УДК 532.135

# ПОИСК СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПУАЗЕЙЛЕВСКОГО ТИПА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ СТЕНКАМИ

$\boxed{\text{А. М. Блохин}}$, Р. Е. Семенко

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: blokhin@math.nsc.ru, r.semenko@g.nsu.ru

Рассмотрена задача о течении вязкоупругой жидкости в плоском канале с проницаемыми стенками и с постоянным расходом через стенки. Задача сформулирована с использованием уравнений модифицированной мезоскопической модели Виноградова — Покровского. Для случая наличия потока через стенки предложен способ постановки краевых условий, обеспечивающий согласованность полученного решения с решениями без учета потока. Рассмотрен вычислительный алгоритм поиска решений как при наличии потока через стенки, так и при его отсутствии.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, течение Пуазейля, стационарные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20220105

**Введение.** Растворы и расплавы полимерных материалов вследствие своей практической значимости представляют интерес с точки зрения математического моделирования. Однако в силу сложной вязкоупругой структуры таких жидкостей существенно затруднено как построение моделей, так и их апробация и исследование математических свойств полученных уравнений. Полимерные жидкости, состоящие из длинных макромолекул, сложным образом взаимодействующих друг с другом при сдвиговых течениях, обладают памятью деформаций, псевдопластичностью (изменение вязкости жидкости в зависимости от скорости сдвига) и пространственной анизотропией. Для учета такой молекулярной динамики в моделях вводится значительное количество предположений и обобщений, касающихся механики межмолекулярного взаимодействия, но не всегда имеющих четкое физическое обоснование. Вследствие этого предложено большое количество различных реологических моделей, различающихся подходами и как следствие полученными соотношениями и свойствами. В рамках таких моделей даже геометрически простые течения имеют особенности, часто уникальные и требующие тщательного анализа.

Сложность динамики макромолекулярных структур и невозможность учесть все ее особенности в рамках одной модели не позволяют построить универсальную модель жидких полимеров. Такие модели основаны на реологическом определяющем соотношении,

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН (код проекта 0314-2019-0013).

связывающем внутренние напряжения и градиент скоростей. Форма этого соотношения зависит от принятых для его получения обобщающих предположений и от используемой модели. Среди наиболее важных и распространенных в настоящее время отметим две модели, в которых используются полярные подходы: 1) верхняя конвективная модель Олдройда [1], использующая феноменологический подход, при котором соотношения модели находятся путем подбора закономерностей, аппроксимирующих известные экспериментальные данные; 2) модель рептаций Доя — Эдвардса [2], в которой определяющее соотношение выводится из стохастических уравнений динамики отдельных молекул с осреднением их решений. Помимо этих наиболее изученных моделей существует большое количество моделей, в том числе более современных, уточняющих или обобщающих данные модели, в частности, мезоскопическая модель Виноградова — Покровского [3, 4], объединяющая два указанных выше подхода: определяющее соотношение модели выводится путем осреднения решений уравнений динамики одной макромолекулы в вязкой анизотропной среде, описываемой рядом феноменологических соотношений и параметров. Модификация этой модели используется в настоящей работе.

Одним из классических течений вязкой жидкости является стационарное течение в прямом цилиндрическом или плоском канале — течение Пуазейля. Этот достаточно простой тип течения представляет интерес с практической точки зрения, поскольку изучение течения расплавов полимеров по трубам имеет большое значение для производства полимерных материалов, разработки аддитивных технологий и т. д. Подобные течения изучались в рамках большого количества реологических моделей, в ряде работ рассматривались вопросы о существовании стационарных течений пуазейлевского типа, их устойчивости, обсуждались постановки краевых условий в рамках различных моделей, в том числе указанных выше [5–7]. Однако для модели Виноградова — Покровского эти вопросы исследованы недостаточно. Так, авторами данной работы подобные стационарные течения рассматривались в [8, 9], где приведены примеры течений, полученных численно при различных значениях параметров задачи.

В настоящей работе рассматривается течение, аналогичное двумерному течению Пуазейля в плоском канале, но в предположении, что в стенках канала имеются отверстия, через которые прокачивается жидкость. Для такого течения формулируется задача в рамках используемой модели, исследуются существование стационарных решений и метод их получения. Это обусловлено следующими факторами. Во-первых, контроль за вкачиванием (откачиванием) жидкости через отверстия может служить дополнительным инструментом для управления потоком жидкого полимера, представляющим практический интерес. Поскольку подобная схема контроля потока применяется в аэродинамических трубах, рассматривается аналогичный механизм контроля течения полимерного материала в каналах печатающих аддитивных устройств. Во-вторых, в рамках рассматриваемой модели при непротекании жидкости через стенки канала имеет место стационарная задача, в которой дифференциальные уравнения частично вырождаются. При определенных условиях из этого следует неединственность решения задачи. Решение задачи с малым потоком жидкости через стенки позволяет выделить физически более правдоподобное решение. Наконец, постановка задачи в вырожденном случае при отсутствии отверстий в стенках не требует задания краевых условий для ряда искомых функций, тогда как для случая с отверстиями, даже малыми, такие условия необходимы.

**1. Модель гидродинамики несжимаемой полимерной жидкости.** Сформулируем задачу, описывающую течение несжимаемой полимерной жидкости в плоском канале с перфорированными стенками с использованием модифицированной модели Виноградова — Покровского [3, 4] (рис. 1). Пусть $l$ — характерная длина в задаче (ширина канала), $u_H$ — характерная скорость, $\rho = \mathrm{const}$ — плотность жидкости, $\boldsymbol{u} = (u, v)$ — вектор скоро-

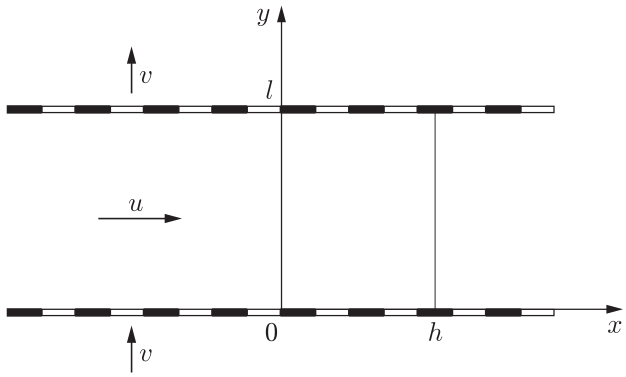


Рис. 1. Схема течения в плоском канале

сти жидкости в декартовой системе координат $(x, y)$, $t$ — время, $p$ — давление. Величины приводятся в безразмерном виде: время отнесено к $l/u_H$, расстояние — к $l$, скорость — к $u_H$, давление — к $\rho u_H^2$. В этих обозначениях уравнение неразрывности модели имеет стандартный вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = u_x + v_y = 0. \tag{1}$$

Сформулируем закон сохранения импульса для используемой модели. Как и в случае вязкой ньютоновской жидкости, выражение для потока импульса должно содержать члены, описывающие необратимый перенос импульса между областями, в которых скорость течения различна. В случае вязкоупругих жидкостей этот перенос имеет нелокальный характер. Иными словами, внутренние напряжения вязкоупругой системы зависят не только от поля скоростей в данный момент времени, но и от характера течения. Зависимость между полем скоростей жидкости в момент времени $t_0$ и напряжениями среды в момент $t_1 > t_0$ ослабевает со временем и в случае простых течений с постоянным сдвигом характеризуется величиной $\mathrm{e}^{-(t_1-t_0)/\tau}$, где $\tau$ — время релаксации. Соответственно, соотношение между тензором напряжений и тензором градиента скоростей не может быть представлено в виде локального алгебраического уравнения, подобного используемому в уравнении Навье — Стокса. Для формулировки этого соотношения необходимы дополнительные дифференциальные уравнения. Приведем уравнение для закона сохранения импульса в общем виде

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \nabla p = \operatorname{div} \Pi, \tag{2}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u}, \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

В правой части уравнения содержится симметрический безразмерный тензор второго ранга $\Pi = \{\alpha_{ij}\}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, характеризующий дополнительные вязкоупругие напряжения системы. В используемой модели этот тензор называется также тензором анизотропии и описывает отклонение деформированной вязкоупругой системы от равновесного положения. В приближении малых деформаций полагается, что коэффициенты внутреннего трения, входящие в определяющее соотношение модели, определяются с использованием тензора анизотропии и коэффициентов $k$ и $\beta$ $(0 < \beta < 1)$ — феноменологических параметров, характеризующих размеры и ориентацию молекулярных “клубков” полимера. Тогда определяющее соотношение для тензора анизотропии представляет собой три дифференциальных уравнения

$$\frac{d\alpha_{11}}{dt} - 2(\alpha_{11} + \varkappa^2)u_x - 2\alpha_{12}u_y + L_{11} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{d\alpha_{22}}{dt} - 2(\alpha_{22} + \varkappa^2)v_y - 2\alpha_{12}v_x + L_{22} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{d\alpha_{12}}{dt} - (\alpha_{11} + \varkappa^2)v_x - (\alpha_{22} + \varkappa^2)u_y + \hat{K}_I\alpha_{12} = 0, \tag{5}$$

где $\varkappa^2 = 1/(\mathrm{Re}\,\mathrm{W})$; $L_{ii} = K_I\alpha_{ii} + \beta\,\mathrm{Re}\,(\alpha_{ii}^2 + \alpha_{12}^2)$, $i = 1, 2$; $K_I = \mathrm{Re}\,(\varkappa^2 + \bar{k}I/3)$; $\bar{k} = k - \beta$; $I = \alpha_{11} + \alpha_{22}$; $\hat{K}_I = \mathrm{Re}\,(\varkappa^2 + \hat{k}I/3)$; $\hat{k} = k + 2\beta$; $\mathrm{Re} = \rho u_H l/\eta_0$ — число Рейнольдса; $\mathrm{W} = \tau_0 u_H/l$ – число Вайсенберга; $\eta_0$, $\tau_0$ — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации.

Рассмотрим простейшие краевые условия на границе канала с перфорированными стенками. Предположим, что для скорости течения на стенке канала выполняется условие прилипания, а уравнение неразрывности выполняется во всем канале вплоть до его стенок. Получаем следующие условия при $y = 0, 1$:

$$\begin{aligned} &y = 0: \quad u = v_y = 0, \ x \in \mathbb{R}^1, \\ &y = 1: \quad u = v_y = 0, \ x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{6}$$

Далее исследуем вариант течения в канале с перфорированными стенками с постоянным расходом, аналогичным рассмотренному в работе [10]. Как и в [10], будем рассматривать течения с принудительным поперечным прокачиванием жидкости через стенки канала, осуществляемым таким образом, что в каждом сечении отсос жидкости через одну стенку компенсируется вдувом через другую, поэтому расход вдоль канала не меняется (см. рис. 1).

Следует отметить, что условия прилипания для неньютоновской полимерной жидкости являются дискуссионными и не всегда описывают реальные течения полимера [11, 12]. Однако в настоящей работе вопрос о проскальзывании жидкости вдоль стенок канала не является существенным, более важна формулировка условия для компоненты скорости $v$ на границе канала. Поэтому предположение, что компонента $u$ на стенках равна нулю, является допустимым.

**2. Гидродинамические стационарные течения в плоском канале.** Рассмотрим случай стационарного течения жидкости в бесконечном канале под действием постоянного перепада давления вдоль стенки канала $y = 0$. Для задачи (1)–(6) будем искать частное решение в виде

$$u = u(y), \qquad \Pi = \Pi(y), \qquad p = p(x, y) = P(y) + p_0 - Ax.$$

Здесь $P(y)$ — некоторая подлежащая определению функция, такая что $P(0) = 0$; $p_0$ — давление при $y = 0$, $x = 0$; $A = \Delta p/(\rho u_H^2 h)$ — безразмерный перепад давления на отрезке $h$, причем размерная величина $\Delta p > 0$.

Для определения искомых величин из (1)–(6) при $0 \leqslant y \leqslant 1$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered} v'(y) = 0, \quad \text{т. е.} \quad v = r = \mathrm{const}; \\ \alpha_{12}(y) = -Ay + ru(y) + C_{12}; \\ P(y) = \alpha_{22}(y) - \alpha_{22}(0); \end{gathered} \tag{7}$$

$$r\alpha_{11}' - 2\alpha_{12}u' + K_I\alpha_{11} + \beta\,\mathrm{Re}\,(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2) = 0; \tag{8}$$

$$r\alpha_{12}' - (\alpha_{22} + \varkappa^2)u' + \hat{K}_I\alpha_{12} = 0; \tag{9}$$

$$r\alpha_{22}' + K_I\alpha_{22} + \beta\,\mathrm{Re}\,(\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2) = 0 \tag{10}$$

($C_{12} = \alpha_{12}(0)$ — константа, подлежащая определению). Из (6), (7), (9) следует

$$u' - g(y)u = q(y), \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{11}$$

где

$$g(y) = \frac{r\hat{K}_I}{\alpha_{22} + \varkappa^2 - r^2}, \qquad q(y) = \frac{(C_{12} - Ay)\hat{K}_I - Ar}{\alpha_{22} + \varkappa^2 - r^2}.$$

Рассмотрим частный случай полученной задачи, когда поток жидкости через отверстия в стенках канала отсутствует ($r = 0$). Заметим, что этот случай является особым для уравнений (8)–(10), так как параметр $r$ является коэффициентом перед производными компонент тензора анизотропии. Для случая $r = 0$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$ имеем следующую систему уравнений:

$$v = r = 0; \tag{12}$$

$$\alpha_{12}(y) = -Ay + C_{12}; \tag{13}$$

$$-2\alpha_{12}u' + K_I\alpha_{11} + \beta\,\mathrm{Re}\,(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2) = 0; \tag{14}$$

$$-\hat{\alpha}_2 u' + \hat{K}_I\alpha_{12} = 0; \tag{15}$$

$$K_I\alpha_{22} + \beta\,\mathrm{Re}\,(\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2) = 0. \tag{16}$$

Выражение для $\alpha_{12}(y)$ непосредственно следует из уравнения (13). Из уравнения (15) и краевых условий для $u$ находим

$$u' = \frac{\hat{K}_I\alpha_{12}}{\alpha_{22} + \varkappa^2}, \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{17}$$

Подставляя выражение для производной скорости (17) в уравнение (15) и вычитая из него уравнение (16), получаем

$$\hat{K}_I\Big(\alpha_{11} - \alpha_{22} - 2\,\frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{22} + \varkappa^2}\Big) = 0. \tag{18}$$

Полагая $\hat{K}_I \neq 0$, из уравнения (16) находим представление для компоненты $\alpha_{11}$ и кубическое уравнение для $\alpha_{22}$:

$$(2\bar{k}/3 + \beta)\alpha_{22}^3 + \varkappa^2(1 + \beta + 2\bar{k}/3)\alpha_{22}^2 + (\varkappa^4 + 2\bar{k}\alpha_{12}^2/3 + \beta\alpha_{12}^2)\alpha_{22} + \beta\varkappa^2\alpha_{12}^2 = 0. \tag{19}$$

В качестве решения $\alpha_{22}(y)$ выбираем вещественные корни уравнения (19), представляющие собой гладкие функции на отрезке $0 < y < 1$. Заметим, что уравнение содержит свободный параметр — константу $C_{12}$. Значение этой константы определяется условием $u(1) = 0$, для проверки которого необходимо решить уравнение (17) с найденной функцией $\alpha_{22}(y)$.

Опишем алгоритм нахождения решений для стационарного течения при $r = 0$. Зафиксируем некоторое значение константы $C_{12}$. В области определения искомых функций $0 \leqslant y \leqslant 1$ введем равномерную сетку $\{y_k\}$, состоящую из $N$ узлов ($N = 100$). В каждом узле $\{y_k\}$ из уравнения (19) можно найти корни $\alpha_{22}(y_k) = \alpha_{22k}$ (определяем их численно с помощью функции roots пакета MATLAB). Как и коэффициенты уравнения, корни зависят от $y$. Соответственно, для каждого значения $k = 1, \ldots, N$ количество корней $\alpha_{22k}$ может быть различным: от нуля до трех в зависимости от значений параметров задачи. Из полученного множества корней выбираем наборы $\alpha_{22k}$, $k = 1, \ldots, N$, при интерполяции дающие гладкую функцию. В качестве критерия отбора используем ограничение численной производной $|\alpha_{22k} - \alpha_{22(k-1)}| < 10^2(y_k - y_{k-1})$. Таких наборов может быть несколько, один или ни одного. Для полученных решений из уравнения (18) находим функцию $\alpha_{11}(y)$. Найденные значения компонент тензора анизотропии $\alpha_{ij}(y)$ позволяют с помощью явной конечно-разностной схемы первого порядка решить задачу Коши для уравнения (17) с начальным условием $u(0) = 0$. Решив эту задачу, можно определить функцию $F(C_{12}) = u(1)$.

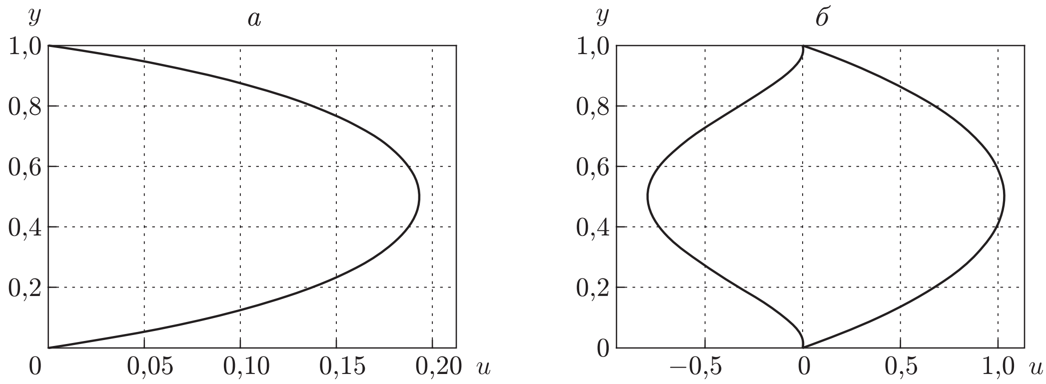


Рис. 2. Профили скорости течения в случае одного (*а*) и двух (*б*) решений:
*а* — Re = 1,12, W = 1, $\beta = 0{,}55$, $A = 1$, *б* — Re = 7,78, W = 0,1, $\beta = 0{,}88$, $A = 1$

Таким образом, поиск решения задачи сводится к решению уравнения $F(C_{12}) = 0$, которое находим численно с помощью метода половинного деления. Из указанного выше следует, что в зависимости от коэффициентов кубического уравнения (19) задача (17)–(19) может иметь несколько решений. На рис. 2 показаны случаи одного и нескольких решений. Видно, что в случае двух решений одно из них имеет физически противоречивый характер, поскольку описывает течение в направлении градиента давления, а не в противоположном ему направлении. Очевидно, такое решение является некорректным с физической точки зрения.

Рассмотрим случай ненулевого потока через отверстия ($r \neq 0$). С учетом формулы (7) получаем краевую задачу с системой обыкновенных дифференциальных уравнений (8), (10), (11) для функций $u(y)$, $\alpha_{11}(y)$, $\alpha_{22}(y)$. Как и при $r = 0$, значение константы $C_{12}$ определяется правым краевым условием $u(1) = 0$, а метод ее нахождения аналогичен описанному для $r = 0$. Задачу решаем численно с помощью конечных разностей первого порядка. Однако для такого решения необходимо задать краевые условия $\alpha_{11}(0)$, $\alpha_{22}(0)$, отсутствующие в используемой постановке. Численные расчеты показывают, что при выборе различных краевых условий кривые функций $\alpha_{11}(y)$, $\alpha_{22}(y)$ при увеличении $y$ сходятся к одной кривой. На рис. 3 показаны функции $\alpha_{11}(y)$ и $\alpha_{22}(y)$ при различных краевых условиях. Выбираем такие значения $\alpha_{11}(0)$ и $\alpha_{22}(0)$, при которых кривизна соответствующих графиков в окрестности нижней границы $y = 0$ минимальна. Вторую производную функций $\alpha_{11}(y)$, $\alpha_{22}(y)$ аппроксимируем конечной разностью:

$$\alpha''_{ii}(y_k) \approx \frac{a_{ii}(y_{k+1}) - 2\alpha_{ii}(y_k) + \alpha_{ii}(y_{k-1})}{(y_{k+1} - y_k)^2}, \qquad i = 1, 2, \quad k = 2, \dots, N-1.$$

Тогда для граничных условий $\alpha_{11}(0) = \gamma_1$, $\alpha_{22}(0) = \gamma_2$ определим целевую функцию двух переменных

$$G(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{k=2,\dots,30} (|\alpha''_{11}(y_k)|, |\alpha''_{22}(y_k)|),$$

минимум которой будем искать методом Нелдера — Мида с использованием функции fminsearch пакета MATLAB. Значения $\alpha_{11}(0) = \gamma_1$ и $\alpha_{22}(0) = \gamma_2$, минимизирующие функцию $G$, будем считать искомыми граничными условиями задачи. Так, на рис. 3 искомым является решение, показанное сплошной линией. Заметим, что наличие течения жидкости через стенки канала приводит к асимметрии профиля горизонтальной скорости $u(y)$.

Рассмотрим случай, когда задача (12)–(16) для $r = 0$ имеет несколько решений, и выясним, к какому из них близки решения задачи при малых значениях $r \neq 0$. Установлено, что они приближаются к одному из таких решений, даже если краевые условия $\alpha_{11}(0)$

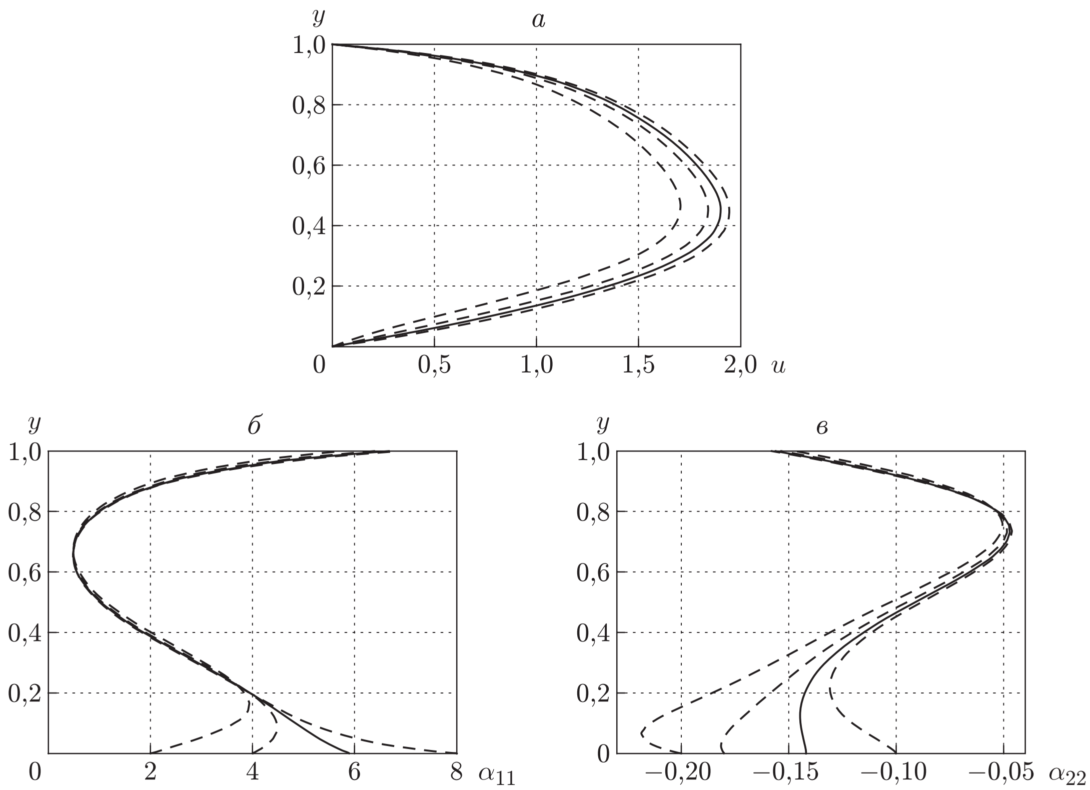


Рис. 3. Решения при $r = 0{,}3$, $\mathrm{Re} = 1{,}12$, $\mathrm{W} = 1$, $\beta = 0{,}22$, $A = 3$ и различных значениях $\alpha_{11}(0)$ и $\alpha_{22}(0)$:
*а* — профили скорости, *б* — профили функции $\alpha_{11}(y)$, *в* — профили функции $\alpha_{22}(y)$; сплошная линия — решение с наименьшей кривизной, штриховые линии — промежуточные решения

и $\alpha_{22}(0)$ задаются в малой окрестности другого решения (рис. 4). В предположении, что решения при малом и нулевом значениях $r$ близки, можно определить, какое из решений задачи (12)–(16) ($r = 0$) физически более правдоподобно в случае, если таких решений несколько. На рис. 5 сплошной линией показано решение при $r = 0$, к которому приближаются решения при $r \neq 0$, а штриховой и пунктирной — решения для $r = 0{,}1$ и $r = 0{,}2$, полученные с использованием описанного выше метода выбора значений $\alpha_{11}(0)$ и $\alpha_{22}(0)$. Сходимость решений при уменьшении $r$ к решению, показанному сплошной линией, является дополнительным подтверждением правильности выбора значений $\alpha_{11}$, $\alpha_{22}$ при $y = 0$.

**Заключение.** В работе с использованием модифицированной модели Виноградова — Покровского рассмотрена задача о стационарном течении вязкоупругой несжимаемой полимерной жидкости в плоском канале с перфорированными стенками. Исследованы уравнения, в которых случай отсутствия потока через отверстия в стенках является особым для рассматриваемой задачи, а также возможность не единственного решения задачи. Описан численный метод решения такой задачи.

Для случая потока жидкости через отверстия предложен способ постановки краевых условий для компонент тензора анизотропии путем минимизации второй производной этих компонент. Показано, что при использовании данного способа в случае уменьшения скорости потока через отверстия решения задачи сходятся к решению задачи с нулевым потоком, не требующей постановки краевых условий. Таким образом, в работе предложен механизм постановки условий задачи, необходимых для расчета подобных потоков с помощью исследуемой модели.

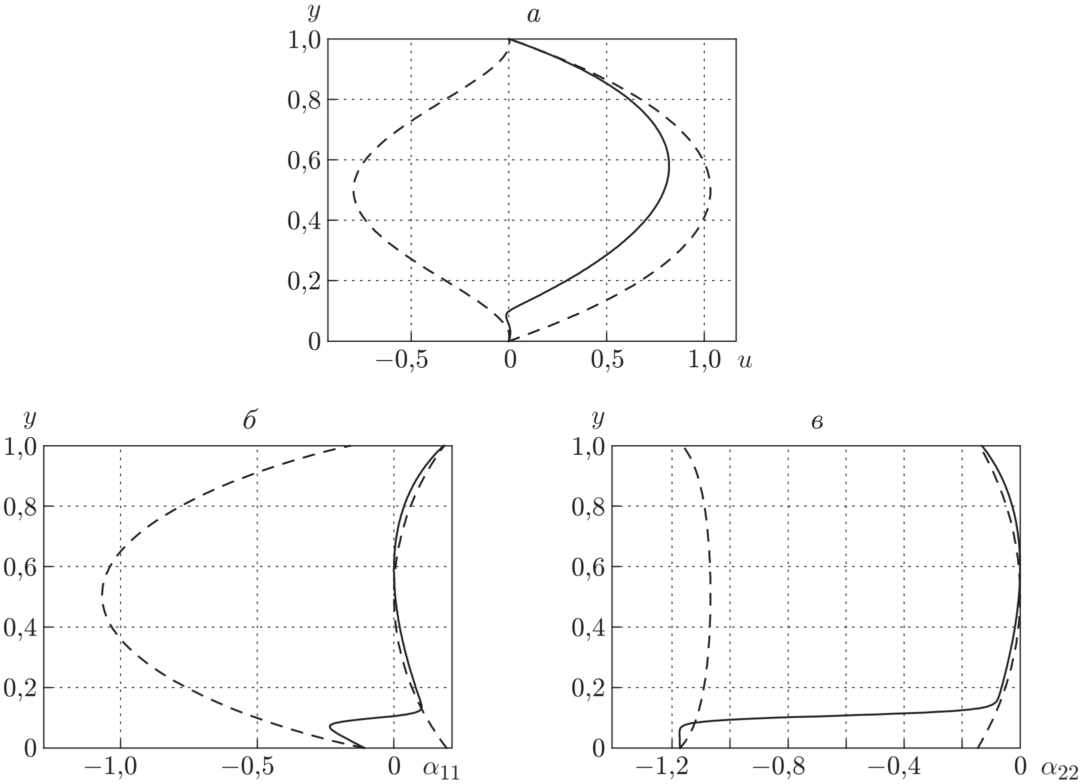


Рис. 4. Решения при $\mathrm{Re} = 7{,}78$, $\mathrm{W} = 0{,}1$, $\beta = 0{,}88$, $A = 1$:
*а* — профили скорости, *б* — профили функции $\alpha_{11}(y)$, *в* — профили функции $\alpha_{22}(y)$; сплошная линия — решение при $r = 0{,}1$, штриховые линии — два решения при $r = 0$

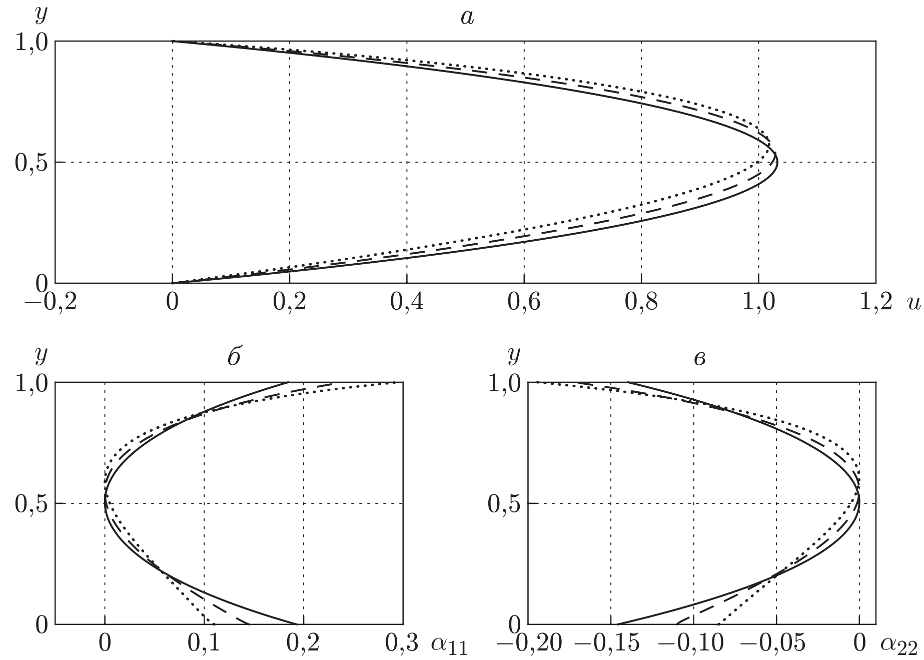


Рис. 5. Решения при $\mathrm{Re} = 7{,}78$, $\mathrm{W} = 0{,}1$, $\beta = 0{,}88$, $A = 1$ для различных значений $r$:
*а* — профили скорости, *б* — профили функции $\alpha_{11}(y)$, *в* — профили функции $\alpha_{22}(y)$; сплошная линия — $r = 0$, штриховая — $r = 0{,}1$, пунктирная — $r = 0{,}2$

Приведены примеры решений для различных значений параметров, подтверждающие обоснованность предложенных краевых условий и эффективность численного метода. Результаты численных расчетов показали возможность управления потоком жидкого полимера в канале путем изменения характеристик течения через отверстия в стенках.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Macosko C.** Rheology: principles, measurements, and applications. N. Y.: Wiley-VCH, 1994.
2. **Doi M.** The theory of polymer dynamics / M. Doi, S. F. Edwards. Oxford: Clarendon Press, 1986.
3. **Алтухов Ю. А.** Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем / Ю. А. Алтухов, А. С. Гусев, Г. В. Пышнограй. Барнаул: Алт. гос. пед. акад., 2012.
4. **Pokrovskii V. N.** The mesoscopic theory of polymer dynamics. Dordrecht: Springer, 2010.
5. **Beris A., Sureshkumar R.** Simulation of time-dependent viscoelastic channel Poiseuille flow at high Reynolds numbers // Chem. Engng Sci. 1996. V. 51, N 9. P. 1451–1471.
6. **Ho T. C., Denn M. M.** Stability of plane Poiseuille flow of a highly elastic liquid // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1977. N 3. P. 179–195.
7. **Joo Y. L, Shaqfen E.** Viscoelastic Poiseuille flow through a curved channel: A new elastic instability // Phys. Fluids. 1991. V. 3, N 7. P. 1691–1694.
8. **Блохин А. М., Семисалов Б. В.** Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 4. С. 38–47.
9. **Блохин А. М., Семенко Р. Е.** Стационарные магнитогидродинамические течения несжимаемой полимерной жидкости в плоском канале // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2018. Т. 11, № 4. С. 41–54.
10. **Ватажин А. Б.** Магнитогидродинамические течения в каналах / А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. М.: Наука, 1970.
11. **Altukhov Yu. A., Pyshnograi G. V., Pyshnograi I. G.** Slipping phenomenon in polymeric fluids flow between parallel planes // World J. Mech. 2011. N 1. P. 294–298.
12. **Sochi T.** Slip at fluid-solid interface // Polymer Rev. 2011. V. 51, N 4. P. 309–340.


*Поступила в редакцию 4/VIII 2020 г.,*
*после доработки — 13/X 2020 г.*
*Принята к публикации 20/XI 2020 г.*