

УДК 532.536

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ГРУНТАХ

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

* Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск

Исследовано распространение волн малой амплитуды в грунтах в рамках гипопластической модели, описывающей нелинейное поведение сыпучих сред. Для одномерных возмущений исходные уравнения сведены к системе нелинейных волновых уравнений. Представлены результаты качественного анализа и численного решения ряда задач.

Многие сыпучие материалы, в частности песчаные грунты, характеризуются нелинейной зависимостью между деформациями и напряжениями при нагрузках и разгрузках. Для описания их свойств применяются гипопластические модели, в которых связь напряжение — деформация представляется нелинейным эволюционным уравнением с коэффициентами, в общем случае зависящими от параметров напряженного состояния и пористости среды, а также от констант, характеризующих типы материалов и определяемых из экспериментов и расчетов [1–4]. Результаты изучения некоторых закономерностей распространения волн в грунтах на основе такой модели представлены в [5–10].

В настоящей работе исследуется характер эволюции возмущений, которые генерируются на границе занимающего полупространство грунта.

Основное внимание уделяется волнам малой амплитуды и малым деформациям среды, при этом влиянием пористости пренебрегается, и исходная система уравнений записывается в виде

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} T; \quad (1)$$

$$\dot{T} = -T\Omega + \Omega T + f_1(T)D + f_2(T) \operatorname{tr}(TD)D + N(T)\|D\|. \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность материала; \mathbf{v} — вектор скорости; D и Ω — тензоры скоростей деформаций и вращений; $\|D\| = \sqrt{\operatorname{tr}(DD)}$ — норма тензора скоростей деформаций; $f_1(T) = C_1 \operatorname{tr}(T)$; $f_2 = C_2/\operatorname{tr}(T)$; $N(T) = (C_3TT + C_4T^*T^*)/\operatorname{tr}(TT)$; $T^* = T - I \operatorname{tr}(T)/3$; I — единичный тензор; C_1, \dots, C_4 — эмпирические константы; точка над буквой обозначает полную производную по времени. Наличие нормы тензора скоростей деформаций в последнем слагаемом уравнения (2), содержащем всю информацию о нелинейных свойствах модели, не позволяет линеаризовать систему (1), (2) в случае однородного поля материальных скоростей среды (иными словами, в окрестности значения $\|D\| = 0$). Если распределение скоростей неоднородно, то линеаризация возможна.

Рассмотрим одномерные движения гипопластической среды, считая искомые компоненты скоростей и напряжений функциями одной координаты x и времени t . Предположим, что деформации, материальные скорости и отклонения компонент тензора напряжений от невозмущенных значений малы. Кроме того, будем считать начальное напряженное состояние однородным и $\mathbf{v}^0 = 0$. (Здесь и далее индекс 0 соответствует исходному невозмущенному состоянию среды.) При сделанных предположениях система уравнений (1), (2)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-05-65337).

приводится к системе трех нелинейных уравнений второго порядка для компонент скорости

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} \|D\|, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_{s1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial}{\partial x} \|D\|, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_{s2}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= a_5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial}{\partial x} \|D\|,\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\|D\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2};$$

коэффициенты c_p, c_{s1}, c_{s2}, a_i ($i = 1, \dots, 6$), b_i ($i = 1, \dots, 3$) определяются параметрами исходного состояния среды и модели. Если все коэффициенты a_i, b_i равны нулю, то уравнения (3) превращаются в не зависящие друг от друга линейные волновые уравнения, описывающие распространение трех упругих волн (одной продольной и двух поперечных) с различными скоростями c_p, c_{s1}, c_{s2} . Предполагая, что главные оси невозмущенного тензора напряжений T^0 совпадают с осями x, y, z , так что $T_{xy}^0 = T_{xz}^0 = T_{yz}^0 = 0$, получим более простую модель

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b \frac{\partial}{\partial x} \|D\|, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_{s1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_{s2}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}c_p^2 &= \frac{1}{\rho} \left[C_1 \operatorname{tr}(T^0) + \frac{C_2 (T_{xx}^0)^2}{\operatorname{tr}(T^0)} \right], \quad c_{s1}^2 = \frac{1}{2\rho} [(C_1 + 1)T_{xx}^0 + (C_1 - 1)T_{yy}^0 + C_1 T_{zz}^0], \\ c_{s2}^2 &= \frac{1}{2\rho} [(C_1 + 1)T_{xx}^0 + C_1 T_{yy}^0 + (C_1 - 1)T_{zz}^0], \quad b = \frac{1}{\rho \operatorname{tr}(T^0)} \left[C_3 (T_{xx}^0)^2 + \frac{C_4}{9} (2T_{xx}^0 - T_{yy}^0 - T_{zz}^0)^2 \right].\end{aligned}$$

Первое уравнение системы (4) представляет собой нелинейное неоднородное волновое уравнение, описывающее продольные и поперечные движения среды, а два других являются линейными волновыми уравнениями, как и в упругом случае, с постоянными, но, вообще говоря, разными скоростями c_{s1}, c_{s2} , так как $c_{s1}^2 - c_{s2}^2 = (T_{zz}^0 - T_{yy}^0)/(2\rho)$. Эти скорости совпадают только в случае $T_{yy}^0 = T_{zz}^0$. Таким образом, из уравнений (4) следует, что две поперечные (сдвиговые) волны распространяются независимо друг от друга и от продольного движения, в то время как поперечные движения воздействуют на продольные волны. Другими словами, в гипопластических средах поперечные волны приводят к возбуждению продольных волн. Если исходное напряженное состояние изотропно ($T_{xx}^0 = T_{yy}^0 = T_{zz}^0 \equiv T_0$), то выражения для скоростей распространения волн и параметра нелинейности существенно упрощаются: $c_p^2 = (3C_1 + C_2/3)T_0/\rho$, $c_{s1}^2 = c_{s2}^2 \equiv c_s^2 = 3C_1 T_0/(2\rho)$, $b = C_3 T_0/(3\rho)$.

Далее все уравнения записываются в безразмерных переменных с сохранением обозначений, использованных для размерных величин. Как показано в [9, 10], при отсутствии поперечных движений ($v = w = 0$) продольные возмущения, в которых материальная скорость совпадает с направлением распространения волны, описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (5)$$

Решения этого уравнения зависят от знака производной $\partial u/\partial x$. Действительно, если $\partial u/\partial x > 0$ всюду, то уравнение (5) сводится к линейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (c_p^2 + b) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

и его решения соответствуют переносу начального возмущения в обоих направлениях оси x без изменения формы с постоянной скоростью $c_1 = \pm\sqrt{c_p^2 + b}$. Если $\partial u/\partial x < 0$ всюду и $b < c_p^2$, то уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (c_p^2 - b) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

и его решения описывают перенос начальных возмущений без изменения формы с постоянной скоростью $c_2 = \pm\sqrt{c_p^2 - b}$. В рассматриваемом гидростатическом случае, когда сдвиговые напряжения отсутствуют, параметр b положителен, поэтому $c_1 > c_2$ и профили, соответствующие положительным значениям градиента скорости, распространяются быстрее, чем профили с отрицательными значениями этого градиента.

Заметим, что уравнение (5) помимо продольных описывает также сдвиговые волны малой амплитуды в насыщенных сыпучих средах [5–7]. При этом искомой функцией является поперечная скорость v , коэффициенты отличаются от приведенных выше.

Если параметр нелинейности b мал по сравнению с величиной c_p^2 , то для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x , в [9] с помощью приближенной факторизации волнового оператора получено уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2c_p} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = 0. \quad (6)$$

В [9, 10] представлено численное решение уравнения (6) на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ с начальным пространственно-локализованным распределением скорости и нулевыми граничными условиями. Показано, что, поскольку начальный профиль имеет две ветви с различными знаками градиента скорости, они движутся в одном и том же направлении с разными скоростями, причем передний фронт перемещается медленнее заднего. Их взаимодействие приводит к тому, что амплитуда возмущения в процессе движения уменьшается, со временем это возмущение полностью затухает. Если решено уравнение (6) с теми же условиями, но с отрицательным знаком c_p , то в этом случае передний фронт возмущения опережает задний, ветви с различными знаками градиента скорости движутся, не взаимодействуя друг с другом, вследствие чего возмущение с течением времени расширяется, сохраняя амплитуду неизменной.

На основе приближенного уравнения (6) рассмотрим распространение продольных волн в грунте, занимающем полупространство $x > 0$, которые генерируются заданными на границе $x = 0$ импульсами $u(0, t) = f(t)$. Пусть виброисточник вырабатывает одиночный сигнал

$$f(t) = u_0 \exp \left[- \left(\frac{t - t_0}{t_1} \right)^2 \right],$$

где u_0 — амплитуда; t_0 — время достижения максимального значения; t_1 — длительность сигнала. Этот импульс приводит к возбуждению волн нагрузки ($u > 0$) или разгрузки ($u < 0$) в зависимости от того, положительна или отрицательна величина u_0 . На рис. 1 представлена зависимость скорости среды от времени на границе $x = 0$ и в двух точках $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Эти кривые можно интерпретировать как временную развертку сигналов, регистрируемых датчиками, расположенными в грунте на некотором расстоянии от источника. Кривые 1–3 соответствуют нагружению среды ($u_0 > 0$), при этом скорость переднего фронта меньше скорости заднего, по мере удаления от источника датчики регистрируют сигнал уменьшающейся амплитуды, а на достаточно больших расстояниях сигнал полностью затухает. Кривые 4–6 соответствуют разгрузке грунта ($u_0 < 0$), скорость переднего фронта сигнала больше скорости заднего, поэтому возмущение движется в среде без затухания и его длительность увеличивается.

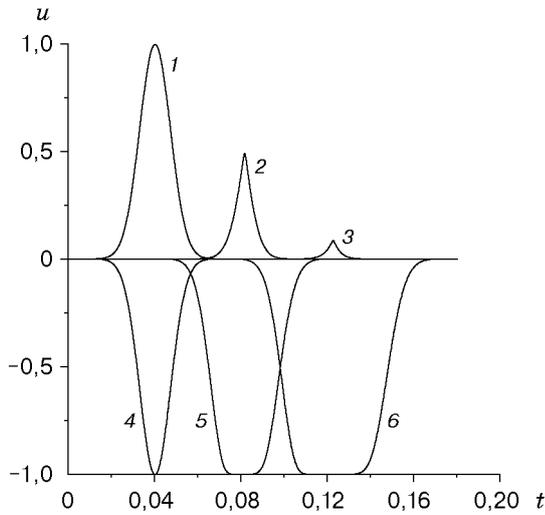


Рис. 1. Эволюция одиночного сигнала (уравнение переноса):

1-3 — $u_0 = 1$, $x = 0; 0,02; 0,04$; 4-6 — $u_0 = -1$, $x = 0; 0,02; 0,04$

Рассмотрим случай, когда виброисточник задает синусоидальный сигнал постоянной амплитуды $f(t) = u_0 \sin \omega t$ (ω — циклическая частота, связанная с периодом колебаний соотношением $T = 2\pi/\omega$). На рис. 2 приведены временные развертки сигналов, регистрируемых датчиками в точках $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ в грунте. Как следует из анализа рис. 2, синусоидальный импульс по мере продвижения существенно изменяется. В зонах нагружения профили скоростей заостряются и их амплитуда уменьшается (как в случае задания на границе грунта одиночного импульса нагружения), в то время как в зонах разгрузки профили скоростей расширяются при неизменной амплитуде (как в случае одиночного импульса разрежения). Такое изменение формы импульса приводит к формированию сигнала большой длительности, соответствующего разгрузке среды.

Если источник вырабатывает синусоидальный импульс конечной длительности с уменьшающейся амплитудой

$$f(t) = u_0 \exp \left[- \left(\frac{t - t_0}{t_1} \right)^2 \right] \sin \omega t,$$

то форма сигнала $u(x, t)$ по мере продвижения вглубь меняется следующим образом. Ско-

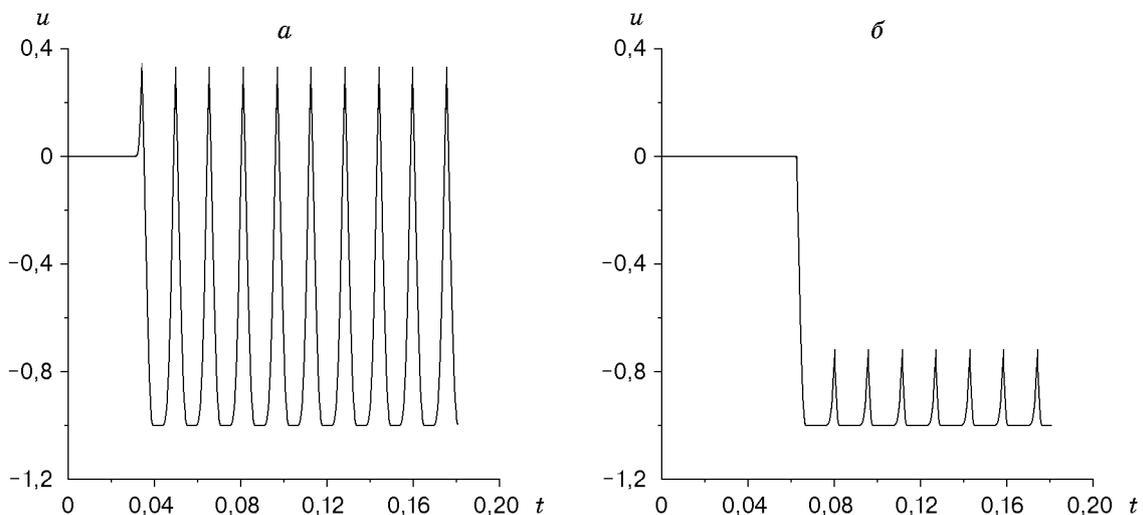


Рис. 2. Эволюция синусоидального сигнала (уравнение переноса):

a — $x = 0,01$; $б$ — $x = 0,02$

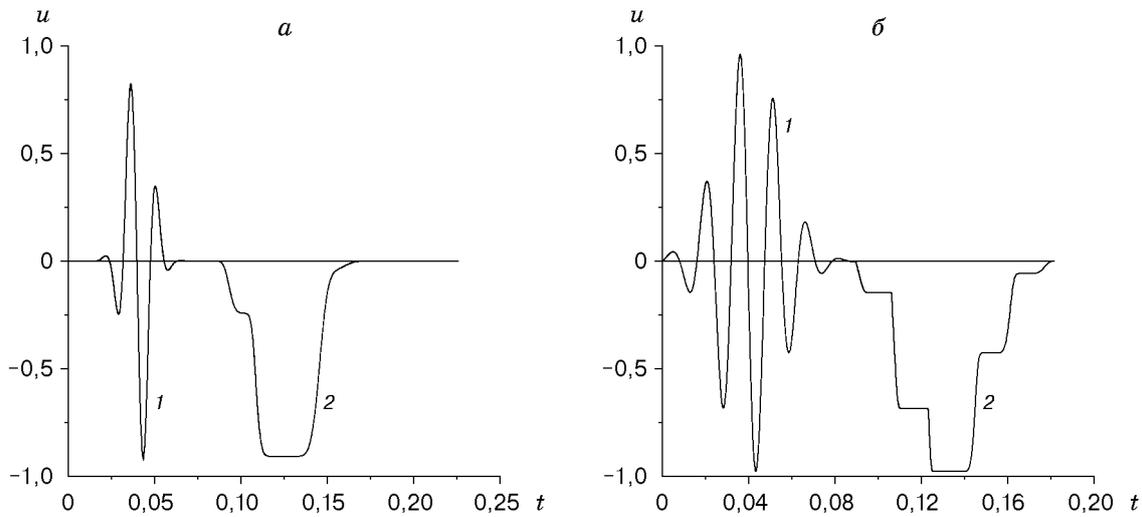


Рис. 3. Эволюция затухающего синусоидального сигнала (уравнение переноса):

$a - t_1 = 0,01$: 1 — $x = 0$; 2 — $x = 0,04$; $b - t_1 = 0,02$: 1 — $x = 0$; 2 — $x = 0,04$

рости в зонах нагружения с течением времени убывают, полностью исчезая при больших временах, а профили скоростей в зонах разгрузки расширяются с сохранением амплитуды, причем, поскольку амплитуда импульса на границе уменьшается, максимальные значения скоростей в последовательных зонах разгрузки разные, в результате чего на больших расстояниях от источника импульс приобретает ступенчатую форму (рис. 3). Число ступенек равно числу зон разгрузки, которое задается импульсом на границе. Заметим, что длительность импульса на рис. 3,б в два раза больше, чем на рис. 3,а.

Уравнение первого порядка (6) получено с помощью приближенной факторизации волнового уравнения (5). Сравним результаты численного решения этих уравнений. На рис. 4 представлены временные развертки сигнала, генерируемого одиночным импульсом на границе грунта $x = 0$, в тех же точках и при тех же параметрах, которые использованы при решении уравнения первого порядка. Видно, что характер сигналов тот же, что на рис. 1. При нагружении сигнал по мере распространения в среду становится более острым и его амплитуда уменьшается (кривые 1–3 на рис. 4), а при разгрузке длительность сигнала увеличивается, но амплитуда остается постоянной (кривые 4–6). Однако процесс эволюции, моделируемый волновым уравнением (5), более медленный, чем моделируемый уравнением (6). Кроме того, по мере продвижения сигнал приобретает продолжительный “хвост” малой амплитуды, соответствующий разгрузке ($u < 0$), который отсутствует при моделировании процесса уравнением (6). На большом удалении датчика от источника характер сигнала свидетельствует о постепенном уменьшении зоны нагрузки и увеличении зоны разгрузки. Датчик, расположенный достаточно далеко от границы грунта, фиксирует продолжительный сигнал, соответствующий разгрузке.

На рис. 5 представлены результаты численного решения волнового уравнения (5), когда источник на границе вырабатывает синусоидальный сигнал убывающей амплитуды и, значит, конечной длительности. Все параметры в расчетах эволюции сигналов одинаковы (см. рис. 3,а, 5), что позволяет сопоставить результаты, полученные при решении двух уравнений: волнового (5) и переноса (6). Из сравнения уравнений (5) и (6) следует, что характер распространения сигналов качественно один и тот же: на больших расстояниях от источника датчик регистрирует сигнал, соответствующий разгрузке ($u < 0$), и число ступенек на временной развертке равно числу зон разгрузки, которое зависит от харак-

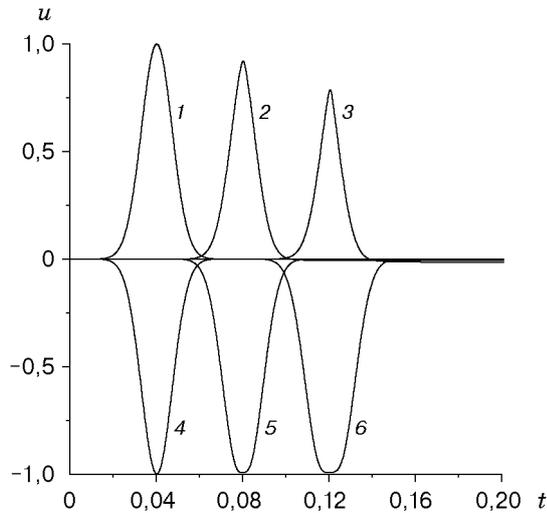


Рис. 4

Рис. 4. Эволюция одиночного сигнала (волновое уравнение):
 1-3 — $u_0 = 1$, $x = 0$; 0,02; 0,04; 4-6 — $u_0 = -1$, $x = 0$; 0,02; 0,04

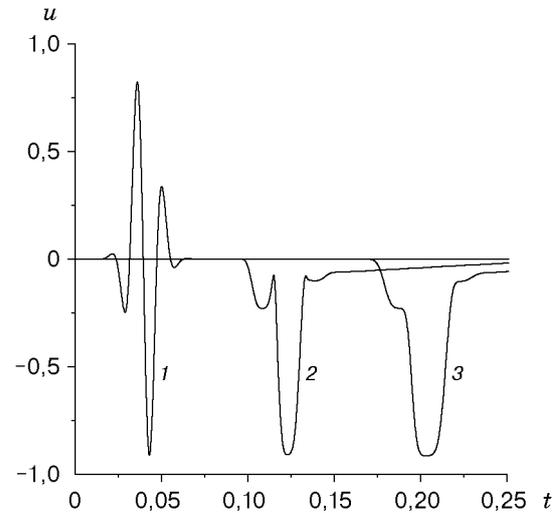


Рис. 5

Рис. 5. Эволюция затухающего синусоидального сигнала (волновое уравнение):
 1 — $x = 0$; 2 — $x = 0,04$; 3 — $x = 0,08$

тера импульса на границе $x = 0$. Однако процесс, описываемый волновым уравнением, развивается значительно медленнее, чем процесс, моделируемый уравнением переноса.

Для численного решения уравнения (5) использована двухслойная явная схема [9], в которой из соображений устойчивости производная по координате аппроксимируется разностью назад, поскольку коэффициент перед производной по координате всегда положителен и равен либо $c_p + b/(2c_p)$ при $u_x > 0$, либо $c_p - b/(2c_p)$ при $u_x < 0$ ($0 < b < c_p$). Численное решение уравнения (5) проводилось по схеме, использованной в [10]. Уравнение (5) записывается в виде системы двух уравнений первого порядка для скорости и напряжения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c_p^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x},$$

где $T \equiv T_{xx} - T_0$. Для данной системы строится неявная конечно-разностная схема, реализуемая последовательными приближениями:

$$T_i^{n+1,k+1} = T_i^n + (c_p^2 \delta t / \delta x) [\alpha (\Delta u_i^n + b |\Delta u_i^n|) + (1 - \alpha) (\Delta u_i^{n+1,k} + b |\Delta u_i^{n+1,k}|)],$$

$$u_i^{n+1,k+1} = u_i^n + (\delta t / \delta x) [\alpha \Delta T_i^n + (1 - \alpha) \Delta T_i^{n+1,k}].$$

Здесь $T_i^n = T(t_n, x_i)$; $u_i^n = u(t_n, x_i)$; $\Delta T_i^n = T_{i+1}^n - T_i^n$; $\Delta u_i^n = u_i^n - u_{i-1}^n$; $\Delta T_i^{n+1,k} = T_{i+1}^{n+1,k} - T_i^{n+1,k}$; $\Delta u_i^{n+1,k} = u_i^{n+1,k} - u_{i-1}^{n+1,k}$; k — номер итерации; параметр $\alpha = 1$ соответствует явной схеме, $0 \leq \alpha < 1$ — неявной схеме; δt , δx — шаги сетки по времени и координате. Итерации проводятся до тех пор, пока разность значений искомых функций на двух последовательных итерациях не станет меньше некоторого малого числа ε .

Расчеты, результаты которых представлены на рис. 1–5, выполнены при следующих параметрах: $b = 0,1$, $c_p = 0,5$, $t_0 = 0,04$, $\alpha = 0,2$, $\delta t = 0,0001$, $\delta x = 0,0002$. Для синусоидальных сигналов (см. рис. 2, 3, 5) $\omega = 400$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kolymbas D.** An outline of hypoplasticity // Arch. Appl. Mech. 1991. V. 61. P. 143–151.
2. **Gudehus G.** A comprehensive constitutive equation for granular materials // Soils Found. 1996. V. 36, N 1. P. 1–12.
3. **Колымбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Об одном методе анализа математических моделей сред при сложном нагружении // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 133–142.
4. **Kolymbas D.** Introduction to hypoplasticity. Rotterdam: Balkema, 2000.
5. **Osinov V. A., Gudehus G.** Plane shear waves and loss of stability in a saturated granular body // Mech. Cohesive-Frict. Materials. 1996. V. 1. P. 25–44.
6. **Gordon M. S., Shearer M., Schaeffer D.** Plane shear waves in a fully saturated granular medium with velocity and stress controlled boundary conditions // Intern. J. Nonlinear Mech. 1997. V. 32, N 3. P. 489–503.
7. **Hayes B. T., Schaeffer D. G.** Plane shear waves under a periodic boundary disturbance in a saturated granular medium // Physica D. 1998. V. 121. P. 193–212.
8. **Osinov V. A.** Theoretical investigation of large-amplitude waves in granular soils // Soil Dyn. Earthquake Engng. 1998. V. 17. P. 13–28.
9. **Березин Ю. А., Сподарева Л. А.** Продольные волны в сыпучих средах // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 148–152.
10. **Berezin Yu. A., Osinov V. A., Hutter K.** Evolution of plane disturbances in hypoplastic granular materials // Continuum Mech. Thermodyn. 2001. V. 13. P. 25–40.

Поступила в редакцию 22/II 2001 г.
