

УДК 533.17

ЛАМИНАРНОЕ ПЛАМЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ СЛАБОЙ СЖИМАЕМОСТИ РЕАГИРУЮЩИХ ПОТОКОВ

М. Л. Зайцев¹, В. Б. Аккерман²¹Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 115191 Москва, mlzaytsev@gmail.com²Университет Западной Виргинии, 26506-6106 Моргантаун, США, slava.akkerman@gmail.com

Полная система гидродинамических уравнений, описывающих развитие неустойчивости фронта реакции в гидродинамическом приближении, сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений с использованием переменных Лагранжа, интегралов движения и их аналогов. В адиабатическом приближении демонстрируется, как учесть звуковые колебания плотности газа, вызванные этим движением.

Ключевые слова: фронт реакции, гидродинамический разрыв, акустические колебания, дефлаграция, интегродифференциальные уравнения, гидродинамическое течение.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с пионерских работ Я. Б. Зельдовича, Д. А. Франк-Каменецкого, Л. Д. Ландау и др. [1–6] вопрос о сокращении размерности в теории горения сохраняет свою актуальность. Даже сегодня, несмотря на бурное развитие вычислительной техники и численных методов, прямое численное моделирование процесса горения по-прежнему сильно затруднено, в частности, из-за причудливой конфигурации камеры сгорания, сложной многошаговой химической кинетики процесса, а также из-за грандиозного различия между характерными физико-химическими и гидродинамическими размерами задачи — $10^{-2} \div 10^{-3}$ мм и $0.1 \div 1$ м соответственно [7, 8]. В связи с этим численное моделирование горения по-прежнему базируется на различных моделях, тесно связанных с теми или иными теоретическими приближениями. Классическим подходом к изучению механизмов распространения горения является условное разделение физико-химических и гидродинамических процессов, определяющих соответственно внутреннюю структуру зоны горения (в частности, выделения, поглощения и переноса тепла и компонентов вещества) и взаимодействие пламени с параметрами гидродинамического течения [7–10]. Таким образом, в гидродинамическом приближении пламя представляет собой тонкую поверхность разрыва, на которой плотность, температура и другие термодинамические величины, описывающие состав газа, испытывают скачок [7, 8, 11]. При этом,

если градиент скорости потока невелик, внешнее течение не влияет на внутреннюю структуру зоны горения, а следовательно, малый локально-плоский участок такой поверхности разрыва распространяется по нормали к самой себе с «нормальной» скоростью U_f , которая не зависит от гидродинамических условий и может быть определена согласно физико-химической теории или с помощью независимого эксперимента.

Существенного снижения вычислительных мощностей можно достичь, если свести полную систему уравнений гидродинамики горения к единственному уравнению, описывающему положение фронта реакции. Отметим, что подобные уравнения уже были получены в приближении слабо искривленного фронта пламени и/или малого теплового расширения при горении [12–15], однако в реальных пламенах коэффициент расширения достаточно велик, ($\Theta = 5 \div 10$), что приводит к сильному взаимодействию пламени с потоком, порождая, в свою очередь, ряд дополнительных физических явлений, в частности неустойчивость Дарье — Ландау. В последнее время появились работы, где ограничение на коэффициент расширения в некоторых случаях снимается, например в приближении бесконечно тонкого двумерного ламинарного пламени и несжимаемых реагирующих потоков [16–19], что открыло новые возможности для исследований в данном направлении. К сожалению, приближение несжимаемости весьма ограничивает набор возможных приложений, в частности, затрудняет исследование такое важного явления, как

взаимодействие пламени со звуковыми волнами, разглаживающими или еще более искривляющими поверхность фронта реакции в зависимости от геометрии камеры сгорания и параметров потока и звуковых колебаний [7, 8]. При этом установлено, что достаточно быстрые пламена в трубах генерируют очень сильные звуковые волны, порождающие чрезвычайно сильное искривление и, возможно, даже турбулизацию фронта горения [20–22]. Кроме того, звуковые волны и сжимаемость газа влияют на переход дефлаграции в детонацию [23]. Для исследования взаимодействия пламени со звуком в настоящее время используется в основном прямое численное моделирование общих уравнений горения [21, 22], не позволяющее, однако, решать задачу в общем случае и на больших масштабах, поэтому предпочтительнее включить сжимаемость реагирующих потоков в упрощенные теоретические описания фронта пламени. Следует отметить, что влияние давления и акустики на динамику фронта реакции исследовалось также в случае горения пороха и твердых топлив, что имеет большое практическое значение [24–26].

В данной работе представлен вывод системы уравнений движения бесконечно тонкого фронта пламени с минимальными ограничениями, позволяющими учесть влияние звука на развитие (или затухание) неустойчивости Дарье — Ландау, и дано дальнейшее развитие метода из работ [27, 28]. Основная цель — предложить достаточно простую модель описания взаимодействия фронта реакции и звуковых колебаний в предварительно перемешанной газовой смеси, которую можно было бы в дальнейшем реализовать численно. При этом следует отметить принципиальное отличие работы [28], посвященной двумерной конфигурации, от данной работы: здесь система уравнений уже не предполагает дополнительного условия адиабатичности для несжимаемых потоков газа по обе стороны от фронта.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНО ТОНКОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ В ТРЕХМЕРНОМ ПОТОКЕ

Не ограничивая общности, рассмотрим в трехмерном случае распространение бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта реакции в потенциальном несжимаемом внешнем потоке, $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, $\Delta\varphi = 0$ (рис. 1). Предположим, что газодинамика задачи характеризу-

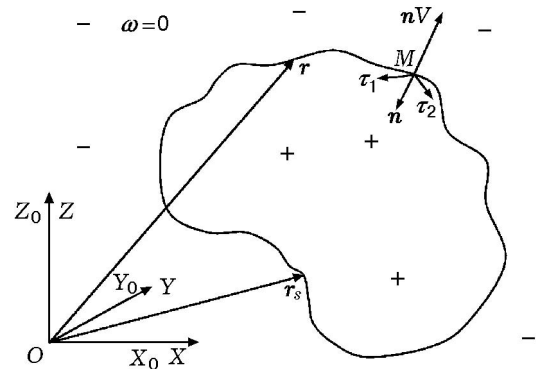


Рис. 1. Фронт пламени в трехмерном потоке

ется пространственным масштабом R , определяемым радиусом трубы, шириной двумерного канала, радиусом сферической камеры сгорания и т. д. Для удобства введем безразмерные величины: скорость $\mathbf{u} = \mathbf{v}/U_f$, координаты $\mathbf{r} = \mathbf{x}/R$, время $\tilde{t} = U_f t/R$ и давление $P = (\Pi - \Pi_f)/(\rho_f U_f^2)$, где ρ_f и Π_f — соответственно плотность и давление в топливе на бесконечном удалении от фронта, U_f — скорость распространения плоского фронта пламени относительно набегающего свежего топлива. Течение газа предполагается несжимаемым и невязким. Обозначим индексами «-» и «+» положения частиц газа перед и за фронтом соответственно. Тогда гидродинамические уравнения принимают вид [11]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{t}} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left(\vartheta P + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \tilde{t}} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

где $\vartheta = 1$ в топливе и $\vartheta = \theta = \rho_-/\rho_+$ в сгоревшем газе. Условия сшивки на поверхности фронта, вытекающие из законов сохранения, выглядят следующим образом [11, 15]:

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = (\theta - 1) \mathbf{n}, \quad (4)$$

$$P_+ - P_- = 1 - \theta, \quad (5)$$

$$V = 1 - u_{n-}, \quad (6)$$

где \mathbf{n} — внутренняя нормаль, V — проекция скорости фронта на отрицательное направление вектора \mathbf{n} . Скорости $u_{n-} = \partial\varphi/\partial n = 1 - V$

и $\mathbf{u}_\tau = \partial\varphi/\partial\tau$ связаны между собой формулой Грина [29]:

$$2\pi\varphi(\mathbf{r}, \tilde{t}) = \oint \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, \tilde{t})}{\partial n_s} + \varphi(\mathbf{r}_s, \tilde{t}) \mathbf{n}_s \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^3} \right] dS(\mathbf{r}_s), \quad (7)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, \tilde{t})$ — потенциал скорости газа перед фронтом, индекс s означает интегрирование по всей поверхности фронта. Тогда из уравнений гидродинамики (1)–(3) и условий на фронте (4)–(6) следует, что для любой точки на фронте выполняются соотношения

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} + u_{n-} + \frac{1}{2}(u_\tau^2 - u_{n-}^2) + P = 0, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\theta - 1}{\theta} [\mathbf{n} \times \nabla P], \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — завихренность сразу за фронтом реакции, и для простоты в данном параграфе полная производная определена по формуле

$$\frac{d}{d\tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - V \frac{\partial}{\partial n}. \quad (10)$$

В области «+» перейдем взаимно однозначно к лагранжевым переменным

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tilde{t}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \tilde{t}) \quad (11)$$

и

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \tilde{t}), \quad \mathbf{r}_0|_{\tilde{t}=0} = \mathbf{r}.$$

Тогда согласно формулам (4)–(6) для любой точки M , движущейся со скоростью $-\mathbf{n}V$ на границе области сгоревшего газа «+», имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{d\tilde{t}} &= \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\tilde{t}} - V \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial n} = \\ &= \left(\mathbf{u}_\tau \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\tau} \right) - (u_n + V) \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial n} = \\ &= - \left(\mathbf{u}_\tau \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\tau} \right) - \theta \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial n}, \quad (12) \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ — тангенциальный к поверхности фронта в точке M вектор.

Известно, что в трехмерном случае уравнения Эйлера (1)–(3) допускают интегралы движения $\boldsymbol{\omega}\nabla i_0 = \omega_{0i}(\mathbf{r}_0)$ и $\Delta = 1$, где $i = x, y, z$ и $\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{u}_0$ — начальное распределение

завихренности [27]. Тогда в системе координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ на границе области сгоревшего газа «+» имеем соотношение

$$\Delta = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)} = 1, \quad (13)$$

причем из формулы (9) следует, что на фронте выполняется условие [27]

$$\omega_{n+} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим фронт в переменных Лагранжа (рис. 2). Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_x &= \boldsymbol{\omega}\nabla x_0 = \omega_{0x}(\mathbf{r}_0), \quad I_y = \boldsymbol{\omega}\nabla y_0 = \omega_{0y}(\mathbf{r}_0), \\ I_z &= \boldsymbol{\omega}\nabla z_0 = \omega_{0z}(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда из уравнений (13)–(15) для точки M_0 следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_x}{\partial x_0} &= \frac{\partial(I_x, y_0, z_0)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \frac{1}{\partial(x_0, y_0, z_0)/\partial(\tau_1, \tau_2, n)} \times \\ &\times \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial x_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} \right], y_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)} = \\ &= \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial x_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} \right], y_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}. \end{aligned} \quad (16)$$

С другой стороны, в прямоугольной системе координат $(\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\tau}_{10}, \boldsymbol{\tau}_{20})$ имеем

$$\frac{\partial I_x}{\partial x_0} = \tau_{10x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} \quad (17)$$

(см. рис. 2). Сравнивая уравнения (16) и (17), находим

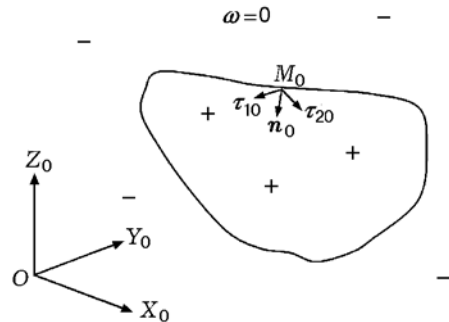


Рис. 2. Фронт пламени в переменных Лагранжа в трехмерном случае

$$\begin{aligned} \tau_{10x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} = \\ = \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial x_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} \right], y_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \tau_{10y} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20y} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0y} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} = \\ = - \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial x_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} \right], x_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tau_{10z} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20z} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0z} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} = \\ = \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial x_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} \right], x_0, y_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tau_{10x} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_y}{\partial n_0} = \\ = \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial y_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial y_0}{\partial \tau_2} \right], y_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{10y} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20y} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{20}} + n_{0y} \frac{\partial I_y}{\partial n_0} = \\ = - \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial y_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial y_0}{\partial \tau_2} \right], x_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tau_{10z} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20z} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{20}} + n_{0z} \frac{\partial I_y}{\partial n_0} = \\ = \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial y_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial y_0}{\partial \tau_2} \right], x_0, y_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tau_{10x} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_z}{\partial n_0} = \\ = \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial z_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial z_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial z_0}{\partial \tau_2} \right], y_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tau_{10y} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20y} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{20}} + n_{0y} \frac{\partial I_z}{\partial n_0} = \\ = - \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial z_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial z_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial z_0}{\partial \tau_2} \right], x_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tau_{10z} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20z} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{20}} + n_{0z} \frac{\partial I_z}{\partial n_0} = \\ = \frac{\partial \left(\left[\omega_n \frac{\partial z_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial z_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial z_0}{\partial \tau_2} \right], x_0, y_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку величины I_x , I_y , I_z , определяемые из (15), являются интегралами движения, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dI_x}{dt} = \frac{\partial I_x}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial I_x}{\partial y_0} \frac{dy_0}{dt} + \frac{\partial I_x}{\partial z_0} \frac{dz_0}{dt} = \\ = \left(\tau_{10x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} \right) \frac{dx_0}{dt} + \\ + \left(\tau_{10y} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20y} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0y} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} \right) \frac{dy_0}{dt} + \\ + \left(\tau_{10z} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20z} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0z} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} \right) \frac{dz_0}{dt}. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{dI_y}{dt} = \left(\tau_{10x} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_y}{\partial n_0} \right) \frac{dx_0}{dt} + \\ + \left(\tau_{10y} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20y} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{20}} + n_{0y} \frac{\partial I_y}{\partial n_0} \right) \frac{dy_0}{dt} + \\ + \left(\tau_{10z} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20z} \frac{\partial I_y}{\partial \tau_{20}} + n_{0z} \frac{\partial I_y}{\partial n_0} \right) \frac{dz_0}{dt}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{dt} = \left(\tau_{10x} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_z}{\partial n_0} \right) \frac{dx_0}{dt} + \\ + \left(\tau_{10y} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20y} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{20}} + n_{0y} \frac{\partial I_z}{\partial n_0} \right) \frac{dy_0}{dt} + \\ + \left(\tau_{10z} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20z} \frac{\partial I_z}{\partial \tau_{20}} + n_{0z} \frac{\partial I_z}{\partial n_0} \right) \frac{dz_0}{dt}. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом формулы (14) система из поверхностных уравнений (9), (12), (18)–(29) позволяет найти 17 неизвестных $\partial I_x / \partial n_0$, $\partial I_y / \partial n_0$, $\partial I_z / \partial n_0$, $\partial \omega_1 / \partial n$, $\partial \omega_2 / \partial n$, $\partial x_0 / \partial n$, $\partial y_0 / \partial n$,

$\partial z_0/\partial n$, ω_1 , ω_2 , P , x_0 , y_0 , z_0 , I_x , I_y , I_z , которые там присутствуют. Следовательно, с учетом формулы (8) для давления определяется вся эволюция фронта. Три неизвестные величины $\partial I_x/\partial n_0$, $\partial I_y/\partial n_0$ и $\partial I_z/\partial n_0$ входят в уравнения (18)–(26) линейно, а следовательно, могут быть явно выражены из них и легко исключены из системы (9), (12), (18)–(29).

2. ВЛИЯНИЕ ЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Теперь рассмотрим влияние малого «звукового» возмущения плотности потока $\rho(\mathbf{r}, t)$, т. е. сжимаемости. Аналогично предыдущему параграфу, рассмотрим распространение бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта пламени в потенциальном внешнем потоке (см. рис. 1), причем течение газа вне фронта предполагается несжимаемым (с точностью до звуковых колебаний) и невязким, но допускается неравномерное адиабатическое нагревание продуктов горения. Для удобства будем использовать безразмерные переменные плотности $\tilde{\rho} = \rho/\rho_f$ и энтропии $\tilde{s} = sT_f/U_f^2$, где T_f — постоянная температура газа перед фронтом. Если $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \neq \text{const}$ и $\tilde{s}(\mathbf{r}, t) \neq \text{const}$, то уравнения Эйлера имеют вид [11]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla P = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{\nabla \tilde{\rho} \times \nabla P}{\tilde{\rho}^2}, \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \text{div} \mathbf{u} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \tilde{s} = 0. \quad (34)$$

Предположим, что при этом перед фронтом $\tilde{s}_- = \text{const}$. Из второго начала термодинамики и закона Гесса для любой точки на фронте находим [11]

$$\tilde{s}_+ = \frac{1 - \theta}{\theta} P + \text{const}. \quad (35)$$

Уравнения (4)–(6), (9) и (35) верны и в этом случае, но величина $\theta = \tilde{\rho}_-/\tilde{\rho}_+$ слабо меняется вдоль фронта.

Теперь в области «+» перейдем взаимно однозначно к лагранжевым переменным (11). В трехмерном случае уравнения Эйлера (30)–(34) допускают интегралы движения $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla i_0/\tilde{\rho}$, где $i = x, y, z$ [27]. Фактически здесь требуется пренебречь в формуле (31) только слагаемым $\nabla \tilde{\rho} \times \nabla P/\tilde{\rho}^2$, описывающим сжимаемость среды. При существенно дозвуковом движении фронта реакции, типичном для дефлаграции (медленного горения), сжимаемостью вещества обычно можно пренебречь [7], что делает вышеизложенное допущение приемлемым. Обозначим

$$I_x = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\tilde{\rho}} \right) \nabla x_0 = \frac{\omega_{0x}(\mathbf{r}_0)}{\tilde{\rho}(\mathbf{r}_0)}, \quad I_y = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\tilde{\rho}} \right) \nabla y_0 = \frac{\omega_{0y}(\mathbf{r}_0)}{\tilde{\rho}(\mathbf{r}_0)}, \quad I_z = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\tilde{\rho}} \right) \nabla z_0 = \frac{\omega_{0z}(\mathbf{r}_0)}{\tilde{\rho}(\mathbf{r}_0)}. \quad (36)$$

Рассмотрим фронт в переменных Лагранжа (11) (см. рис. 2). Для этой цели в уравнениях (18)–(26) следует заменить завихренность $\boldsymbol{\omega}$ величиной $\boldsymbol{\omega}/\tilde{\rho}$. В частности, формула (18) сводится к виду

$$\begin{aligned} \tau_{10x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{10}} + \tau_{20x} \frac{\partial I_x}{\partial \tau_{20}} + n_{0x} \frac{\partial I_x}{\partial n_0} &= \\ &= \frac{1}{\partial(x_0, y_0, z_0)/\partial(\tau_1, \tau_2, n)} \times \\ &\times \frac{\partial \left(\left[\frac{\omega_n}{\tilde{\rho}_+} \frac{\partial x_0}{\partial n} + \frac{\omega_1}{\tilde{\rho}_+} \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} + \frac{\omega_2}{\tilde{\rho}_+} \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} \right], y_0, z_0 \right)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)}. \end{aligned} \quad (37)$$

В результате переменные $\partial \omega_1/\partial n$ и $\partial \omega_2/\partial n$ заменяются на $\partial(\omega_1/\tilde{\rho}_+)/\partial n$ и $\partial(\omega_2/\tilde{\rho}_+)/\partial n$ соответственно, и чтобы замкнуть аналогичную систему уравнений, нужно найти однозначную связь на обеих поверхностях фронта между давлением и плотностью $P = P_s(\tilde{\rho})$, определяемую уравнением состояния. Если перед фронтом $\tilde{s}_- = \text{const}$, то эта зависимость следует непосредственно из уравнения состояния сгоревшего вещества. За искривленным фронтом реакции происходит неравномерное нагревание продуктов горения, но выполняется соотношение (35). Если это выражение для энтропии подставить в уравнение состояния сгоревшего газа, $P = P_+(\tilde{\rho}, \tilde{s})$, то также получаем однозначную связь между давлением и плотностью на границе пламени, $P = P_+(\tilde{\rho})$, что и позволяет учесть образующиеся малые звуковые колебания.

Итак, при взаимодействии фронта пламени со звуком учитываются не только параметры, определяющие само гидродинамическое течение, но и уравнения состояния взаимодействующих сред, т. е. оно строго индивидуально для разных реагирующих сред.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНО ТОНКОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ В ДВУМЕРНОМ ПОТОКЕ

Не ограничивая общности, рассмотрим распространение двумерного бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта пламени в потенциальном внешнем потоке, т. е. $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, $\Delta\varphi = 0$ (рис. 3). Обозначим также индексами «-» и «+» положения частиц газа перед и за фронтом соответственно. Течение газа вне фронта предполагается несжимаемым и невязким (1)–(3). Условия сшивки на поверхности фронта такие же, как и в трехмерном случае (4)–(6). Скорости $u_{n-} = \partial\varphi/\partial n = 1 - V$ и $u_{\tau} = \partial\varphi/\partial\tau$ связаны между собой формулой Грина [29]:

$$\pi\varphi(\mathbf{r}, \tilde{t}) = \oint \left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}_s, \tilde{t})}{\partial n_s} \ln|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, \tilde{t}) \mathbf{n}_s \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (38)$$

Тогда из уравнений гидродинамики (1)–(3) и условий на фронте (4)–(6) следует, что для любой точки M на поверхности фронта реакции (пламени) (см. рис. 3)

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} + u_{n-} + \frac{1}{2}(u_{\tau}^2 - u_{n-}^2) + P = 0, \quad (39)$$

$$\omega_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta} [n \times \nabla P] = \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{\partial P}{\partial \tau}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_+}{d\tilde{t}} &= \frac{\partial\omega_+}{\partial\tilde{t}} - V \frac{\partial\omega_+}{\partial n} = \\ &= -u_{\tau} \frac{\partial\omega_+}{\partial\tau} - (u_{n+} + V) \frac{\partial\omega_+}{\partial n} = \\ &= -u_{\tau} \frac{\partial\omega_+}{\partial\tau} - \theta \frac{\partial\omega_+}{\partial n}. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим в области сгоревшего газа «+» псевдолагранжевы переменные (рис. 4)

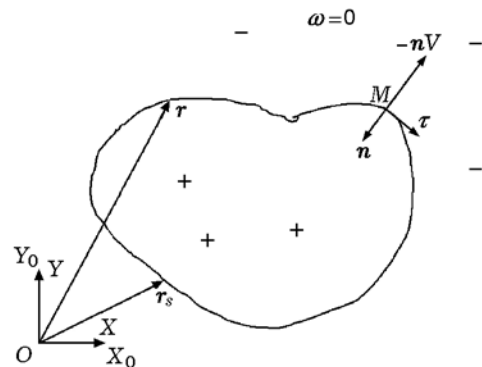


Рис. 3. Фронт пламени в двумерном потоке

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tilde{t}) + \lambda(\omega, \tilde{t}) \nabla \times \omega, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \tilde{t})$$

(42)

и

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \tilde{t}), \quad \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}.$$

Здесь и далее индекс «+» для краткости опущен. Аналогично уравнению (13), можно показать, что

$$\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(\tau, n)} = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial n} - \frac{\partial x_0}{\partial n} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} = 1, \quad (43)$$

а также $\omega = \omega_0(x_0, y_0)$. Выберем на задней поверхности фронта

$$\lambda(\omega, \tilde{t}) = -\theta \frac{\partial\omega}{\partial\tau}. \quad (44)$$

Тогда, согласно формулам (4)–(6), для любой точки M , движущейся со скоростью $-nV$ на границе области сгоревшего газа «+», имеем

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\tilde{t}} = \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\tilde{t}} - V \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial n} = -\left(u_{\tau} - \lambda \frac{\partial\omega}{\partial n}\right) \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\tau}. \quad (45)$$

В системе координат $(\mathbf{r}_0, \tilde{t})$ граница сгоревшего газа не движется. Действительно, пусть

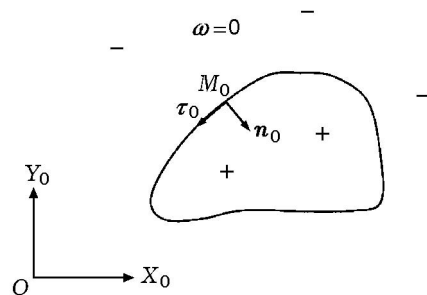


Рис. 4. Фронт пламени в псевдолагранжевых переменных в двумерном случае

$g_0(\mathbf{r}_0, t) = 0$ — уравнение движения фронта реакции. Тогда с учетом условий сшивки (4)–(6) скорость фронта равна

$$V_{0+} = -\frac{g_{0t}}{|\nabla_0 g_0|} = -\frac{g_t + ((\mathbf{u} + \lambda \nabla \times \boldsymbol{\omega}) \nabla g)}{|\nabla_0 g_0|} = -\frac{|\nabla g|}{|\nabla_0 g_0|} \left(V + u_{n+} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (46)$$

Пусть $g_0(\mathbf{r}_0) = 0$ — уравнение неподвижного фронта реакции в псевдолагранжевых переменных (42). Тогда, дифференцируя это уравнение по времени и в направлении $\boldsymbol{\tau}$ (см. рис. 3 и 4), находим

$$\tau_{0x} = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} / \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} = n_{0y} = \frac{1}{|\nabla g_0|} \frac{\partial g_0}{\partial y_0}, \quad (47)$$

$$\tau_{0y} = \frac{\partial y_0}{\partial \tau} / \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} = -n_{0x} = -\frac{1}{|\nabla g_0|} \frac{\partial g_0}{\partial x_0}, \quad (48)$$

$$n_{0x} \frac{dx_0}{dt} + n_{0y} \frac{dy_0}{dt} = 0. \quad (49)$$

Отсюда легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \quad (50)$$

Пусть точке M на задней поверхности фронта в псевдолагранжевых переменных соответствует точка M_0 (см. рис. 4). Очевидно, точка M_0 движется вдоль фронта со скоростью $\boldsymbol{\tau}_0 d\mathbf{r}_0/d\tilde{t} = \tau_{0x} dx_0/d\tilde{t} + \tau_{0y} dy_0/d\tilde{t}$. Продифференцируем по времени выражение

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} \frac{\partial \omega}{\partial \tau_0}. \quad (51)$$

Имеем

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) = \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \tau_0} + \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \tau_0} \right), \quad (52)$$

где с учетом (47)–(49)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \tau_0} \right) &= \frac{d}{d\tilde{t}} (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla_0 \omega) = \\ &= \left(\frac{d\boldsymbol{\tau}_0}{d\tilde{t}} \nabla_0 \omega \right) + \left(\boldsymbol{\tau}_0 \frac{d\nabla_0 \omega}{d\tilde{t}} \right) = \\ &= \frac{1}{R} \left(\tau_{0x} \frac{dx_0}{d\tilde{t}} + \tau_{0y} \frac{dy_0}{d\tilde{t}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial n_0} + \\ &+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau_0^2} \left(\tau_{0x} \frac{dx_0}{d\tilde{t}} + \tau_{0y} \frac{dy_0}{d\tilde{t}} \right) + \\ &+ \left(n_{0x} \frac{dx_0}{d\tilde{t}} + n_{0y} \frac{dy_0}{d\tilde{t}} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau_0 \partial n_0} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial n_0} \right) \left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{dx_0}{d\tilde{t}} + \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \frac{dy_0}{d\tilde{t}} \right) / \\ & / \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} \end{aligned} \quad (53)$$

(R — радиус кривизны в точке M_0),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2} \right) &= \\ &= - \left[\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right) \right] / \\ & / \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Учтем, что для любой скалярной величины γ на поверхности фронта выполняется соотношение [27]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \right) &= \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\tau} \nabla \gamma) = \left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \nabla \gamma \right) + \\ &+ \left(\boldsymbol{\tau} \frac{d\nabla \gamma}{dt} \right) = \left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \mathbf{n} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{n}} + \left(\boldsymbol{\tau} \frac{d\nabla \gamma}{dt} \right) = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial \tau} - V \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau \partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Тогда выражение (52) сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{d\omega}{d\tilde{t}} \right) = - \left\{ \left[\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{dx_0}{d\tilde{t}} \right) + \right. \right.$$

$$+ \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{dy_0}{dt} \right) \Big/ \left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2 \right] \left. \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial n_0} \right) \left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \frac{dy_0}{dt} \right) \right\} \quad (56)$$

Подставим (56) в формулы (41) и (45). После преобразований получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) + A(\tau) \frac{\partial \omega}{\partial n} + B(\tau) = 0, \quad (57)$$

где

$$A = - \left[\frac{\partial^2 \omega / \partial \tau^2}{\partial \omega / \partial \tau} + \frac{\partial \omega / \partial n_0}{2R(\partial \omega / \partial \tau)} \left(\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2 \right) \right], \quad (58)$$

$$B = \frac{1}{\theta} \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \frac{u_\tau}{2\theta R} \left(\left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \tau} \right)^2 \right) \frac{\partial \omega}{\partial n_0}. \quad (59)$$

Аналитическое решение уравнения (57) имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial n}(\tau) = \exp \left(- \int_0^\tau A(\tau') d\tau' \right) \times \left[\text{const} - \int_0^\tau B(\tau') \exp \left(\int_0^{\tau'} A(\tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right]. \quad (60)$$

Система из поверхностных уравнений (39)–(41), (45) и (60) позволяет найти неизвестные r_0 , P , ω , $\partial \omega / \partial n$ и φ , а значит, описать всю эволюцию пламени. В начальный момент времени необходимо задать положение фронта, распределение завихренности ω_0 и ее нормальной производной $\partial \omega_0 / \partial n_0$ вдоль фронта.

В частном случае $R \rightarrow \infty$ для слабо искривленного фронта реакции формула (57) сводится к следующей:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau \partial n} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} / \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \omega}{\partial n} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = 0. \quad (61)$$

Решение уравнения (61) имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \left(-\frac{1}{\theta} u_\tau + \text{const} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (62)$$

После подстановки (62) в (41) находим

$$\frac{d\omega_+}{dt} = \text{const} \frac{\partial \omega_+}{\partial \tau}. \quad (63)$$

Мы имеем некоторую усиливающуюся волну завихренности, распространяющуюся вдоль фронта. Это находится в полном соответствии с теорией Дарье — Ландау [11]. Из (60) и (63) видно, что благодаря кривизне R и $\partial \omega_0 / \partial n_0 \neq 0$ ненулевая завихренность ω_+ постоянно генерируется.

Аналогично предыдущему параграфу, в адиабатическом приближении здесь можно учесть образующиеся малые звуковые колебания. Для этого необходимо в (51)–(60) завихренность ω_+ заменить на $\omega_+ / \tilde{\rho}_+$, т. е. вместо интеграла ω использовать более общий интеграл $\omega / \tilde{\rho}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в § 1, 2 системы уравнений существенно трехмерные, т. е. вырождаются в двумерном случае [28]. Однако линейное дисперсионное соотношение для неустойчивости Дарье — Ландау здесь автоматически выполняется, так как эти системы уравнений в двумерном случае задают эволюцию поверхностей разрывов через краевые условия, которые могут быть произвольными.

В работе [27] получена система уравнений для описания движения бесконечно тонкого фронта пламени в трехмерном потоке в обратном направлении времени. Зная в некоторый момент времени распределения плотности и завихренности в области за фронтом, можно полностью проследить эволюцию этого фронта от момента зажигания до произвольного момента времени, предшествующего моменту фиксации. В данной работе этого ограничения уже нет и полученную систему поверхностных уравнений можно моделировать в прямом направлении времени, зная начальные данные только на фронте.

В работе показано, что ненулевая завихренность играет важную роль в характере движения фронта реакции, придавая уравнениям замкнутый вид и определяя их структуру.

Приведенный в статье формализм является достаточно общим. Например, систему уравнений фронта горения в двумерном потоке можно замкнуть не только с помощью дополнительного соотношения на поверхности (51), но и из других соотношений на поверхности, используя данную замену координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Danielle P. J.** The theory of flame motion // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1930. — V. 126, N 802. — P. 393–405.
2. **Зельдович Я. Б.** Теория горения и детонации газов. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944.
3. **Lewis V., Elbe G.** On the theory of flame propagation // J. Chem. Phys. — 1934. — V. 2, N 8. — P. 537–546.
4. **Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.** Теория теплового распространения пламени // Журн. физ. химии. — 1938. — Т. 12, вып. 1. — С. 100–105.
5. **Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.** К теории равномерного распространения пламени // Докл. АН СССР. — 1938. — Т. 19. — С. 693–695.
6. **Ландау Л. Д.** К теории медленного горения // ЖЭТФ. — 1944. — Т. 14, вып. 6. — С. 240–245.
7. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.** Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
8. **Williams F. A.** Combustion Theory. — New York: Benjamin, 1985.
9. **Мержанов А. Г., Хайкин Б. И.** Теория волн горения в гомогенных средах. — Черноголовка: Изд-во ОИХФ РАН, 1992.
10. **Law C. K.** Combustion Physics. — N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2006.
11. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6: Гидродинамика. — М.: Физматлит, 2001.
12. **Bychkov V. V.** Nonlinear equation for a curved stationary flame and the flame velocity // Phys. Fluids. — 1998. — V. 10, N 8. — P. 2091–2098.
13. **Sivashinsky G. I.** Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations // Acta Astronaut. — 1977. — V. 4. — P. 1177–1215.
14. **Frankel M.** An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows // Phys. Fluids. A. — 1990. — V. 2. — P. 1879–1886.
15. **Bychkov V., Zaytsev M., Akkerman V.** Coordinate-free description of corrugated flames with realistic gas expansion // Phys. Rev. E. — 2003. — V. 68. — 026312.
16. **El-Rabii H., Joulin G., Kazakov K.** Nonperturbative approach to the nonlinear dynamics of two-dimensional premixed flames // Phys. Rev. Lett. — 2008. — V. 100. — 174501.
17. **Joulin G., El-Rabii H., Kazakov K.** On-shell description of unsteady flames // J. Fluid Mech. — 2008. — V. 608. — P. 217.
18. **Kazakov K. A.** Exact equation for curved stationary flames with arbitrary gas expansion // Phys. Rev. Lett. — 2005. — V. 94. — 094501.
19. **Зайцев М. Л., Аккерман В. Б.** Метод описания стационарного фронта реакции в двумерном потоке // Письма в ЖЭТФ. — 2010. — Т. 92, № 11. — С. 813–816.
20. **Searby G.** Acoustic instability in premixed flames // Combust. Sci. Technol. — 1992. — V. 81. — P. 221–231.
21. **Petchenko A., Bychkov V., Akkerman V., Eriksson L.** Violent folding of a flame front in a flame-acoustic resonance // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V. 97. — 164501.
22. **Petchenko A., Bychkov V., Akkerman V., Eriksson L.** Flame-sound interaction in tubes with nonslip walls // Combustion and Flame. — 2007. — V. 149. — P. 418–434.
23. **Bychkov V., Akkerman V., Valiev D., Law C. K.** Gas compression moderates flame acceleration in deflagration-to-detonation transition // Combust. Sci. Technol. — 2012. — V. 184, is. 7–8. — P. 1066–1079.
24. **Новожилов Б. В.** Горение энергетических материалов в акустическом поле (обзор) // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 116–136.
25. **Новожилов Б. В.** Влияние тангенциального обдува на горение твердого ракетного топлива при гармонически меняющемся давлении // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 66–72.
26. **Новожилов Б. В., Каганова З. И., Беляев А. А.** Горение летучих конденсированных систем при спаде давления // Хим. физика. — 2010. — Т. 29, № 11. — P. 70–77.
27. **Зайцев М. Л., Аккерман В. Б.** К нелинейной теории движения поверхностей гидродинамических разрывов // ЖЭТФ. — 2009. — Т. 135, № 4. — С. 800–819.
28. **Зайцев М. Л., Аккерман В. Б.** Ламинарное пламя и звуковые волны в двумерном потоке // ЖЭТФ. — 2011. — Т. 139, № 3. — С. 613–620.
29. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.