЕЛЯХ

И. Ф. Белова, Ю. В. Желтов, Ю. П. Желтов

(*Москва*)

Задача о движении грубодисперсных суспензий в горизонтальных трещинах (щелях) возникла в связи с разработкой технологии гидравлического разрыва нефтяного пласта [1–3]. При осуществлении этого метода появляется необходимость закачки в трещины, образующиеся в горных породах, смеси жидкости с твердым зернистым материалом, служащим закрепляющим агентом. В качестве зернистого материала наиболее часто применяется крупнозернистый (0.6—0.8 *мм*) песок, а в качестве жидкой фазы — вязкие жидкости (нефть, мазут, дизельное топливо, сульфит-спиртовая барда и т. п.).



Фиг. 1

Установившееся движение таких суспензий в щелях с непроницаемыми стенками изучалось в работах [4–6]. Ниже исследуется неустановившееся движение этих смесей в горизонтальных трещинах с непроницаемыми стенками.

Изложенный метод, основанный на аналогии [7] между механизмами фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде и движения смеси песка с жидкостью в щели, дает возможность определить основные технологические параметры закрепления трещин песком при проектировании операций гидроразрыва. Задаваемыми и регулируемыми параметрами в этом процессе являются концентрация твердой фазы в смеси и расход жидкости. Расчетные схемы подобного характера можно использовать в других отраслях техники, процессы которых связаны с движением суспензий, например, в гидротранспорте, в строительстве каналов и т. д.

§ 1. **Аналогия движения смеси жидкости с песком в щели и фильтрации несмешивающихся жидкостей.** Рассмотрим вначале механизм заполнения песком, взвешенным в вязкой жидкости, плоской горизонтальной щели (фиг. 1). В работе [4] было показано, что механизм перемещения песка в горизонтальной трещине можно описывать схемой послойного движения двух жидкостей с различной вязкостью. Эта возможность реализуется, если считать, что вязкость основной несущей жидкости равна μ_0, а вязкость смеси жидкости с песком μ_1 определяется соотношением

$$\mu_1 = \mu_0 e^{3.18c} \qquad (1.1)$$

Здесь c — объемная концентрация твердой фазы в смеси.